測定 Measurement と選好 Preference, 効用 Utility

– 合理的思考の技術 Lecture 12 - 13 –

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

June 30, 2014

$1 + 1 = 2?$

- $1 + 1 = 2$ は正しい？

$1 + 1 = 2?$

- $1 + 1 = 2$ は正しい？
- もし正しいとすれば、なぜ正しい？
- いつも正しい？どういうときに正しい？

$1 + 1 = 2?$

- $1 + 1 = 2$ は正しい？
- もし正しいとすれば、なぜ正しい？
- いつも正しい？どういうときに正しい？

Example (名目数 Nominal Number, 順序数（序数）Ordinal Number)

名目数 単なるラベル – W9 号館

順序数 大小関係のみ問題 – 1 位, 2 位

名目数や順序数の集合上では、そもそも “$+$” の演算が定義されない。

Example (直感の形式モデル化)

アルコール 1 L と水 1 L を「たす」と 2 L にはならない。

現実世界で「たす」という直感が、厳密に数学における “$+$” の性質を満たすとは限らない。

Outline

測定 Measurement と直感

一般に科学理論における変数は直感の定量的感覚を「そのまま」表す必要はない。

Example (温度 Temperature)

直感で感じられるのは、せいぜいどちらの物体の方がより熱いかという程度。それ以上の定量的な温度の決め方は全て物理学で基礎づけられる。

Example (生物学的時間)

本川 [20] は、物理学的時間と異なる変数として、「生物学的」時間を提唱している。当然、測定の仕方は通常の「時計」と全く異なる。

測定と理論

しばしば、測定量や測定機器は理論や法則が数学的に美しく（単純に）表現されるように特徴づけられる。

Example (熱力学における絶対温度 Absolute Temperature)

- 絶対温度は、理想気体の状態方程式のような一連の物理法則が美しく単純に表現できるように定義された。
- 理論の発展とともに、相対温度から絶対温度へと、物理量の定義の仕方も変化したことに注意。
- 現在でも、日常の用途では、引き続き相対温度が使用される。つまり、用途に応じて、同一の物理量の定量化が異なって構わない。

Q.「正しく」機能する測定機器は理論・法則によって特徴づけられる。他方で、理論・法則は測定機器を用いて得られるデータによって検証されるだろう。この循環的論法的状況はいかにして解決できるか？

測定と関係・演算の保存

これまでの議論の数学的側面を扱う領域として測定理論 measurement theory がある。[11]

Definition (測定 measurement)

測定とは、観測される関係に対して、対応する、もしくはこれを表現 represent する、もしくはこれを保存 preserve する数値を割り当てること。

Example (関係・演算の保存)

- 序数効用の表現 $\forall x, y \in A[x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)]$
- 物体 a, b に対して $a \circ b$ を「併せる」という演算とすると、
  - 質量については $mass(a \circ b) = mass(a) + mass(b)$ （質量保存の法則）
  - Q. 体積については？

表現問題 Representation Problem

理論上の演算や関係を保存する数値の割り当て方の存在の十分条件（こうした条件を公理 axioms と呼ぶ）を探す問題を表現問題という。

- 一般に、有限個の自然な条件で、成立させたい言明を定理という形で特徴付ける作業を公理化 axiomatization という。
- 測定理論において示したい言明は表現定理 representation theorem。

許容される変換と言明の有意味性

Definition (許容される変換 Admissible Transformation)

数値尺度の変換の前後で、関係や演算の保存が保たれるような変換。

Definition (言明 Statement の有意味性 Meaningfulness)

数値尺度を含んだ言明 statement が有意味 meaningful であるとは、言明の真偽が任意の許容される変換によって変化しないことである。

Definition (一意性問題 Uniqueness Problem)

最も一般性の高い許容される変換を特定すること。

代表的な尺度 Scale の種類

尺度のタイプ	許容される変換	例
絶対 absolute	$\phi(x) = x$ 恒等 identity 変換	個数
比率 ratio	$\phi(x) = \alpha x, \alpha > 0$ 相似 similarity 変換	質量, 時間, 絶対温度
間隔 interval	$\phi(x) = \alpha x + \beta, \alpha > 0$ 正のアフィン affine 変換	基数効用 cardinal utility, 時刻, セ氏温度
順序 ordinal	単調増加変換 monotone increasing	序数効用 ordinal utility
名目 nominal	一対一対応 one to one	番号（順不同の場合）

