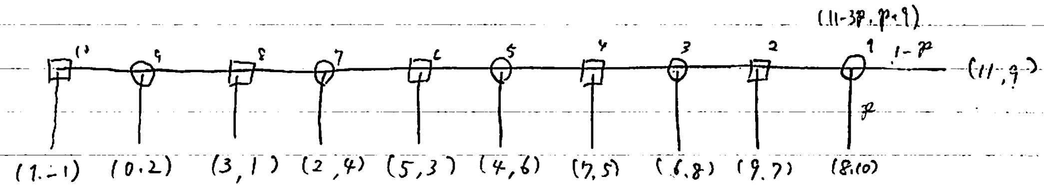
ムカデゲーム の合理的選択

ささ @titechbunnkei

ここでは相手が自然であると仮定し、必ずしも合理的な選択をするとは限らないときの後ろ向き帰納法について考える。まず、相手が合理的な選択をする確率をpとおく。

(i) 自分がプレイヤー1のとき



という決定の木を書ける。

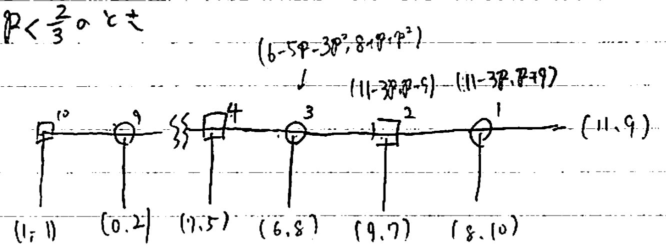
まず ○^{1} では相手が10点取れる S を選択する確率が p, 9点しか取れない C を選択する確率が $1-p$ なので自分の期待効用は $8p+11(1-p)=11-3p$, 相手の期待効用は $10p+9(1-p)=p+9$ である。

次に □^{2} では $11-3p$ と 9 を比較して大きい方を選択する。

$11-3p>9$ のとき $p<\frac{2}{3}$

よって $p<\frac{2}{3}$ のとき C を選択する

(a) $p<\frac{2}{3}$ のとき



$p\geq 0$ より $p+9>8$ なので ○^{3} では C を選択するのが合理的である。

∵ 自分の期待効用… $p(11-3p)+6(1-p)=6+5p-3p^2$

相手の期待効用… $p(p+9)+8(1-p)=8+p+p^2$

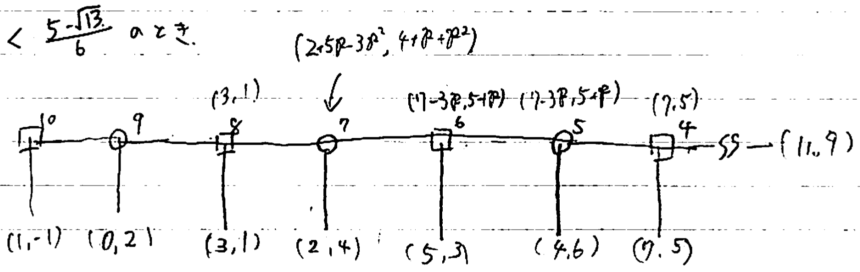
次に □^{4} では $6+5p-3p^2$ と 7 を比較して大きい方を選択する。

$6+5p-3p^2>7$ のとき $\frac{5-\sqrt{13}}{6}<p<\frac{2}{3}$ （∵ $p<\frac{2}{3}$）

よって $\frac{5-\sqrt{13}}{6}<p<\frac{2}{3}$ のとき C を選択する。

り $-\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ $3p^2-5p+1>0$.

(A) $p < \frac{5-\sqrt{13}}{6}$ のとき



○^{5} では S を選択するのが合理的である.

