Battle of sexes における UPS の図示

講義で紹介された,Battle of sexes における効用可能集合UPSを数学的に求め図示する.

Battle of sexes

$N = \{1 - Woman, 2 - Man\}$

$1 \setminus 2$	M	B
M	4,2	1,1
B	0,0	2,4

プレーヤー1 の混合戦略を$(p, 1-p)$, プレーヤー2 の混合戦略を$(1-q, q)(0 \leq p, q \leq 1)$とすると
プレーヤー1,2 が得られる期待利得$E_1(p,q), E_2(p,q)$はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} E_1(p,q) \\ E_2(p,q) \end{pmatrix} = p(1-q)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + pq\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-p)(1-q)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-p)q\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5pq + 4p + 2q \\ -5pq + 2p + 4q \end{pmatrix}$$

よって効用可能集合UPSは

$$\mathrm{UPS} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) = (-5pq + 4p + 2q, -5pq + 2p + 4q) \ \ s.t. 0 \leq p, q \leq 1\}$$

と表される.

さて,ここでp, qの対称性を考えると,UPS はxy平面において直線$y = x$で対称だから,xy平面における座標が

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるようなベクトル$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$を基底とする$uv$平面($xy$平面を原点を中心に45°負向きに回転させた座標系)を新たに定めると,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2)^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

ゆえにuv平面における効用可能集合UPSは

$$\mathrm{UPS} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| (u,v) = \left(\sqrt{2}(p-q), \sqrt{2}(-5pq + 3p + 3q)\right) \ \ s.t. 0 \leq p, q \leq 1\right\}$$

と表される.

次に$(u,v) = \left(\sqrt{2}(p-q), \sqrt{2}(-5pq + 3p + 3q)\right)$

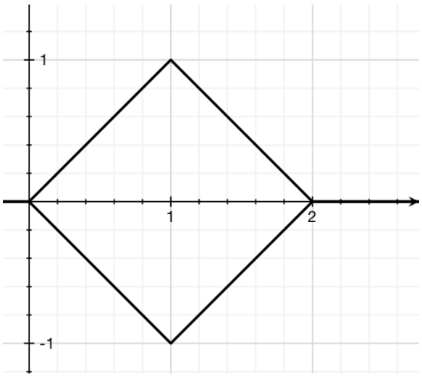
$$= \left(\sqrt{2}(p-q), \sqrt{2}\left(-\frac{5}{4}\{(p+q)^2 - (p-q)^2\} + 3(p+q)\right)\right)$$

と(u,v)が$p+q, p-q$で表されることから,新たに変数s, tを

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + q \\ p - q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos 45° & \sin 45° \\ \sin 45° & -\cos 45° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

と定めると,s, tの領域はp, qの領域 $0 \leq p, q \leq 1$ を直線$y = x \tan \frac{45}{2}°$で対称移動させ,$\sqrt{2}$倍させたものだから,図 1 の正方形の内部になる.

図 1.



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} t \\ -\frac{5}{4}(s^2 - t^2) + 3s \end{pmatrix}$$

ここで効用可能集合UPSの$u = u^*(-\sqrt{2} \leq u^* \leq \sqrt{2})$における$v$の変域を求める.

$1°$ $0 \leq u^* \leq \sqrt{2}$のとき$u = \sqrt{2}t$より $0 \leq t = \frac{u^*}{\sqrt{2}} \leq 1$ となり,図 1 より $\frac{u^*}{\sqrt{2}} \leq s \leq 2 - \frac{u^*}{\sqrt{2}}$. よって

$$v = \sqrt{2}\left\{-\frac{5}{4}(s^2 - t^2) + 3s\right\}$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{5}{4}s^2 + 3s + \frac{5}{8}u^{*2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left\{-\frac{5}{4}\left(s - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{5}{8}u^{*2} + \frac{9}{5}\right\}$$

$f(s) \coloneqq \sqrt{2}\left\{-\frac{5}{4}\left(s - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{5}{8}u^{*2} + \frac{9}{5}\right\} \quad \left(\frac{u^*}{\sqrt{2}} \leq s \leq 2 - \frac{u^*}{\sqrt{2}}\right)$ と定めると

$0 \leq u^* \leq \frac{4\sqrt{2}}{5}$ のとき$f(s)$の極値$s^* = \frac{6}{5}$はsの変域に属するから

$$\min\left\{f\left(\frac{u^*}{\sqrt{2}}\right), f\left(2 - \frac{u^*}{\sqrt{2}}\right)\right\} \leq v \leq f(s^*)$$

$$\min\{3u^*, 2u^* + \sqrt{2}\} \leq v \leq \sqrt{2}\left(\frac{5}{8}u^{*2} + \frac{9}{5}\right)$$

$$\therefore 3u^* \leq v \leq \sqrt{2}\left(\frac{5}{8}u^{*2} + \frac{9}{5}\right) \quad \left(0 \leq u^* \leq \frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$$

$\dfrac{4\sqrt{2}}{5} \leq u^* \leq \sqrt{2}$のとき$f(s)$の極値$s^* = \dfrac{6}{5}$は$s$の変域に属さないので

$$\min\left\{f\left(\frac{u^*}{\sqrt{2}}\right), f\left(2 - \frac{u^*}{\sqrt{2}}\right)\right\} \leq v \leq \max\left\{f\left(\frac{u^*}{\sqrt{2}}\right), f\left(2 - \frac{u^*}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$\min\left\{3u^*, 2u^* + \sqrt{2}\right\} \leq v \leq \max\left\{3u^*, 2u^* + \sqrt{2}\right\}$$

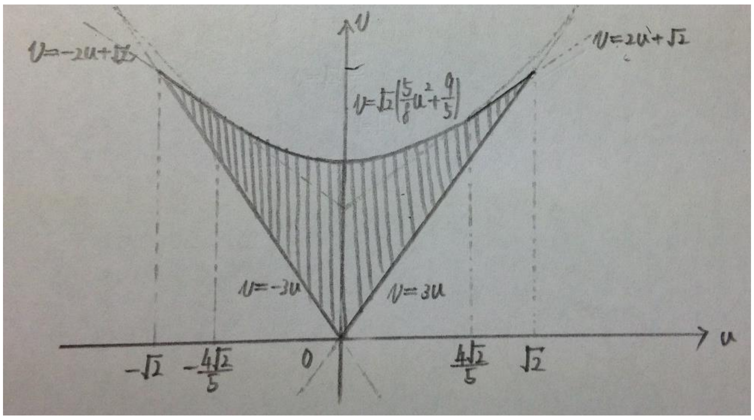
$$\therefore 3u^* \leq v \leq 2u^* + \sqrt{2} \qquad \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} \leq u^* \leq \sqrt{2}\right)$$

2° $-\sqrt{2} \leq u^* \leq 0$ のときu^*を$-u^*$に置き換えかえて 1°の結果を用いれば,

$$-3u^* \leq v \leq \sqrt{2}\left(\frac{5}{8}u^{*2} + \frac{9}{5}\right) \qquad \left(-\frac{4\sqrt{2}}{5} \leq u^* \leq 0\right)$$

$$-3u^* \leq v \leq -2u^* + \sqrt{2} \qquad \left(-\sqrt{2} \leq u^* \leq -\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$$

1°, 2°より効用可能集合UPSをuv平面に図示すると,下図のようになる.



以上より求めるべきxy平面上での効用可能集合UPSは下図のようになる.