Outline

関係 Relation

Definition (関係)

集合 $A_1, \ldots, A_n$ 上の関係 R とは、$R \subset \times_{i=1}^{n} A_i$

Definition (二項関係 Binary Relation)

集合 A 上の二項関係とは $R \subset A^2$
$(x, y) \in R$ のとき、xRy とも表記し、「x と y は R で関係づけられている」と読む。

二項関係の表現 representation:

- 二次元平面上のグラフ
- 有向グラフ directed graph の隣接行列 adjacency matrix

代表的な二項関係の性質 [7]

- 反射 reflexive iff $\forall a \in A, aRa$
- 非反射 irreflexive iff $\forall a \in A, \neg(aRa)$
- 対称 symmetric iff $\forall a, b \in A, aRb \Rightarrow bRa$
- 非対称 asymmetric iff $\forall a, b \in A, \neg(aRb \wedge bRa)$
- 反対称 antisymmetric iff $\forall a, b \in A, (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$
- 推移 transitive iff $\forall a, b, c \in A, (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$
- 完備（連結） complete (connected) iff $\forall a, b \in A, aRb \vee bRa$

二項関係の実例

Example

A を人の集合としよう。

- $a \in A$ が $b \in A$ のことを「好きだ」というのは、A 上の二項関係。「好き」は対称律を満たさない。e.g. 片思い
- A 上の二項関係である「友達」関係は、対称律は満たす（というふうにも定義可能だ）が、推移律は満たさない。

Q. 一夫一妻制や一夫多妻制を関係として表現して、性質を調べてみよう！

二項関係の実例 – 同値関係

Definition (同値関係 Equivalence Relation)

集合 A 上の二項関係 $\equiv$ が同値関係である iff
$\equiv$ が反射、対称、推移を満たす。

Example

等号関係 "$=$" も同値関係の一種

二項関係の実例 – 順序関係

Definition (半順序 Partial Order)

集合 A 上の二項関係 $\geq$ が半順序関係である iff
$\geq$ が反射、反対称、推移を満たす。

Definition (全順序（線形順序）Total Order (Linear Order))

完備な半順序関係を全順序（線形順序）という。

Example (実数の集合 $\Re$ 上の順序)

実数の集合 $\Re$ 上の通常の順序 $\geq$ は全順序

様々な半順序関係に同一の記号 $\geq$ を用いるので注意。

半順序の例 – パレート順序

数理経済学におけるベクトル記号

$$x := (x_i)_{i \in N} = (x_1, \ldots, x_n) \in X = \times_{i \in N} X_i$$

Definition (パレート順序 Pareto Order)

$\Re^N$ 上の二項関係 $\geq$ がパレート順序である iff $\forall x, y \in \Re^N$

$$x \geq y \Leftrightarrow \forall i \in N, x_i \geq y_i$$

同様に、$\Re^N$ 上の順序関係として以下の記号を用いる：

- $x > y \Leftrightarrow x \geq y \wedge x \neq y$
- $x \gg y \Leftrightarrow \forall i \in N, x_i > y_i$

Q. パレート順序 $\geq$ が半順序関係であることを証明せよ。

パレート効率性 Pareto Efficiency

半順序関係においては、最大元が存在しないことが多い。代わりに、極大元について考えることが便利なことが多い。
パレート順序の極大元はパレート効率的であるという。

Definition (パレート効率)

$x \in S \subset \Re^N$ が

(弱 weakly) パレート効率的 iff $\neg \exists y \in S, y \gg x$

強 strongly パレート効率的 iff $\neg \exists y \in S, y > x$

合理的選好 Rational Preference

「a が b 以上に好ましい」という 選好関係 *preference relation* を $a \succsim b$ で表す。
選好関係が（経済学用語で）合理的 rational であるとき、弱順序 weak order の公理を満たす。

Definition (弱順序 Weak Order)

二項関係 $\succsim$ on A が弱順序である iff $\succsim$ が完備性と推移律を満たす。

記号の違いに注意！

半順序 $\geq$
弱順序 $\succsim$

専門用語としての合理性

- 好みが安定的 stable である
- 好みが内部整合性 internal consistency を満たす（導かれる選択が整合的である）
- 好みは意思決定主体の個性（社会正義、倫理、美　などの外的価値に一般には制約されない）
- 合理性 $\neq$ 知性　（意思決定問題が簡単であれば、簡単に解ける）

