

限界効用逓減の法則と UPS

No.

()

[目的] 限界効用逓減の法則を満たすモデルを被数考え、その UPS を図示すること、限界効用逓減の法則と UPS の関係について考察する。

[手順] 1) 限界効用逓減の法則を満たす共通の事象について異なるモデル化をして、式の条件を求めた。

2) それぞれの関数について横軸 x_1 、縦軸 x_2 の UPS のグラフを作成した。

[結果] 1) 共通の事象として、授業で扱った 10% の分配を用いた。

$$\begin{array}{ll} \text{10\% の入札} & B > 0 \\ \text{プレイヤー-1 の 10\% を得る量} & x_1 \geq 0 \\ \text{プレイヤー-2 の 10\% を得る量} & x_2 \geq 0 \\ \text{プレイヤー-1 の 10\% の好まし} & \alpha_1 > 0 \\ \text{プレイヤー-2 の 10\% の好まし} & \alpha_2 > 0 \end{array}$$

とすると、

$$0 \leq x_1 + x_2 \leq B$$

である。ここで、プレイヤー-1 の効用 $u_1(x_1)$ 、プレイヤー-2 の効用 $u_2(x_2)$ について考えた。

(i) u_i が x_i の平方根に比例するとき、

$$\begin{cases} u_1(x_1) = \alpha_1 \sqrt{x_1} \\ u_2(x_2) = \alpha_2 \sqrt{x_2} \end{cases}$$

と表すことができる。これは、限界効用逓減の法則を満たす。

(ii) プレイヤー- i が x を食べたときに、感じる効用を $\frac{\alpha_i}{x}$ で表せるとき、

$0 < x_0$ とすると、

$$\begin{cases} u_1(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\alpha_1}{x} dx = \alpha_1 \ln \frac{x_1 + x_0}{x_0} \\ u_2(x_2) = \int_{x_0}^{x_2} \frac{\alpha_2}{x} dx = \alpha_2 \ln \frac{x_2 + x_0}{x_0} \end{cases}$$

と表すことができる。これは、限界効用逓減の法則を満たす。

(iii) プレイヤー- i が x を食べたときに、感じる効用を $\alpha_i e^{-x}$ で表せるとき、

$$\begin{cases} u_1(x_1) = \int_0^{x_1} \alpha_1 e^{-x} dx = \alpha_1 (1 - e^{-x_1}) \\ u_2(x_2) = \int_0^{x_2} \alpha_2 e^{-x} dx = \alpha_2 (1 - e^{-x_2}) \end{cases}$$

と表すことができる。これは、限界効用逓減の法則を満たす。

これから3つの関数の図示を行って。

2) $u_1(x_1)$, $u_2(x_2)$ をそれぞれ u_1 , u_2 と表す。

また、グラフの結果を比較しやすくするため $B=1$, $\alpha_1=2$, $\alpha_2=3$ とおく。

$$(i) \begin{cases} u_1 = \alpha_1 \sqrt{x_1} \\ u_2 = \alpha_2 \sqrt{x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \left(\frac{u_1}{\alpha_1}\right)^2 \\ x_2 = \left(\frac{u_2}{\alpha_2}\right)^2 \end{cases}$$

ここで、 $0 \leq x_1 + x_2 \leq B$ より求める条件は、

$$0 \leq \left(\frac{u_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{\alpha_2}\right)^2 \leq B.$$

$$\therefore 0 \leq \left(\frac{u_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{3}\right)^2 \leq 1.$$

これは図1のように図示できる。ただし境界を含む。

(ii) $x_0=1$ とおく。

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1 \ln \frac{x_1 + x_0}{x_0} \\ u_2 = \alpha_2 \ln \frac{x_2 + x_0}{x_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1 + x_0}{x_0} = e^{\frac{u_1}{\alpha_1}} \\ \frac{x_2 + x_0}{x_0} = e^{\frac{u_2}{\alpha_2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 e^{\frac{u_1}{\alpha_1}} - x_0 \\ x_2 = x_0 e^{\frac{u_2}{\alpha_2}} - x_0 \end{cases}$$