∵ 自分の期待効用… $4p+7(1-p)=7-3p$

相手の期待効用… $6p+5(1-p)=5+p$

$p<\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ より $7-3p>5$ なので □^{6} ではCを選択する

$5+p>4$ (∵ $p\geq 0$) より ○^{7} では Cを選択するのが合理的である。

∵ 自分の期待効用… $(7-3p)\cdot p+2(1-p)=2+5p-3p^2$

相手の期待効用… $(5+p)\cdot p+4(1-p)=4+p+p^2$

次に□^{8} では $2+5p-3p^2$ と3を比較して大きい方を選択する。

ここで $p<\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ より $2+5p-3p^2<3$ なので Sを選択する。

○^{9} では S を選択するのが合理的である

∵ 自分の期待効用… $3(1-p)=3-3p$

相手の期待効用… $2p+(1-p)=1+p$

$p<\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ より $3-3p>1$ なので □^{10} では C を選択する.

$7p^2 - 10p - 2$

$p = \frac{5 \pm \sqrt{25+18}}{9}$　$\frac{5 \pm \sqrt{43}}{9}$

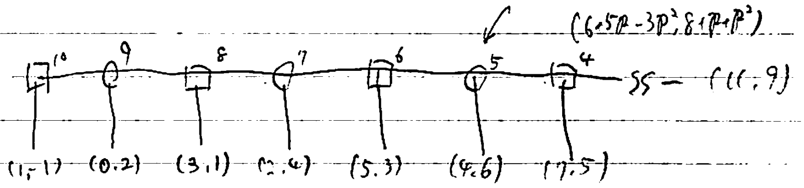
$-3\left(p - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{25}{12} + 6$

3　−5　−2　1
$3p_1$　$3p_1^2 - 5p_1$
3　$3p_1 - 5$
$3p_1^2 - 5p - 2$

No.

(B) $\frac{5-\sqrt{13}}{6} < p < \frac{2}{3}$ のとき

$(4+2p+5p^2-3p^3,\ 6+2p+p^2+p^3)$



$6+5p-3p^2 > 4$ （$\because \frac{5-\sqrt{13}}{6} < p < \frac{2}{3}$）より ○^{5} では C を選択するのが合理的である。

$\therefore$ 自分の期待効用… $(6+5p-3p^2)p + 4(1-p) = 4+2p+5p^2-3p^3$
　相手の期待効用… $(8+p+p^2)p + 6(1-p) = 6+2p+p^2+p^3$

ここで自分の期待効用を $M_5(p)$ とおくと $M_5(p) = 4+2p+5p^2-3p^3$

$$\frac{dM_5(p)}{dp} = 2+10p-9p^2 > 0 \quad \left(\because \frac{5-\sqrt{13}}{6} < p < \frac{2}{3}\right)$$

よって $M_5(p)$ は p に対して単調増加である。

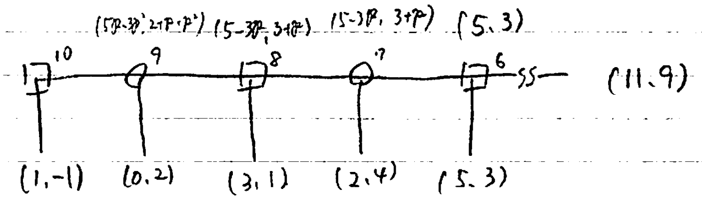
$M_5(p) = 5$ のとき　$4+2p+5p^2-3p^3 = 5$
　　　　　　　　$3p^3 - 5p^2 - 2p + 1 = 0$ …①

①の解の1つを p_1 $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6} < p_1 < \frac{2}{3}\right)$ とおくと、$M_5(p)$ は単調増加より
$\frac{5-\sqrt{13}}{6} < p < p_1$ のとき　$M_5(p) < 5$ … □^{6} で S を選択する。
$p_1 < p < \frac{2}{3}$ のとき　$M_5(p) > 5$ … □^{6} で C を選択する

また $M_5\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{5}{9} - \frac{2}{3} + 1 = -\frac{1}{9}$ より　$p_1 > \frac{1}{3}$

No. (　　)