弱順序関係の成分分解

Definition (弱順序関係の成分分解)

強成分 Strict component $a \succ b \Leftrightarrow a \succsim b \wedge \neg(b \succsim a)$

無差別成分 Indifference component $x \sim y \Leftrightarrow a \succsim b \wedge b \succsim a$

Proposition

$\succsim$ が合理的ならば：

- $\succ \cup \sim = \succsim \wedge \succ \cap \sim = \emptyset$
- $\succ$ は非反射的、非対称的で推移的
- $\sim$ は同値関係
- $\forall x, y, z \in X[x \succ y \sim z \Rightarrow x \succ z]$

選好が合理性を満たさない場合に考えられる原因：

- そもそも完備な評価が不要 – e.g. 圧倒的なナンバーワンの存在により、ナンバー2 以下の選択肢どうしの比較が不要
- そもそもランキングが困難 – e.g. パレート社会配分 allocation の評価
- グループの擬人化（e.g. 法人格 corporate actor）
- 区別できないほどの微少な差（限定合理性の一種）[12]
- フレーミング効果 framing effect [17]
- 不完備情報などによる意図せざる好みの変化（e.g. 中毒 addiction）[2]

法人格の合理性 – 集団意思決定による社会的選好

Q. 多数決 majority voting は合理的な集団意思決定手法か？

法人格の合理性 – 集団意思決定による社会的選好

Q. 多数決 majority voting は合理的な集団意思決定手法か？

Example (コンドルセのパラドックス Condorcet's Paradox)

３人の投票者 $\{1,2,3\}$ がそれぞれ以下で表される選好 $\succsim_i$ $(i=1,2,3)$ を $A=\{a,b,c\}$ 上に持つとする。

1. $a \succ_1 b \succ_1 c$
2. $b \succ_2 c \succ_2 a$
3. $c \succ_3 a \succ_3 b$

多数決によって決まる「社会的選好 social preference」を $\succsim$ とおくと

$$a \succ b \text{ かつ } b \succ c \text{ かつ } c \succ a$$

よって、$\succsim$ は推移律を満たさない。

社会的選択理論とアローArrow の定理

Condorcet のパラドックスを一般化して、Arrow は（極めて自然な前提より）「合理的、パレート効率的かつ民主的 democratic な投票制度は存在しない（唯一のパレート効率的な合理的な投票制度は独裁制 dictatorship である）」ことを証明した。（ノーベル経済学賞受賞理由の一部）
興味ある人は、以下のキーワードを手がかりに自分で調べてみよう！:

- 社会的選択理論 social choice theory
- 社会厚生関数 social welfare function
- アローの定理 Arrow's theorem[1]

序数効用 Ordinal Utility と表現 Representation

Definition (表現 Representation)

序数効用関数 $u : A \to \Re$ が選好関係 $\succsim$ on A を表現する iff $\forall x, y \in A$

$$x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Example

$A = \{x, y, z\}$ とする。$x \succ y \succ z$ ならば、効用関数 $u : A \to \Re$ を $u(x) = 3, u(y) = 2, u(z) = 1$ と定めれば、u は、$\succsim$ を表現する。

序数効用と単調変換

一つの選好関係 $\succsim$ を表現する序数効用は、一意的には定まらない。

Proposition

効用関数 u が選好関係 $\succsim$ を表現する $\Rightarrow$
$\forall \sigma : \Re \to \Re$ 単調増加 *monotone increasing* 関数, $\sigma \circ u$ は $\succsim$ を表現する。

Example (先の例の続き)

$\sigma(a) = a^2$ と定めると、$\sigma \circ u(x) = 9, \sigma \circ u(y) = 4, \sigma \circ u(z) = 1$ となり、確かに、$\succsim$ を表現している。

このことからも分かるように、u は順序関係のみの情報を持ち、定量的な大きさは意味を持たない。また、四則演算も使えない。

表現可能性

Theorem (表現可能性)

選好関係が合理的であるときのみ、序数効用関数で表現可能である。

Proposition

選択肢集合 X が有限ならば、すべての合理的な選好関係は序数効用関数によって表現可能である。

Q. これを証明してみよう！

選択肢空間が連続の場合の表現可能性

連続な選択肢空間上では、全ての合理的な選好関係が序数効用によって表現可能というわけではない。

Definition (連続性 Continuity)