ここで、 $0 \leq x_1 + x_2 \leq B$ より求める条件は、

$$0 \leq x_0 e^{\frac{u_1}{\alpha_1}} + x_0 e^{\frac{u_2}{\alpha_2}} - 2x_0 \leq B.$$

$$\therefore 0 \leq e^{\frac{u_1}{2}} + e^{\frac{u_2}{3}} - 2 \leq 1.$$

$$2 \leq e^{\frac{u_1}{2}} + e^{\frac{u_2}{3}} \leq 3$$

これは図2のように図示できる。ただし境界を含む。

$$(iii) \begin{cases} u_1 = \alpha_1(1 - e^{-x_1}) \\ u_2 = \alpha_2(1 - e^{-x_2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x_1} = 1 - \frac{u_1}{\alpha_1} \\ e^{-x_2} = 1 - \frac{u_2}{\alpha_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\ln \frac{\alpha_1 - u_1}{\alpha_1} \\ x_2 = -\ln \frac{\alpha_2 - u_2}{\alpha_2} \end{cases}$$

ここで、 $0 \leq x_1 + x_2 \leq B$ より求める条件は

$$0 \leq -\ln \frac{\alpha_1 - u_1}{\alpha_1} - \ln \frac{\alpha_2 - u_2}{\alpha_2} \leq B.$$

$$\therefore 0 \leq -\ln \frac{2 - u_1}{2} - \ln \frac{3 - u_2}{3} \leq 1.$$

これは図3のように図示できる。ただし境界を含む。

[考察] まず、限界効用逓減の法則を満たす関数の作り方にについて考える。この法則を満たす関数は単調増加で変数を正の無限大に近づけたときに一定値に近づけばよい。したがって、上に凸の関数か、下に凸で0で定数に収束する関数を定数から引けばよいから、

$$y = a(bx)^c \quad (c > 0, b > 0, 0 < c < 1)$$

$$y = a \log_b(cx+1) \quad (a > 0, b > 1, c > 0 \text{ または } a < 0, 0 < b < 1, c > 0)$$

$$y = a(1 - e^{bx}) \quad (a > 0, b < 0)$$

$$y = a[1 - (1+x)^b] \quad (a > 0, b < 0)$$

のような関数が限界効用逓減の法則を満たすといえる。

ここで $y = a[1 - (1+x)^b]$ ($a > 0, b < 0$) のグラフで1人の分配のモデル化を考えていたからなのでこの関数を用いてモデル化を行ってみる。

$$\begin{cases} u_1(x_1) = \alpha_1[1 - (1+x_1)^{-1}] \\ u_2(x_2) = \alpha_2[1 - (1+x_2)^{-1}] \end{cases}$$

とモデル化を行い、 $B=1, \alpha_1=2, \alpha_2=3$ とおく。

$$\begin{cases} u_1 = 2[1 - (1+x_1)^{-1}] \\ u_2 = 3[1 - (1+x_2)^{-1}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+x_1)^{-1} = \frac{\alpha_1 - u_1}{\alpha_1} \\ (1+x_2)^{-1} = \frac{\alpha_2 - u_2}{\alpha_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{u_1}{u_1 - \alpha_1} \\ x_2 = \frac{u_2}{u_2 - \alpha_2} \end{cases}$$

ここで、 $0 \leq x_1 + x_2 \leq B$ より

$$0 \leq \frac{u_1}{u_1 - 2} + \frac{u_2}{u_2 - 3} \leq B$$

$$\therefore 0 \leq \frac{u_1}{u_1 - 2} + \frac{u_2}{u_2 - 3} \leq 1.$$

また、 $0 \leq u_1 \leq 2, 0 \leq u_2 \leq 3$ より図4のように図示できる。ただし、境界を含む。

図1から図3は全て凸なグラフであり、ほぼ同形である。また、図4も図1から図3とほぼ同形であることがわかる。

したがって、限界効用逓減の法則を満たす効用が2プレイヤー間で分け合うとき、2人の効用を表したUPSの図は凸になるということが示された。

また、これらの結果から $U(x)$ が x に対して線形であるとき、UPSの図が直線になり、 $V(x)$ が x に対して下に凸であるときUPSの図が凹になることが予想できる。これについてもモデル化を考えて考察する。

