混合戦略 Mixed Strategy と相関均衡点 Correlated Equilibrium

– 合理的思考の技術 7 –

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)
Tokyo Institute of Technology

May 19, 2014

復習 – 推測 Conjecture

Example (Matching Pennies 硬貨合わせ)

1 \ 2	Head	Tail
H	-1,1	1,-1
T	1,-1	-1,1

Q. ナッシュ均衡が存在しないことをチェックせよ。
プレーヤー1, 2 の推測を

- $\phi^1 = (q, 1-q) \in \Delta(A_2) \qquad (q \in [0,1])$
- $\phi^2 = (p, 1-p) \in \Delta(A_1) \qquad (p \in [0,1])$

とおくと、

- $Eu_1(H) = qu_1(H,H) + (1-q)u_1(H,T) = 1-2q$
- $Eu_1(T) = qu_1(T,H) + (1-q)u_1(T,T) = 2q-1$
- 同様にして、$Eu_2(H) = 2p-1, \qquad Eu_2(T) = 1-2p$

推測のもとでの最適応答

Example (Matching Pennies cont.)

$Eu(H)=Eu(T)$ の解を $\phi^{1*}=(1-q^*,q^*), \phi^{2*}=(p^*,1-p^*)$ とおくと、$p^*=q^*=1/2$ であり、最適応答は、

$$B_1(\phi^1)=\begin{cases}\{H\} & (q\in[0,q^*))\\ \{H,T\} & (q=q^*)\\ \{T\} & (q\in(q^*,1])\end{cases} \qquad B_2(\phi^2)=\begin{cases}\{T\} & (p\in[0,p^*))\\ \{H,T\} & (p=p^*)\\ \{H\} & (p\in(p^*,1])\end{cases}$$

$$Eu_1(B_1(\phi^1))\begin{cases}=0 & (\phi^1=\phi^{1*})\\ >0 & (\phi^1\neq\phi^{1*})\end{cases} \qquad Eu_2(B_2(\phi^2))\begin{cases}=0 & (\phi^2=\phi^{2*})\\ >0 & (\phi^2\neq\phi^{2*})\end{cases}$$

ゲームの混合拡張 [4]

以上の状況をアクロバティックに解釈しなおし [2]、プレーヤーが自分の行動を確率混合させてプレーしているとして、新たに定義したゲームを元のゲームの混合拡張という。

Definition (混合拡張 Mixed Extension)

標準形ゲーム $G = \langle N, A, u \rangle$ の混合拡張とは、次の標準形ゲーム $\langle N,\ \times_{j\in N}\Delta(A_j),\ U : \times_{j\in N}\Delta(A_j) \to \Re^N \rangle$:

- $\Delta(A_i)$
- $U_i(\alpha) := \sum_{a\in A} \Pi_{j\in N}\alpha_j(a_j) \cdot u_i(a)$ は、くじ $\alpha \in \times_{j\in N}\Delta(A_j)$ の期待効用

混合拡張の戦略を元のゲーム G の立場から見て：

- $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ を $i \in N$ の 混合戦略 mixed strategy
- $a_i \in A_i$ を純粋戦略 pure strategy

という。

混合戦略ナッシュ均衡

Definition (混合戦略ナッシュ均衡)

標準形ゲーム $G = \langle N, A, u \rangle$ の混合戦略ナッシュ均衡とは、G の混合拡張のナッシュ均衡のことである。

Example (Matching Pennies)

Q. $(\phi^{2*}, \phi^{1*}) \in \Delta(A_1) \times \Delta(A_2)$ が混合戦略ナッシュ均衡であることを確かめよ。(ϕ^* の添字の順序に注意!!!)

Example (じゃんけん)

n 人じゃんけんでの唯一の混合戦略ナッシュ均衡は、各プレーヤーがグー、チョキ、パーを当確率で出すプレーの組である。

ナッシュ均衡の存在定理

Theorem (ナッシュ均衡の存在定理 [3])