X 上の二項関係 R が連続である iff upper contour set $\{x \in X | xRy\}$ と lower contour set $\{x \in X | yRx\}$ がともに閉集合である

Proposition

すべての連続で合理的な選好関係は、連続な効用関数で表現可能である。

Example (辞書式順序)

$[0,1] \times [0,1]$ 上の辞書式順序で表される選好関係を表現する序数効用関数は存在しない。

Outline

意思決定分析と基数 Cardinal 効用

復習

意思決定分析のプロトタイプ (A, Ω, p, u) が与えられたとき、選択肢 $a \in A$ の評価値は期待効用

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u(a, \omega)$$

選択肢の評価には、u に対して確率による重みつき足し算という演算を施している。よって、意思決定分析においては u の決め方としては、序数効用では不十分。

基数効用を「理論的に」定める [18]

Q. 意思決定分析で期待効用の関数型が使えるような基数効用の数値にはどのような性質があるか？

くじ Lottery

Definition (有限くじ Finite Lottery)

有限の結果 consequence の集合上 C で定義されるくじの空間は、

$$P = \Delta(C) = \{p : C \to \Re | (\forall c \in C, p(c) \geq 0) \wedge \sum_{c \in C} p(c) = 1\}$$

すなわち、C 上の確率分布 probability distribution の集合。

vNM 効用の標準的な定め方 (Elicitation)

1. 結果のうち最も望ましいもの $c_{\max}$ と最も望ましくないもの $c_{\min}$ ($c_{\max} \succ c_{\min}$) に、適当に数値を割り当てる
   $u(c_{\max}) := u_{\max}, u(c_{\min}) := u_{\min}$ $(u_{\max} > u_{\min})$[1]
2. $c \in C$ と $c_{\max}$, $c_{\min}$ のみを混ぜたくじ、すなわち $\alpha c_{\max} + (1-\alpha)c_{\min} \in P(\alpha \in [0,1])$ を α を動かしながら比較し、

$$c \sim \alpha_c c_{\max} + (1-\alpha_c)c_{\min}$$

   を満たす α_c を求める
   $u(c) := \alpha_c u_{\max} + (1-\alpha_c)u_{\min}$

[1] $c_{\max}$ と $c_{\min}$ が、いわば線形代数 linear algebra における基底 base のような役割を果たす。もし、結果の集合の評価が２状態しかなかったら、序数効用と vNM 効用の決め方に差異はない。

vNM 効用の公理

Elicitation によって定められた効用が評価値として意味を持つ（内部整合性 internal consistency を満たす）ためには、選好に序数効用の時よりも強い条件が必要。

Definition (vNM 効用の公理 Axioms)

有限くじ空間 P 上の選好 $\succsim$ について、以下の三つの公理を仮定する：

合理性 Rationality

独立性 Independence $\forall p, q, r \in P, \forall \mu \in (0,1)$

$$p \succ q \Rightarrow \mu p + (1-\mu)r \succ \mu q + (1-\mu)r$$

連続性 Continuity $\forall p, q, r \in P, \exists \alpha, \beta \in (0,1)$

$$p \succ q \succ r \Rightarrow \alpha p + (1-\alpha)r \succ q \succ \beta p + (1-\beta)r$$

期待効用定理 [18]

Theorem (期待効用定理 Expected Utility Theorem)

有限くじの空間 $P = \Delta(C)$ 上の二項関係 $\succsim$ が *vNM* 効用の公理を満たす
$\Leftrightarrow$ ある関数 $u : \Omega \to \Re$ が存在して、$\forall p, q \in P$

$$p \succ q \Leftrightarrow \sum_{c \in C} p(c)u(c) > \sum_{c \in C} q(c)u(c)$$

しかも、この関数 u は、正のアフィン変換 *positive affine transformation* を除いて一意 *unique* である。

この定理における一意性は、くじ空間上の順序を保存する尺度の取り方がこの関数型のみということを主張するものではない。

vNM 効用と好みの「強さ」

- 本節冒頭の問題設定で述べたとおり、vNM 効用の尺度としての定義は好みの「定量的強さ」を測定する目的で定義されたわけではない[2]。
- 「好みの強さ」を定量的に測定する尺度（これを価値観数 value function という）を定義する意義・測定の仕方を議論した論文も存在する。[3]
- Keller[6] は vNM 効用関数と価値関数が一致しないことを確かめた。