まず、 $U(x)$ が x に対して線形の場合を考える。

$$\begin{cases} U_1(x_1) = \alpha_1 x_1 \\ U_2(x_2) = \alpha_2 x_2 \end{cases}$$

というモデル化を行うと、

$$\begin{cases} U_1 = \alpha_1 x_1 \\ U_2 = \alpha_2 x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{U_1}{\alpha_1} \\ x_2 = \frac{U_2}{\alpha_2} \end{cases}$$

$$0 \leq x_1 + x_2 \leq B \text{ より}$$

$$0 \leq \frac{U_1}{\alpha_1} + \frac{U_2}{\alpha_2} \leq B$$

$$\therefore 0 \leq \frac{U_1}{2} + \frac{U_2}{3} \leq 1.$$

よって図5のように図示でき、予想に一致する。

次に、

$$\begin{cases} U_1(x_1) = \alpha_1 x_1^2 \\ U_2(x_2) = \alpha_2 x_2^2 \end{cases}$$

とモデル化を行うと、

$$\begin{cases} U_1 = \alpha_1 x_1^2 \\ U_2 = \alpha_2 x_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{U_1}{\alpha_1}} \\ x_2 = \sqrt{\frac{U_2}{\alpha_2}} \end{cases}$$

$$0 \leq x_1 + x_2 \leq B \text{ より}$$

$$0 \leq \sqrt{\frac{U_1}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{U_2}{\alpha_2}} \leq B$$