(I) $\frac{5-\sqrt{13}}{6} < p < p_1$ のとき



$\bigcirc^7$ では S を選択するのが合理的である。

∵ 自分の期待効用… $2p+5(1-p)=5-3p$
　 相手の期待効用… $4p+3(1-p)=3+p$

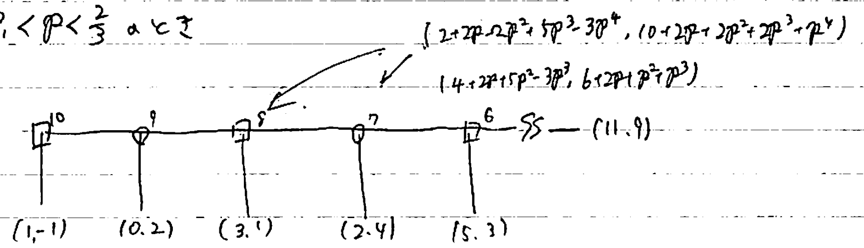
$\frac{5-\sqrt{13}}{6} < p < p_1$ より $5-3p>3$ なので $\square^8$ では C を選択する。

$3+p>2$ $(p \geq 0)$ より $\bigcirc^9$ では C を選択するのが合理的である。

∵ 自分の期待効用… $(5-3p)p = 5p-3p^2$
　 相手の期待効用… $(3+p)p+2(1-p)=2+p+p^2$

$\frac{5-\sqrt{13}}{6} < p < p_1$ より $5p-3p^2>1$ なので $\square^{10}$ では C を選択する。

(II) $p_1 < p < \frac{2}{3}$ のとき



$p \geq 0$ より $6+2p+p^2+p^3>4$ なので $\bigcirc^7$ では C を選択するのが合理的である。

∵ 自分の期待効用… $(4+2p+5p^2-3p^3)p+2(1-p) = 2+2p+2p^2+5p^3-3p^4$
　 相手の期待効用… $(6+2p+p^2+p^3)p+4(1-p) = 4+2p+2p^2+p^3+p^4$

ここで自分の期待効用を $M_7(p)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
M_7(p) &= 2+2p+2p^2+5p^3-3p^4 \\
&= 2-2p+M_5(p)\cdot p \\
&> 2-2p+5p \quad (\because p_1<p<\tfrac{2}{3}) \\
&= 2+3p \\
&> 2+3p_1 \quad (\because p_1<p<\tfrac{2}{3}) \\
&> 3 \quad (\because p_1>\tfrac{1}{3})
\end{aligned}
$$

よって $\square^8$ では C を選択する。

$4+2p+2p^2+p^3+p^4 > 2$ ($\because p>0$) より O^9 ではCを選択するのが合理的である。

$\because$ 自分の期待効用… $(2+2p+2p^2+5p^2-3p^3)p$

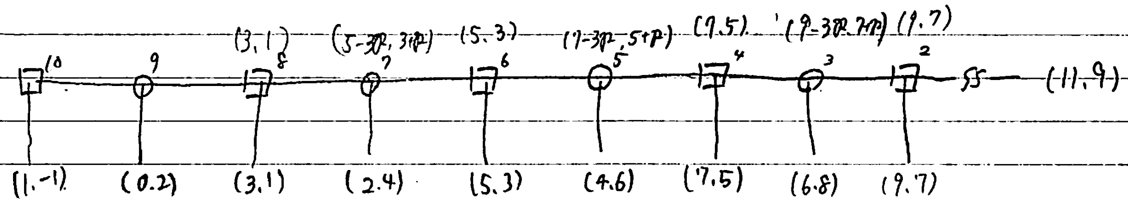
相手の期待効用… $(4+2p+2p^2+p^3+p^4)p+2(1-p) = 2+2p+2p^2+2p^3+p^4+p^5$.

ここで自分の期待効用を $M_9(p)$ とおくと.

$$
\begin{aligned}
M_9(p) &= (2+2p+2p^2+5p^2-3p^3)p \\
&= M_7(p)\cdot p \\
&> 3p \quad (\because p_1<p<\tfrac{2}{3}) \\
&> 3p_1 \quad (\because p_1<p<\tfrac{2}{3}) \\
&> 1 \quad (\because p_1>\tfrac{1}{3}).
\end{aligned}
$$

よって $□^{10}$ ではCを選択する。

(ii) $p>\frac{2}{3}$ のとき.



O^3 ではSを選択するのが合理的である。

$\because$ 自分の期待効用… $9(1-p)+6p = 9-3p$

相手の期待効用… $7(1-p)+8p = 7+p$.