理論的尺度と直感

価値関数のように直感的に定量的な好みの強さをそのまま反映した結果の評価値の決め方をすると、一般にはくじの評価については期待効用という関数型を適用することができなくなることに注意。

[2]相関がないというわけではない。

主観的期待効用 [13]

- vNM 期待効用では、確率は所与とする。確率も本質的には主観的に定まるとする立場を主観確率 subjective probability という。
- 主観確率と基数効用を同時に決める決め方を特徴付ける理論を主観的期待効用理論 subjective expected utility (SEU) theory という。

Outline

効用と意思決定主体の主体性

科学理論というと、自然科学においては通常は客観性を要求するだろう。意思決定分析やゲーム理論における効用は、あくまでも意思決定主体の主観的 subjective 評価。

効用と主体性

君にとっての効用は他者が決めるものではない！君が決める評価値だ！

世の中には、お金のように、いかにも客観的に価値を定めたような数値が溢れているから、気をつけよう !!! こうした数値がそのまま君にとっての効用となる必要はない。

Q. 発展課題

国内総生産 GDP (Gross Domestic Products) が国の豊かさの指標として相応しいかどうか考えてみよう！

「お金」の効用 [7]

金銭的報酬・損失の集合を線形順序で順序付けられた連続集合 Z とする。それを用いて、効用関数 $u : Z \to \Re$ の性質を議論する。
よほどお金が嫌いでない人でない限りは、金銭的報酬が大きい方を好むだろう。このことを反映したのが次の命題。
報酬 $z \in Z$ を確率 1 で受け取るくじを δ_z と書く（物理学などで登場するデルタ関数）。

Proposition

u は狭義単調増加関数 *strictly increasing function* である。
$\Leftrightarrow \forall z, z' \in Z[z > z' \Leftrightarrow \delta_z \succ \delta_{z'}]$

リスク態度

人や状況によって異なるかもしれないのは次の性質。
期待値の報酬 $e(p) = \sum_{z \in Z} p(z)z$ とすると、

Definition (リスク態度 Risk Attitude)

Z 上の任意のくじ p について：
リスク回避的 risk-averse $\delta_{e(p)} \succsim p$
リスク追求的 risk-seeking $p \succsim \delta_{e(p)}$
リスク中立的 risk-neutral $\delta_{e(p)} \sim p$
という。

通常の経済モデルや金融工学では、軒並み意思決定主体はリスク回避的であるとみなす。
Q. ギャンブルでは、人はリスク追求的に見えるが、これはどのように説明できるか？

リスク態度の性質

Proposition

金銭上の選好が

- リスク回避的（狭義リスク回避的） *iff* u が凹関数（狭義凹関数）
- リスク追求的（狭義リスク追求的） *iff* u が凸関数（狭義凸関数）
- リスク中立的 *iff* u がアフィン関数 $(u(z) = az + b)$

お金の単位によらないリスク態度の定量的指標として以下の指標がある。

Definition (リスク回避度 Arrow-Pratt Measure of (Absolute) Risk Aversion)

$$\lambda(z) := -u''(z)/u'(z)$$

リスク回避度が一定の関数

Proposition

u のリスク回避度が一定である *iff* $\exists a > 0, b$

$$u(z) = \begin{cases} az + b & \text{if } \lambda(z) \equiv 0, \\ -ae^{-\lambda z} + b & \text{if } \lambda(z) \equiv \lambda > 0. \end{cases}$$

特に、$\lambda > 0$ のとき、u が $z \to \infty$ で b に収束することに注意。

小論文課題候補

これまでの議論をふまえ、

お金で買えないものがある。
There are some things money can't buy.

という言明について議論してみよう。

リスクの評価

Definition (確実同値額 Certainty Equivalent)

くじ p の確実同値額の集合とは

$$C(p) = \{z \in Z | \delta_z \sim p\}$$

u が狭義単調増加のとき、確実同値額が高々唯一定まり、それを $c(p) \in C(p)$ と書く。

Definition (リスクプレミアム Risk Premium)

$$rp(p) := e(p) - c(p)$$

リスクプレミアムは、意思決定主体がくじ p を $\delta_{e(p)}$ と交換する（つまり、分散をゼロにする）ために払う用意のある金額。
リスク回避的な主体においては、リスクプレミアムは非負となる。

