

偏微分 (P.161)

$z = f(x, y) : P_0(a, b)$ の近傍で定義

~ $x=a$ と固定する ~ $f(a, y)$ は y の関数

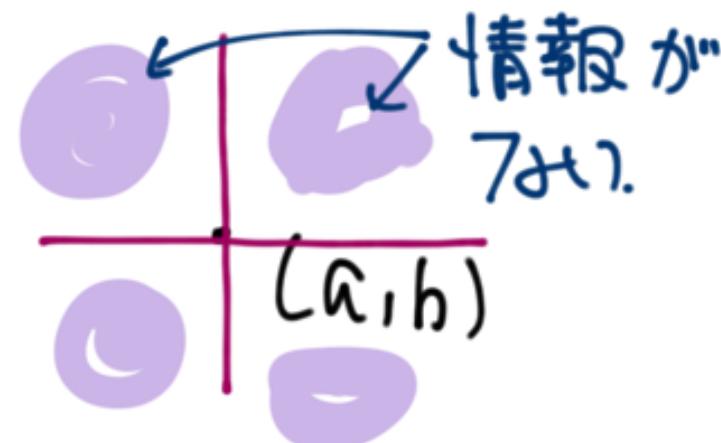
~ $f(a, y)$ を y で微分する → 偏微分 という.

記号: $f_x, f_y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を使う.

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ f(a+h, b) - f(a, b) \}$$

$$f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ f(a, b+h) - f(a, b) \}$$

偏微分
→ かたよっていう



$$f(x+\vec{r}) = f(x) + \cancel{Af} + \varepsilon \vec{r} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \ (\vec{r} \rightarrow 0)$$

$$\rightsquigarrow f(\vec{x} + \vec{r}) = f(\vec{x}) + \cancel{\vec{A} \cdot \vec{r}} + \varepsilon |\vec{r}| \quad \varepsilon \rightarrow 0 \ (|\vec{r}| \rightarrow 0)$$

\vec{A} と \vec{r} の内積.

ある定ベクトル \vec{A} が存在して、

$$f(a+r, b+k) = f(a, b) + \cancel{\vec{A} \cdot (r, k)} + \varepsilon \sqrt{r^2 + k^2}$$

とかけば、 $\varepsilon \rightarrow 0 \ (r^2 + k^2 \rightarrow 0)$ となる。

このとき f は (a, b) で **全微分可能** といふ。

$$\vec{A} = (\alpha, \beta) \text{ とおくと}$$

$$f(a+r, b+k) = f(a, b) + \cancel{\alpha r + \beta k} + \varepsilon \sqrt{r^2 + k^2}$$

ここで $k = 0$ とすると、

$$f(a+r, b) = f(a, b) + \alpha r + \varepsilon |r|$$

より、 $\alpha = f_x(a, b)$ である。同様にして、
 $\beta = f_y(a, b)$ となる。

よって, $f(x,y)$ が " (a,b) で全微分可能ならば", $f(x,y)$ は偏微分可能で, 実は

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k \\ + \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2}$$

となる. つまり.

しかし, 偏微分可能だからといって全微分可能とは限らない.

例) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$ とする.

$$\Rightarrow f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0 \quad (\text{easy})$$

一方で, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない ("easy")

$\Rightarrow f$ は全微分可能ではない.

Q1. 全微分可能なメリット？

Q2. いつ全微分可能か？

A1. 合成関数の微分(P.165)

$f(x, y)$: 領域 D で全微分可能

$x = x(t), y = y(t)$: $I \subset \mathbb{R}$ で微分可能

$\Rightarrow f(x(t), y(t))$ は工上微分可能で、

$$\frac{df}{dt} = f_x(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + f_y(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

A1. 合成関数の微分(P.165)

$f(x, y)$: 領域 D で全微分可能

$x = x(t), y = y(t)$: $I \subset \mathbb{R}$ で微分可能

$\Rightarrow f(x(t), y(t))$ は I 上微分可能で、

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= f_x(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + f_y(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

証明 $\exists z(t) := f(x(t), y(t))$ とおく。

$z(t + \Delta t) - z(t) = A \Delta t + \varepsilon \Delta t$ の形に
すればよい。 $(\varepsilon \rightarrow 0 (\Delta t \rightarrow 0))$ で

$$z(t + \Delta t) - z(t) = f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$$

$$- f(x(t), y(t))$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + x'(t) \Delta t + \varepsilon_1 \Delta t$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + y'(t) \Delta t + \varepsilon_2 \Delta t$$