$9-3p<7$ ($\because p>\frac{2}{3}$) より $□^4$ ではSを選択する。

O^5 ではSを選択するのが合理的である。

$\because$ 自分の期待効用… $7(1-p)+4p = 7-3p$.

相手の期待効用… $5(1-p)+6p = 5+p$

$7-3p<5$ ($\because p>\frac{2}{3}$) より $□^6$ ではSを選択する。

O^7 ではSを選択するのが合理的である。

$\because$ 自分の期待効用… $5(1-p)+2p = 5-3p$

相手の期待効用… $3(1-p)+4p = 3+p$

$5-3p<3$ ($\because p>\frac{2}{3}$) より $□^8$ ではSを選択する。

ロ^{9}ではSを選択するのが合理的である.

$\because$ 自分の期待効用… $3(1-p)$

相手の期待効用… $(1-p)+2p=1+p$

$3(1-p)<1$ ($\because p>\frac{2}{3}$) より ロ^{10}では Sを選択する。

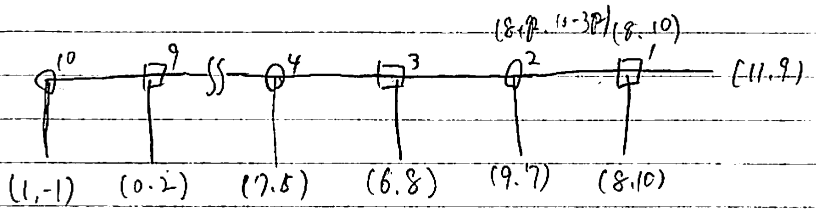
したがって $3p^3-5p^2-2p+1=0$ の $\frac{5-\sqrt{13}}{6}<p<\frac{2}{3}$ における解を p_1 とおいたとき
自分の合理的な戦略は

$$\begin{cases} 0\leq p<\frac{5-\sqrt{13}}{6} \text{ のとき } & C,S,C,S,C \\ \frac{5-\sqrt{13}}{6}<p<p_1 \text{ のとき } & C,C,S,C,C \\ p_1<p<\frac{2}{3} \text{ のとき } & C,C,C,C,C \\ \frac{2}{3}<p\leq 1 \text{ のとき } & S,S,S,S,S \end{cases}$$

//

No.