ポートフォリオ超入門

- 相関の小さな複数のくじを組み合わせることによって、全体のくじのサンプル期待値の分散を抑えることができる。
  - cf) 大数の法則 law of large numbers、中心極限定理 central limit theorem
  - リーマン・ショックなどの世界的に一様な不確実性
- 平均・分散モデル Mean-Variance Model ＝ （ある数理的条件のもとでは）確実同値額

vNM 効用と平均・分散モデル

- vNM 効用では基底の効用値を重みづけたくじの期待値によって確実報酬の評価値を表現するが、
- 平均・分散モデルにおいては、確実報酬が評価数値の基準となる。(期待効用という関数型への理論的こだわりはない)

理論的・実用的目的に応じて柔軟に尺度設計を行うのが良い [19]。

Outline

観測不可能な深層構造の科学論

Q. 他者の心（はたまた、心理学では自分の心も！）や原子は、直接には観測不可能 unobservable。そうした観測不可能な対象はどのように議論するべきか？

観測不可能な対象を扱うモデルに対する科学哲学的立場

- 実用主義 pragmatism (道具主義 instrumentalism)
- 構成的経験論 constructive empiricism
- 科学的実在論 scientific realism

Example (歴史的事例 (1953))

- 経済学における実用主義 (M. Friedman[4])
- 心理学における行動主義 behaviorism (Skinner[16])

顕示選好理論 Revealed Preference Theory[10, 5, 15]

行動主義的に、選択行動のみをデータとして、

- 意思決定主体（他者）の選択行動に顕示される選好を探る
- 意思決定主体が合理的選択を行なっているか（選択が効用最大化の結果であると解釈できるか）を判定

選択構造 Choice Structure

顕示選好理論で必要とされる選択行動のデータは、以下の選択構造により表現される。

Definition (選択構造 Choice Structure)

選択構造は、$(\mathscr{B}, C)$ で与えられる：

- $\mathscr{B}$ 選択肢集合 A 上の非空部分集合（＝予算集合 budget set）の族
  - 社会制度や物理的制約などによって定まる可能な選択肢の集合をもれなく列挙したもの
  - 非空部分集合全てを含む必要はない。(e.g. 消費選択理論)
- $C : \mathscr{B} \to \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ 選択関数 choice correspondence
  $\forall B \in \mathscr{B} : C(B) \subset B$
  - $C(B)$ は（最適な選択肢が複数個ある場合を考慮し）一般には複数の選択肢を含むことができる。

誘導 Generating と合理化 Rationalizing

予算集合 B 上でもっとも好まれる選択肢の集合を $C^*(B, \succsim) = \{x \in B | \forall y \in B : x \succsim y\}$ と書く。

Proposition (誘導 Generating)

合理的選好 $\succsim$ は選択構造 $(\mathscr{B}, C^*(\cdot, \succsim))$ を導く。

逆に、選択構造 $(\mathscr{B}, C)$ を所与として、$\forall B \in \mathscr{B}, C^*(B, \succsim) = C(B)$ となるような合理的選好 $\succsim$ を見つけることを合理化 rationalize という。

顕示選好 Revealed Preference と合理的選好

Definition (Sen の性質 α （無関係代替案からの独立性））

$\forall A, B \in \mathscr{B}, B \subset A, \forall x \in B,$

$$x \in c(A) \Rightarrow x \in c(B)$$

Definition (Sen の性質 β)

$\forall A, B \in \mathscr{B}, A \subset B, \forall x, y \in c(A),$

$$y \in c(B) \Rightarrow x \in c(B)$$

Theorem

選択構造 $(\mathscr{B}, C^*(\cdot, \succsim))$ （$\forall B \in \mathscr{B}$ が３つ以上の選択肢を含む）が *Sen* の性質 α, β をともに満たす $\Rightarrow$
合理的選好 $\succsim$ が（唯一）存在し、選択構造 $(\mathscr{B}, C^*(\cdot, \succsim))$ を導く。

不完全な選択データとそれを合理化する選好

- 実際に、研究者のような他者がある意思決定主体の選択行動を調べれる際には、選択構造上のすべての予算集合からの選択行動がデータとして揃っているとは限らない。この場合、先の顕示選好理論の定理は適用できない。
- 通常は、このようなとき、選択行動が合理的選択によると暫定的に仮定して分析を進める。
  反例が見つかるまで仮定が正しいと暫定的にみなす考え方を反証主義 falsificationism[9] という。
- 「合理的選択による」という仮説は、他にも考えられる仮説と並んで一候補に過ぎないが、通常の科学はこのように特定の仮説をかなり無条件に作業仮説 working hypothesis とする。こうした科学のあり方をパラダイム paradigm[8] という。