以下の条件を満たす標準形ゲーム $\langle N, A, u \rangle$ はナッシュ均衡を持つ。
$\forall i \in N$:

- A_i がユークリッド空間 *Euclidean space* の非空 *nonempty* でコンパクト *compact* かつ凸 *convex* な部分集合
- u_i が連続 *continuous* かつ A_i 上で擬凹 *quasi-concave*

Corollary (混合戦略のナッシュ均衡の存在定理)

任意の有限標準形ゲームは混合戦略ナッシュ均衡を持つ。

Example (Matching Pennies)

$$Eu(H) = Eu(T)$$

の解が、$\phi^1 \in \Delta(A_2)$, $\phi^2 \in \Delta(A_1)$ の範囲で存在する。

混合戦略ナッシュ均衡の性質・問題点

混合戦略ナッシュ均衡 α^* においては、他のプレーヤーが α^*_{-i} にしたがってプレーしている限り、正確に α^*_i の確率分布に従ってプレーする強いインセンティブがあるわけではない。

Proposition (サポートの全てが最適応答)

混合戦略の組 $\alpha^* = (\alpha^*_i)_{i \in N} \in \times_{j \in N} \Delta(A_j)$ が混合戦略ナッシュ均衡 $\Leftrightarrow$
$\forall i \in N, \forall a_i \in \text{supp } \alpha^*_i,\ a_i \in B_i(\Pi_{j \neq i} \alpha^*_j)$

Example (Matching Pennies)

$$B_1(\phi^{1*}) = \{H, T\}, \qquad B_2(\phi^{2*}) = \{H, T\}$$

混合戦略の解釈 [4]

- 合理的選択の対象としての混合戦略 ($\rightarrow$ ゼロサム・ゲーム)
- 定常状態としての混合戦略
- 拡張ゲーム extended game における純粋戦略
- 摂動ゲーム perturbed game における純粋戦略
- 推測 conjecture としての混合戦略　（本講義における導入の仕方）

ゼロサム・ゲームと混合戦略ナッシュ均衡

Theorem (復習 – Max-Min theorem)

ナッシュ均衡戦略は *max-min* 戦略でもある。

ゼロサム・ゲームの場合は、max-min 定理により、混合戦略ナッシュ均衡にしたがうプレーは、相手に「読まれない」、「負けない」戦略と特徴づけることができる。（ただし、逆に「勝つ」こともできない　:)

Example (Matching Pennies)

H, T をプレーする確率が混合戦略ナッシュ均衡 (1/2) から外れると、相手がその歪みを利用して、最適応答をとることにより、自分が損をしてしまう。

ゼロサム・ゲームの混合戦略ナッシュ均衡の事例としては、野球の配球やテニスのサービスのプレイスメントが挙げられる。

非ゼロサムゲームの例

Example (Battle of the Sexes)

1 \ 2	Museum	Boxing
M	$4, 2$	$1, 1$
B	$0, 0$	$2, 4$

（今度は、対称性を考慮して）混合戦略を、

- $\alpha_1 (= \phi^2) = (p, 1-p) \in \Delta(A_1) \qquad (p \in [0,1])$
- $\alpha_2 (= \phi^1) = (1-q, q) \in \Delta(A_2) \qquad (q \in [0,1])$

とおくと、混合拡張の利得は、

$$
\begin{aligned}
U(\alpha) &= p(1-q)\ u(M,M) + (1-p)(1-q)\ u(B,M) \\
&\quad + pq\ u(M,B) + (1-p)q\ u(B,B) \\
&= (-5pq + 2p + 4q, -5pq + 2q + 4p)
\end{aligned}
$$

非ゼロサムゲームの混合戦略ナッシュ均衡

Example (Battle of the Sexes cont.)