(ii) 自分がプレイヤー2のとき



□¹ではSを選択する。

次に○²ではSを選択するのが合理的である。

∵ 自分の期待効用… $7p+10(1-p) = 10-3p$

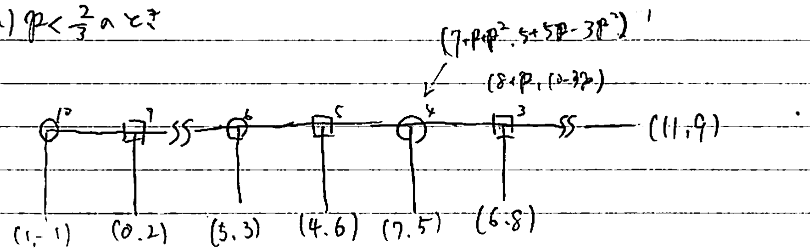
相手の期待効用… $9p+8(1-p) = 8+p$

また、□³では $10-3p$ と 8 を比較して大きい方を選択する。

$10-3p>8$ のとき $p<\frac{2}{3}$

よって $p<\frac{2}{3}$ のとき Cを選択する。

(a) $p<\frac{2}{3}$ のとき



$8+p>7$ ($\because p\geq 0$) より ○⁴ではCを選択するのが合理的である。

∵ 自分の期待効用… $(10-3p)p+5(1-p) = 5+5p-3p^2$

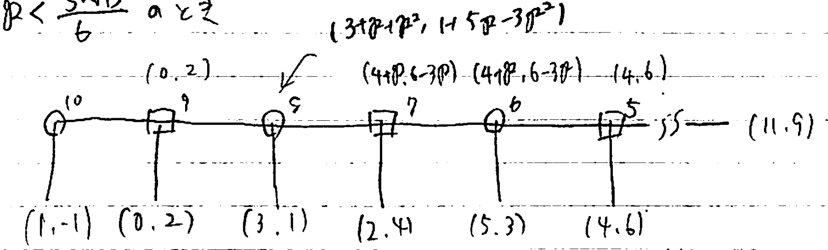
相手の期待効用… $(8+p)p+7(1-p) = 7+p+p^2$

次に□⁵では $5+5p-3p^2$ と 6 を比較して大きい方を選択する。

$5+5p-3p^2>6$ のとき $\frac{5-\sqrt{13}}{6}<p<\frac{2}{3}$ ($\because p<\frac{2}{3}$)

よって $\frac{5-\sqrt{13}}{6}<p<\frac{2}{3}$ のとき Cを選択する。

(A) $p<\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ のとき



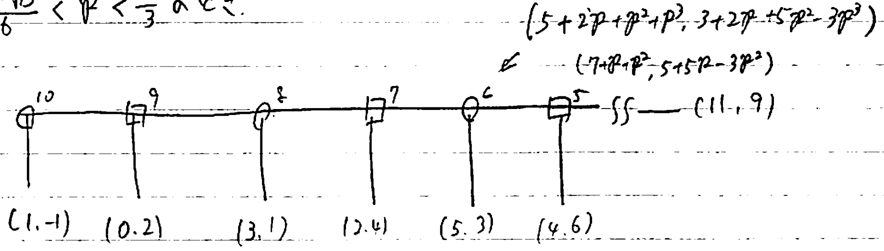
$\bigcirc^6$ではSを選択するのが合理的である。
∵ 自分の期待効用… $3p+6(1-p)=6-3p$
相手の期待効用… $5p+4(1-p)=4+p$

$6-3p>4$ (∵ $p<\frac{5-\sqrt{13}}{6}$) より $\square^7$ではCを選択する。

$4+p>3$ (∵ $p\geq 0$) より $\bigcirc^8$ではCを選択するのが合理的である。
∵ 自分の期待効用… $(6-3p)p+(1-p)=1+5p-3p^2$
相手の期待効用… $(4+p)p+3(1-p)=3+p+p^2$

次に$\square^9$では $1+5p-3p^2$ と 2を比較して大きい方を選択する。
ここで $p<\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ より $1+5p-3p^2<2$ なので Sを選択する。

(B) $\frac{5-\sqrt{13}}{6}<p<\frac{2}{3}$ のとき



$7+p+p^2>5$ (∵ $p\geq 0$) より $\bigcirc^6$ではCを選択するのが合理的である。
∵ 自分の期待効用… $(5+5p-3p^2)p+3(1-p)=3+2p+5p^2-3p^3$
相手の期待効用… $(7+p+p^2)p+5(1-p)=5+2p+p^2+p^3$

ここで自分の期待効用を $M_6(p)$ とおくと $M_6(p)=3+2p+5p^2-3p^2$

$$\frac{dM_6(p)}{dp}=2+10p-9p^2>0 \quad \left(\because \frac{5-\sqrt{13}}{6}<p<\frac{2}{3}\right)$$

よって $M_6(p)$ は p に対して単調増加である。

No.