パラダイム思考の実例

Example (立食パーティーにおける寿司からの選択)

テーブルに残っている寿司を予算集合 B とする。i さんは、

- B にトロが二貫以上残っている場合はトロを選び、
- B にトロが一貫しか残っていない場合はかっぱ巻きを選ぶ。

Q. i さんの選択行動を合理化せよ。

パラダイム思考の実例

Example (立食パーティーにおける寿司からの選択)

テーブルに残っている寿司を予算集合 B とする。i さんは、

- B にトロが二貫以上残っている場合はトロを選び、
- B にトロが一貫しか残っていない場合はかっぱ巻きを選ぶ。

Q. i さんの選択行動を合理化せよ。

Example (Ans. 一つの可能な場合)

i さんは上司 j と一緒に立食パーティーに参加している。実は i さんにとっての選択肢は (x_i, x_j) という配分ベクトルであり、選好もこの二次元空間上に定義される。トロが一貫しか残っていない場合は、トロを上司に譲り、トロが二貫以上残っている場合は、上司と自分に 1 つずつ配分する。

顕示選好と認知フレーム

我々はモノ thingを選択しているのではなくて、コト event を選択している [14]。
どういうコトを選択しているのかというのは、一意的に定まるわけではなく、意思決定主体の認知フレームによる。

Example (寿司の選択)

厳密には、i さんにとっての予算集合は、
$B = \{ (x_i, x_j) \mid$ テーブル上の寿司で可能な配分 $\}$
であり、とりわけ自分の配分には「食べない」という配分も含まれる。

どういうコトを選択しているのかが特定できない限り顕示選好の考え方は適用できない。

Kenneth J. Arrow.
Social choice and individual values.
Yale University Press, 1951.

Gary S. Becker and Kevin M. Murphy.
A theory of rational addiction.
Journal of Political Economy, 96(4):675–700, 08 1988.

Peter Farquhar and L. Robin Keller.
Preference intensity measurement.
Annals of Operations Research, 19:205–217, 1989.
10.1007/BF02283521.

Milton Friedman.
The Methodology of Positive Economics, pages 3–43.
University of Chicago Press, Chicago, 1953.

Hendrik S. Houthakker.
Revealed preference and utility function.
Economica, 17(66):159–174, 1950.

L. Robin Keller.
An empirical investigation of relative risk aversion.
IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, SMC-15:475–482, 1985.

David Kreps.
Notes on the Theory of Choice.
Underground Classics in Economics. Westview Press, Oxford, 1988.

Thomas Kuhn.
The Structure of Scientific Revolutions.
Chicago University Press, Chicago, 3 edition, 1996.

Karl Popper.
The Logic of Scientific Discovery.
Hutchinson, London, 1959.

Marcel K. Richter.
Revealed preference theory.
Econometrica, 34(3):635–45, 1966.

Fred S. Roberts.
Measurement theory with applications to decision making, utility, and the social sciences, volume 7 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.*
Cambridge University Press, New York, 1985.

Ariel Rubinstein.
Modeling Bounded Rationality.
MIT Press, Cambridge, 1997.

Leonard J. Savage.
The Foundations of Statistics.
John Wiley & Sons, New York, 1 edition, 1954.

Amartya Sen.
Maximization and act of choice.
Econometrica, 65:745–779, 1997.

Amartya K Sen.
Choice functions and revealed preference.
Review of Economic Studies, 38(115):307–17, July 1971.

B.F. Skinner.
Science and human behavior.
Free Press, 1953.

Amos Tversky and Daniel Kahneman.
The framing of decisions and the psychology of choice.
Science, 211(4481):453–458, 1981.

John von Neumann and Oscar Morgenstern.
Theory of Games and Economic Behavior.
Princeton University Press, Princeton, 1 edition, 1944.

小林憲正.
合理的選択パラダイムと心・認識.
オペレーションズ・リサーチ機関誌, 56(10):567–575, 2011.

本川達雄.
ゾウの時間ネズミの時間.
中公新書, 1992.