証明 $z(t) := f(x(t), y(t))$ とおく。

$z(t+\Delta t) - z(t) = A \Delta t + \varepsilon \Delta t$ の形を
すればよい。 $(\varepsilon \rightarrow 0, (\Delta t \rightarrow 0))$ で

$$z(t+\Delta t) - z(t) = f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + x'(t) \Delta t + \varepsilon_1 \Delta t$$

$$f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))$$

$$= f(x(t) + x'(t) \Delta t + \varepsilon_1 \Delta t, y(t) + y'(t) \Delta t + \varepsilon_2 \Delta t)$$

$$= f(x(t), y(t)) + f_x(x(t), y(t)) \tilde{R} + f_y(x(t), y(t)) \tilde{R}$$
$$+ \varepsilon \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{R}^2}$$

$$f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) \\ = f(x(t) + \underbrace{x'(t)\Delta t}_{\vec{h}''} + \varepsilon_1 \Delta t, y(t) + \underbrace{y'(t)\Delta t}_{\vec{k}''} + \varepsilon_2 \Delta t)$$

$$= f(x(t), y(t)) + f_x(x(t), y(t))\vec{h} + f_y(x(t), y(t))\vec{k} \\ + \varepsilon \sqrt{\vec{h}^2 + \vec{k}^2}$$

$$= z(t) + f_x(x(t), y(t))x'(t)\Delta t + f_y(x(t), y(t))y'(t)\Delta t \\ + f_x \varepsilon_1 \Delta t + f_y \varepsilon_2 \Delta t + \varepsilon \sqrt{\vec{h}^2 + \vec{k}^2} \times \Delta t \\ \text{D } (\Delta t \rightarrow 0) \quad \vec{h}^2 + \vec{k}^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow |\Delta t| \rightarrow 0$$

$\varepsilon |\Delta t| \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$ ($\Delta t \rightarrow 0$))

以上より $\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$ //

$$f(\vec{p} + \vec{h}) - f(\vec{p}) = \Delta f = (f_x, f_y) \cdot \vec{h} + \varepsilon |\vec{h}|$$

$$f(\vec{p} + \vec{h}) - f(\vec{p}) = \Delta f = (f_x, f_y) \cdot \vec{h} + \varepsilon |\vec{h}|$$

$$\vec{h} = \vec{p} + \vec{R} - \vec{p}$$

$$= (x(t+\Delta t) - x(t), y(t+\Delta t) - y(t))$$

$$= (x'(t)\Delta t + \varepsilon_1 \Delta t, y'(t)\Delta t + \varepsilon_2 \Delta t)$$

$$= (x'(t), y'(t))\Delta t + (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\Delta t$$

$$\rightarrow = (f_x, f_y) \cdot ((x'(t), y'(t))\Delta t + (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\Delta t) + \varepsilon |\vec{h}|$$

$$= [(f_x, f_y) \cdot (x'(t), y'(t))] \Delta t + \varepsilon |\Delta t|$$

函数

定理9(連鎖公式)

$z = f(x, y)$: 領域 D で全微分可能
変数変換 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ が
偏微分可能とする。

このとき, $z = f(x(u, v), y(u, v))$ も偏微分
可能で,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \text{ となる。}$$

証明 $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{d}{du} z(x(u, v), y(u, v))$ 固定 v

