

# ナッシュ均衡 Nash Equilibrium

– 合理的思考の技術 Lecture 5 –

小林憲正

Department of Value and Decision Science (VALDES)  
Tokyo Institute of Technology

May 7, 2014

# 他のプレイヤーの推測の立て方をどうするか？

- (支配戦略が存在しないような) 一般の場合には、他のプレイヤーがとる行動に依存して、自分の最適応答は変化する。
- 同様に、他のプレイヤーにとっての最適応答は、一般には自分のとる行動に依存する。

## Q. 他のプレイヤーの行動の推測はどのように行えば良いか？

- 一人意思決定の場合は、データがない場合、不確実性に関する推測  $\phi$  は確率の公理を満たす以外に制限がない。
- ゲームにおける他のプレイヤーの行動の推測  $\phi^i \in \Delta(A_{-i})$  を精度良く行うには、ゲーム自体の情報が結構使えそう。

# 定常状態 Steady State アプローチ [3]

後述するように、社会的に興味深い多くのゲームにおいては、ゲームの唯一の妥当なプレーの仕方を内生的にゲームの情報のみから導出するのは生産的に見えない。

そこで、熱統計物理学などにおける平衡状態 equilibrium state の発想にならい、

## ナッシュ均衡の条件

全てのプレーヤーが

- 他のプレーヤーの行動についての正しい推測 conjecture (期待 expectation) を持ち
- その推測のもとで合理的に行動する

という条件下での定常状態が満たすべき必要条件を数理的に定式化したのがナッシュ均衡であり、今日のゲーム理論の主流になっている。

# ナッシュ均衡 Nash Equilibrium

## Definition (ナッシュ均衡 Nash Equilibrium)

行動の組  $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*) \in A$  がナッシュ均衡である iff

$$\forall i \in N, a_i^* \in B_i(a_{-i}^*)$$

- ナッシュ均衡は、最適応答対応 best response correspondence  $B := \times_{i \in N} B_i : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  の不動点 fixed point である。
- ナッシュ均衡における安定性とは、すべてのプレイヤーが、他のプレイヤーの行動を均衡のまま固定して、単独で逸脱 deviate した時に利得が増えないことである。このような安定性を誘引両立性 incentive compatibility ということもある。

# 注意点

- ナッシュ均衡はゲーム理論における最も基本的な均衡概念であることから、特定なく「均衡 equilibrium」という用語が使われる場合は、ナッシュ均衡を指すことが多い。
- ナッシュ均衡は、しばしばゲームの解 solution と呼ばれるが、後に見るように、全てのゲームに対して唯一定まるわけではないし、社会的に望ましいというわけでもないし、これをプレーするべきと必ず言えるわけでさえない。[4]
- ナッシュ均衡の定義は、その均衡が到達されたプロセスについては問わない。

# ナッシュ均衡の基本性質

- 均衡の複数性 *multiplicity* 一つのゲームに対してナッシュ均衡は複数存在し得る
- 均衡の存在 すべてのゲームに必ずナッシュ均衡が存在するとは限らない
- 非効率性 ナッシュ均衡がパレート効率的になるとは限らない
- 局所最適性 *local optimality* ナッシュ均衡戦略は、あくまでも特定の戦略に対しての最適応答であることしか担保しない

# 複数のナッシュ均衡の例

## Example (チキンゲーム)

	D	H
D	3, 3	1, 4
H	4, 1	0, 0

Figure: 均衡 (D, H)

	D	H
D	3, 3	1, 4
H	4, 1	0, 0

Figure: 均衡 (H, D)

## Example (Battle of the Sexes)

W \ M	美術館 M	ボクシング B
美術館 M	3, 2	1, 1
ボクシング B	0, 0	2, 3

ナッシュ均衡  $(M, M), (B, B)$

# 複数のナッシュ均衡の例 II – 調整ゲーム

## Definition (Game of Pure Coordination)

標準形ゲーム  $\langle N, A, u \rangle$  は純粋調整ゲーム game of pure coordination である iff

$$\forall i, j \in N \forall a, b \in A, u_i(a) \geq u_i(b) \Leftrightarrow u_j(a) \geq u_j(b)$$

## Example (調整ゲームの例 – 交通)

	Left	Right
Left	1, 1	0, 0
Right	0, 0	1, 1

左側通行 (= (Left, Left)) と右側通行 (= (Right, Right)) はともにナッシュ均衡だが、どちらがより尤もらしいかをゲームのみを説明因子 explanan として内生的に説明しようとするのは不自然に見える。

# (純粋戦略の) ナッシュ均衡が存在しない例

## Example (じゃんけんにおける最適応答の動き)

1 / 2	グー	チョキ	パー
グー	0, 0	1, -1	-1, 1
チョキ	-1, 1	0, 0	1, -1
パー	1, -1	-1, 1	0, 0

最適応答対応に不動点が存在しない

# ナッシュ均衡と非効率性

## Proposition

$\forall a^* \in A$ , if  $a^*$  is a dominant strategy equilibrium, then  $a^*$  is a Nash equilibrium.