$$\therefore 0 \leq \sqrt{\frac{U_1}{2}} + \sqrt{\frac{U_2}{3}} \leq 1$$

よって図6のように図示でき、予想に一致する。

したがって、それぞれの効用を表すための関数数が似た性質をもつとき、表せるUPSも似たような性質をもつことが示された。

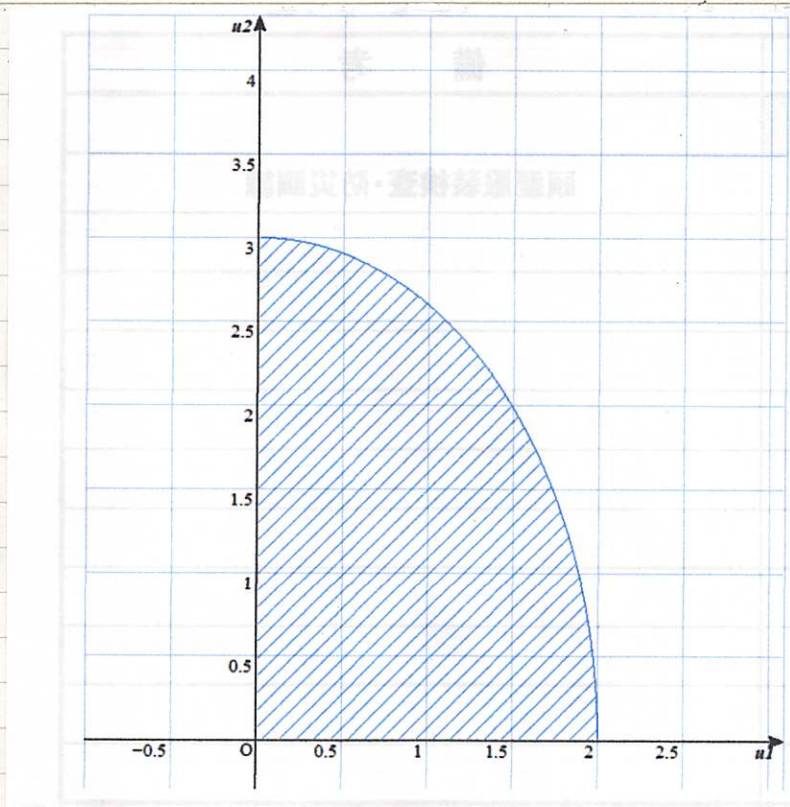


図 1. $u = \alpha \sqrt{x}$ のとき α UPS

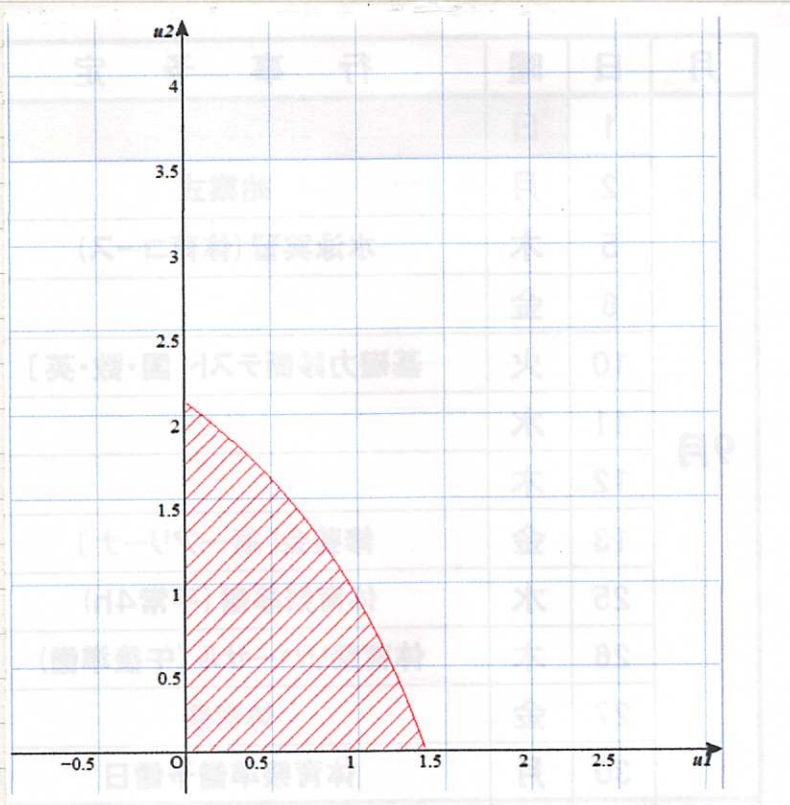


図 2. $u = \alpha \ln \frac{x_1 + x_0}{x_0}$ のとき α UPS