合成関数の定理 $t \rightarrow u$ とすればよい。//

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \text{ とおぼえ。}$$

~~~~~

$$\Delta z = (z_x, z_y) \cdot \vec{\Delta r} + \varepsilon |\Delta r| \quad \begin{matrix} \text{は全微分式} \\ z(u,v), y(u,v) \end{matrix}$$

$$\vec{\Delta r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \Delta u + x_v \Delta v \\ y_u \Delta u + y_v \Delta v \end{pmatrix} + \varepsilon_1 \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} + \varepsilon_1 \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

$$(z_x, z_y) \cdot \vec{\Delta r} = (z_x, z_y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad (z_u, z_v)$$

$$= (z_x, z_y) \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \boxed{(z_x x_u + z_y y_u, z_x x_v + z_y y_v)} \\ \times \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

## 应用 極座標

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$z = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta$$

A.2 P.43 に戻る。

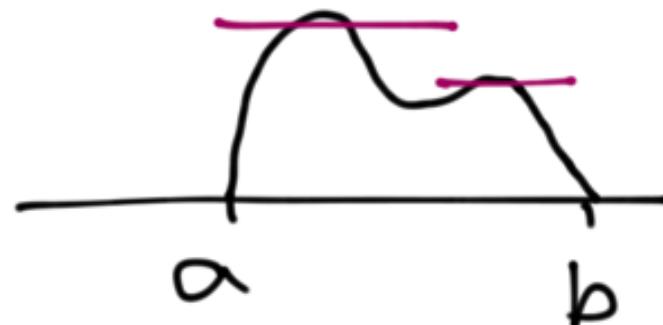
定理 2 (ロールの定理)

$f : [a, b]$  で連続,  $(a, b)$  で微分可能

$f(a) = f(b)$  ならば,  $\exists c \in (a, b)$

s.t.  $f'(c) = 0$ .

証明  $f$  は  $[a, b]$  で  
連続なので, 最大, 最  
小をとる.



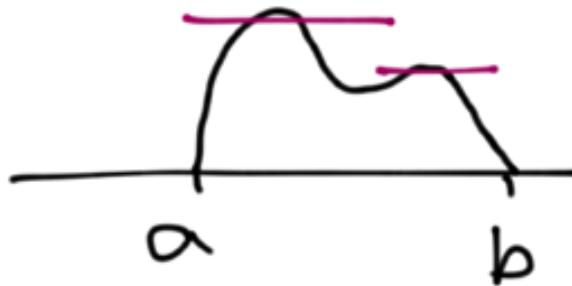
$f(x) \equiv f(a)$  なら OK.

$f(x) \neq f(a) \Rightarrow$  最大 or 最小  $\neq f(a)$

最大値  $> f(a) = f(b)$  とする.

よって  $\exists c \in (a, b)$  s.t.  $f(c)$  は  $[a, b]$  での  
 $f$  の最大値.

証明  $f$  は  $[a, b]$  で  
連続なので、最大、最  
小をとる。



$f(x) \equiv f(a)$  なら OK.

$f(x) \neq f(a) \Rightarrow$  最大 or 最小  $\neq f(a)$

最大値  $> f(a) = f(b)$  とする。

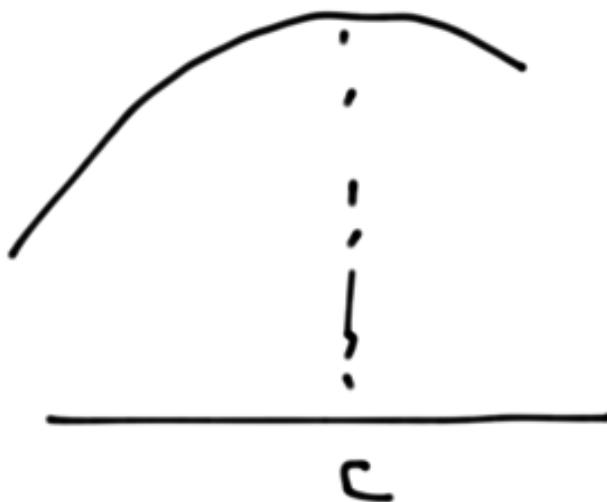
よって  $\exists c \in (a, b)$  s.t.  $f(c)$  は  $[a, b]$  での  
 $f$  の最大値。

$$f(c+\bar{r}) - f(c) \leq 0$$

$$\frac{1}{\bar{r}} \{ f(c+\bar{r}) - f(c) \}$$

$$\leq 0 \quad (\bar{r} > 0)$$

$$\geq 0 \quad (\bar{r} < 0)$$



よって,  $\bar{r} \rightarrow 0$  の  $\lim f'(c) = 0$ ,

定理3(平均値定理)

$f: [a, b] \rightarrow$ 連続で,  $(a, b)$ で微分可能  
 $\Rightarrow a < \exists c < b$  s.t.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$\because \varphi(x) = f(x) - \left\{ \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right\}$

とすと,  $\varphi(a) = 0$ ,  $\varphi(b) = 0$ .

よって,  $\exists c \in (a, b)$  s.t.  $\varphi'(c) = 0$ .

これより, 主張を立てる. //