## Example (囚人のジレンマ)

	C	D
C	3, 3	-1, 5
D	5, -1	1, 1

Figure: パレート非効率的なナッシュ均衡

## Example (鹿狩り Stag Hunt)

	C	D
C	9, 9	0, 8
D	8, 0	7, 7

ナッシュ均衡が複数あるとき、あるナッシュ均衡が別のナッシュ均衡にパレート支配されることもありえる。

# 提携 Coalition による逸脱に関する安定性

ナッシュ均衡より強い安定性概念を要請した解概念として、複数のプレイヤーが同時に逸脱しても利益が得られないことを条件とするものもある [2]。

## Definition (強い均衡 Strong Equilibrium)

$a^* \in A$  が強い均衡である iff

$$\forall S \subset N, \forall i \in S, \forall a_S \in A_S, u_i(a_S, a_{N \setminus S}^*) \leq u_i(a^*)$$

## Example (囚人のジレンマ)

囚人のジレンマの唯一のナッシュ均衡 (D, D) は、強い均衡ではない。つまり、囚人のジレンマには強い均衡は存在しない。

# ナッシュ均衡の解釈 [1]

合理的推論 Rational Inference の帰結 最も古典的な解釈だが、既に説明した事情により、今日では廃れている

予測 Prediction の必要条件 社会科学的予測が**唯一**の戦略の組によって与えられるならば、(その予測を合理的なプレイヤーが知っているとするれば) それがナッシュ均衡であることが、予測が正しいことの**必要**条件 (十分条件でないことに注意!!!)

焦点 Focal Point[5] 人々が思い浮かべる社会状態が安定であるための**必要**条件

独立執行力のある合意 Self-Enforcing Agreement プレー前コミュニケーションにおける拘束力のない合意にプレイヤーが従うための**必要**条件 → チープトーク cheap talk

安定な社会的 Social Convention しばしば、進化ゲームのプレーの収束先としても特徴付けられる

## 他の解概念との関係

既に見たように、支配戦略均衡はナッシュ均衡である。  
game of pure conflict においては、次の定理がよく知られている。

### Theorem (Max-min strategy in games of pure conflict[6])

Let  $G = \langle \{1, 2\}, A, u \rangle$  be a game of pure conflict.

- $\forall (x^*, y^*) \in A$ , if  $(x^*, y^*)$  is a Nash equilibrium of  $G$ , then
  - $x^*$  is a max-min strategy for player 1 and
  - $y^*$  is a max-min strategy for player 2.
- All Nash equilibria of  $G$  yield the same payoffs.  
This unique payoff is called **the value** of the game.

一般には、他の解概念がナッシュ均衡と別の行動を指し示すことがある。

# 正しい予測の必要条件の反例

max-min 戦略は個人の意思決定としては、自然な意思決定手法に見える。しかし、ゲームにおいては、全プレイヤーが max-min 戦略をとるといふ予測は自己破壊的 self defeating となることがある。

## Example (チキンゲーム)

max-min 戦略の組 (D, D) はナッシュ均衡でない。

## 予測に関するプレイヤーの知識

行動意思決定論における多くの実験などのように、予測をプレイヤーが知らないことを前提とすれば、予測がナッシュ均衡であることは、予測が自己破壊的にならないことの必要条件ではない。

# References

- [1] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green.  
*Microeconomic Theory*.  
Oxford University Press, New York, 1995.
- [2] Diego Moreno and John Wooders.  
Coalition-proof equilibrium.  
*Games and Economic Behavior*, 17(1):80 – 112, 1996.
- [3] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein.  
*A Course in Game Theory*.  
MIT Press, Cambridge, 1994.
- [4] Ariel Rubinstein.  
*Economics and Language*.  
Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [5] Thomas Schelling.  
*The Strategy of Conflict*.  
Harvard University Press, Cambridge, 1960.
- [6] John von Neumann and Oscar Morgenstern.  
*Theory of Games and Economic Behavior*.  
Princeton University Press, Princeton, 1 edition, 1944.