混合戦略ナッシュ均衡　$\alpha^* \in \Delta(A_1) \times \Delta(A_2)$ では、プレーヤー1, 2 それぞれ、相手の戦略を固定すれば、M, B のどちらを選択しても無差別なので、

$$\begin{array}{rclr} U((1,0),\alpha_2^*) & = & U((0,1),\alpha_2^*) & (Eu_1(M) = Eu_1(B)) \\ U(\alpha_1^*,(1,0)) & = & U(\alpha_1^*,(0,1)) & (Eu_2(M) = Eu_2(B)) \end{array}$$

であり、これを解くと、$\alpha^* = ((4/5, 1/5), (1/5, 4/5))$ となる。このとき、

$$U(\alpha^*) = (8/5, 8/5)$$

$$U(\alpha^*) < u(M,M) = (4,2), \qquad U(\alpha^*) < u(B,B) = (2,4)$$

すなわち、非ゼロサムゲームでは、混合戦略ナッシュ均衡が、純粋戦略のナッシュ均衡にパレート支配されることがある。

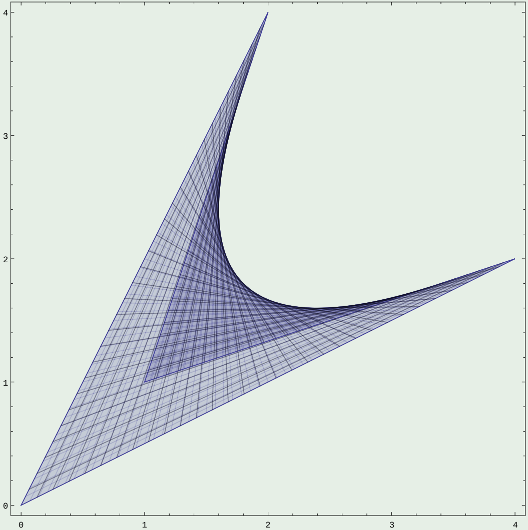
効用可能集合 Utility Possibility Set (UPS)

効用の比較のような厚生経済学的分析には、効用のベクトル空間を図示することが便利であることが多い。ゲームのプレーで達成され得る効用ベクトル空間上の部分集合を効用可能集合 UPS と呼ぶ。

Example (Battle of the Sexes の混合戦略の組の UPS)

$$\begin{aligned} & \{U(\alpha) | \alpha \in \times_{j \in N} \Delta(A_j)\} \\ = \quad & \{(-5pq + 2p + 4q, -5pq + 2q + 4p) | p \in [0,1], q \in [0,1]\} \end{aligned}$$

Example (Battle of the Sexes の混合戦略の組の UPS)



相関均衡点 Correlated Equilibrium[1]

シグナルに応じて行動を決めるプレーの組がナッシュ的安定性を持つとき、このプレーの組とシグナルのセットを相関均衡点という。

Example (Battle of the Sexes)

コイントスによって、

- H が出たら、純粋戦略ナッシュ均衡 (M, M)
- T が出たら、純粋戦略ナッシュ均衡 (B, B)

をプレーするようなプレーの組は相関均衡点。
コインが正しければ (H, T が出る確率が等しい)、達成される期待効用の組は、

$$1/2\ U(M, M) + 1/2\ U(B, B) = (3, 3)$$

混合戦略ナッシュ均衡 α^* と比較すると、

$$U(\alpha^*) = (8/5, 8/5) < (3, 3) = 1/2\ U(M, M) + 1/2\ U(B, B)$$

References

[1] Robert J. Aumann.
Correlated equilibrium as an expression of bayesian rationality.
Econometrica, 55(1):1–18, 1987.

[2] Robert J. Aumann and Adam Brandenburger.
Epistemic conditions for nash equilibrium.
Econometrica, 63(5):1161–80, 1995.

[3] John Nash.
Equilibrium points in n-person games.
In *Proceedings of the National Academy of Sciences*, volume 36, pages 48–49, 1950.

[4] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein.
A Course in Game Theory.
MIT Press, Cambridge, 1994.