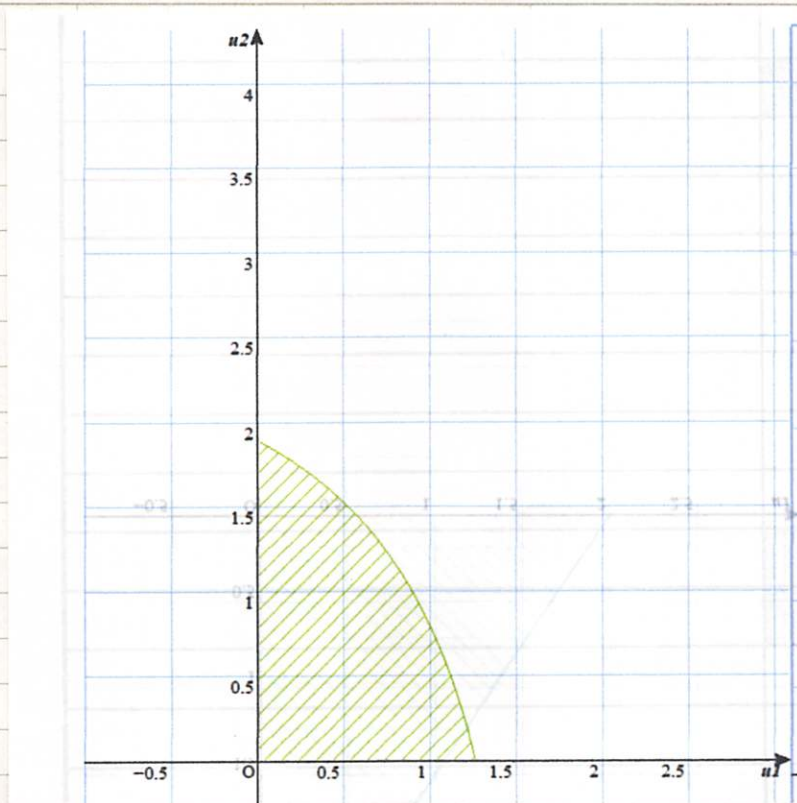


図3. $u = d(1 - e^{-x})$ の $x \geq 0$ の UPS



図4. $u = d[1 - (1+x)^{-1}]$ の $x \geq 0$ の UPS

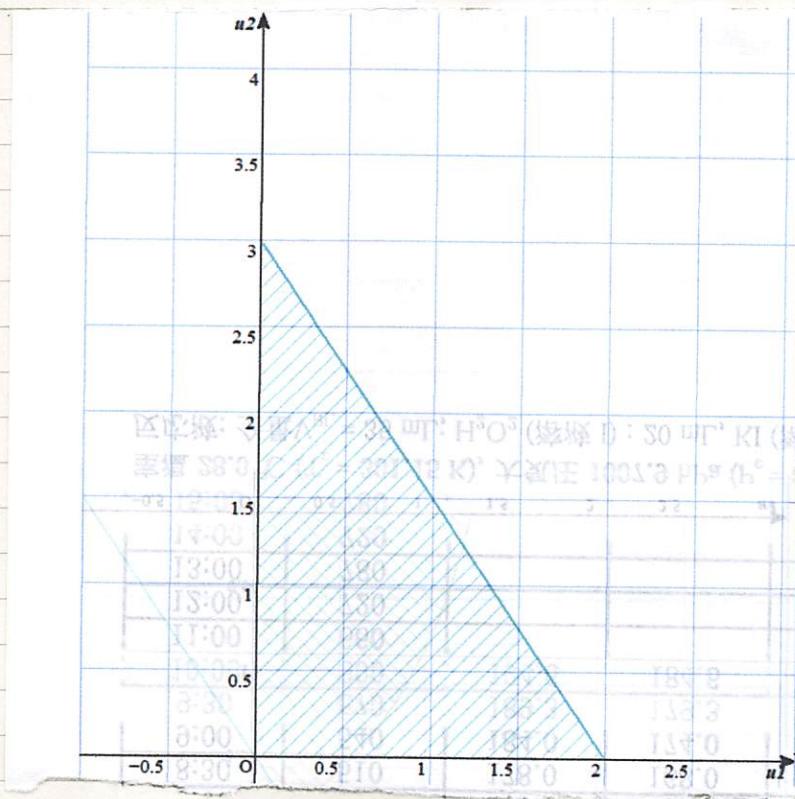


図5. $u = \alpha x \wedge x \neq \alpha$ UPS

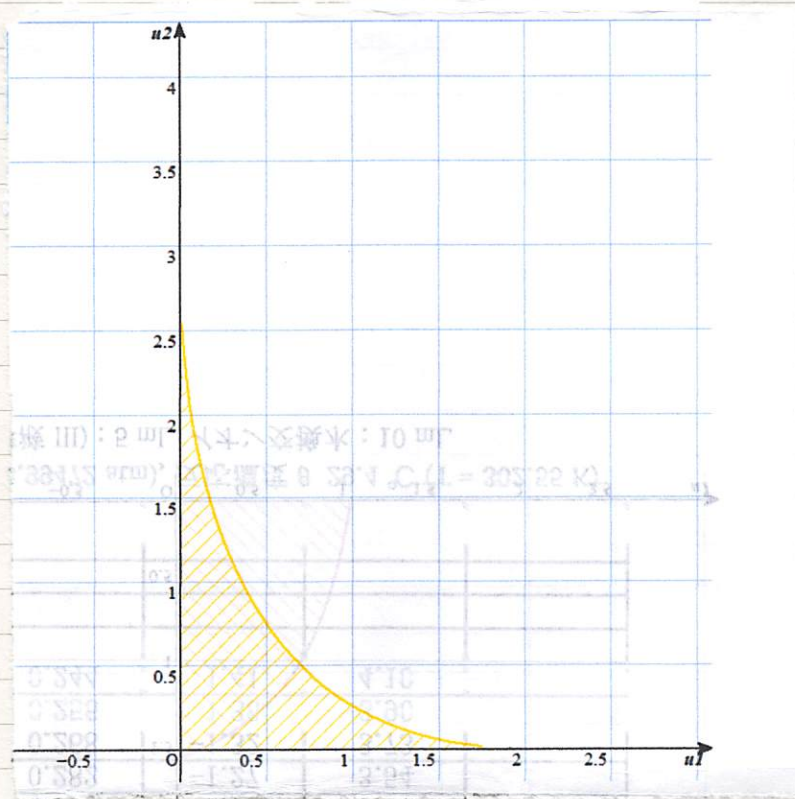


図6. $u = \alpha x^2 \wedge x \neq \alpha$ UPS