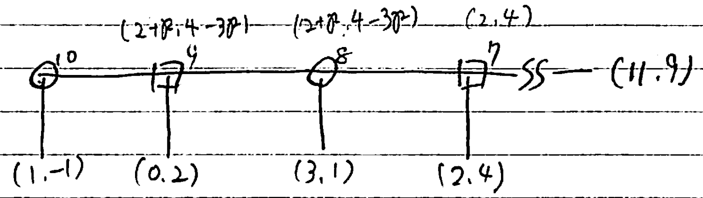
$M_6(p)=4$ のとき $3+2p+5p^2-3p^3=4$

$3p^3-5p^2-2p+1=0$

∴ $\frac{5-\sqrt{13}}{6}<p<p_1$ のとき $M_6(p)<4$ … □^{7} で S を選択する

$p_1<p<\frac{2}{3}$ のとき $M_6(p)>4$ … □^{7} で C を選択する

(I) $\frac{5-\sqrt{13}}{6}<p<p_1$ のとき



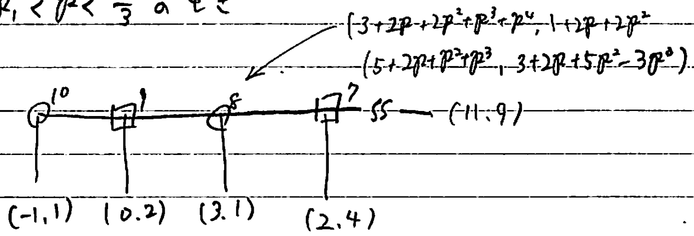
○^{8} では S を選択するのが合理的である

∵ 自分の期待効用… $p+4(1-p)=4-3p$

相手の期待効用… $3p+2(1-p)=2+p$

$\frac{5-\sqrt{13}}{6}<p<p_1$ より $4-3p>2$ なので □^{9} では C を選択する。

(II) $p_1<p<\frac{2}{3}$ のとき



$5+2p+p^2+p^3>3$ (∵ $p\geq 0$) より ○^{8} では C を選択するのが合理的である

∵ 自分の期待効用… $(3+2p+5p^2-3p^3)p+(1-p)=1+2p+2p^2+5p^3-3p^4$

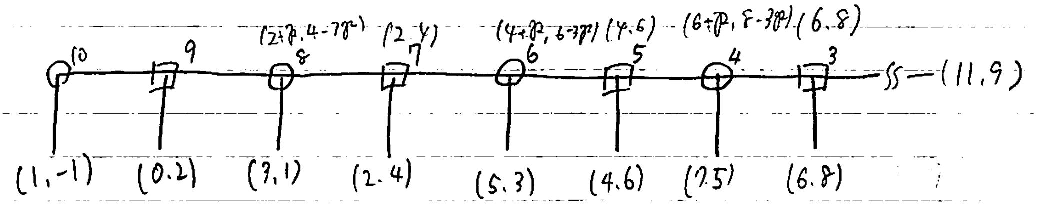
相手の期待効用… $(5+2p+p^2+p^3)p+3(1-p)=3+2p+2p^2+p^3+p^4$

ここで自分の期待効用を $M_8(p)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
M_8(p) &= 1+2p+2p^2+5p^3-3p^4 \\
&= M_6(p)\cdot p+1-p \\
&> 5p+1-p \quad (\because p_1<p<\tfrac{2}{3}) \\
&= 1+4p \\
&> 1+4p_1 \quad (\because p_1<p<\tfrac{2}{3}) \\
&> 2 \quad (\because p_1>\tfrac{1}{3})
\end{aligned}
$$

よって □^{9} では C を選択する。

(d) $p > \frac{2}{3}$ のとき



$○^4$ では S を選択するのが合理的である。

∵ 自分の期待効用 … $5p + 8(1-p) = 8 - 3p$

相手の期待効用 … $7p + 6(1-p) = 6 + p$

$8 - 3p < 6$ ($\because p > \frac{2}{3}$) より $□^5$ では S を選択する。

$○^6$ では S を選択するのが合理的である。

∵ 自分の期待効用 … $3p + 6(1-p) = 6 - 3p$

相手の期待効用 … $5p + 4(1-p) = 4 + p$

$6 - 3p < 4$ ($\because p > \frac{2}{3}$) より $□^7$ では S を選択する。

$○^8$ では S を選択するのが合理的である。

∵ 自分の期待効用 … $p + 4(1-p) = 4 - 3p$

相手の期待効用 … $3p + 2(1-p) = 2 + p$

$4 - 3p < 2$ ($\because p > \frac{2}{3}$) より $□^9$ では S を選択する。

$$\therefore \begin{cases} 0 < p < \frac{5-\sqrt{13}}{6} & S, C, S, C, S \\ \frac{5-\sqrt{13}}{6} < p < p_1 & C, S, C, C, S \\ p_1 < p < \frac{2}{3} & C, C, C, C, S \\ \frac{2}{3} < p \leq 1 & S, S, S, S, S \end{cases}$$

No.