

Second Price Auction について

プレイヤーはそれぞれオークションに出品されているものを手に入れたとき、利得が発生する。この利得を A とする。

一方で、オークションからものを落札するとき、費用 β がかかる。これを利得で考えたとき、 $-\beta$ とする。また、オークションでの入札額を α としておく。なお、セカンドプライスオークションなので、 $\alpha > \beta$ が成り立つ。

すると、オークションでものを落札したときに発生する総合利得は、ものを手に入れ費用を払ったので、 $(A - \beta)$ となる。

このオークションで嘘をつかずに入札とするならば、等価交換の $\alpha = A$ とするだろう。

ちなみに、オークションでものが得られなかった場合、ものを手に入れたことによる利得 A も費用 β もかからないため、得られた利得は 0 とすることとする。

・ここからは、嘘をつき、 α を変動させた時のことを考える。

1. $\alpha > A$ に設定した場合

- 1.1 $\alpha = A$ では落札できなかったが、 $\alpha > A$ にしたことで落札できるようになった場合
 $\alpha = A$ では落札できなかったということから、他の人が A より大きい落札額に設定していたということがわかる。つまりこの場合、 $\beta > A$ をみたす。よって、嘘をついたことでプレイヤーが得られた利得 $(A - \beta) < 0$ となる。つまり、落札できなかった時の利得より、嘘をついて落札できたときの利得のほうが小さくなってしまった。

以上から、この場合は嘘をつかない方が利得は高い。

- 1.2 $\alpha = A$ から $\alpha > A$ にしたことで落札できた、落札できなかったという結末が変わらなかった場合

α を動かしても、他のプレイヤーの β の値が動くことはない。よって、結末が変わらないのであれば、利得にも変化はない。

以上から、この場合は嘘をついてもつかなくても変わらない。

2. $\alpha < A$ に設定した場合

- 2.1 $\alpha = A$ では落札できたが、 $\alpha < A$ にしてことで落札できなくなった場合

$\alpha = A$ で落札したときに得られる利得は、 $(A - \beta)$ である。必ず $\alpha > \beta$ が成り立つので、 $(A - \beta) > 0$ が成り立つ。つまり、落札できた時の利得より、落札できなくなってしまった時の利得のほうが小さくなってしまった。

以上からこの場合は嘘をつかない方が利得は高い。

2.2 $\alpha = A$ から $\alpha < A$ にしたことで落札できた、落札できなかったという結末が変わらなかった場合

α を動かしても、他のプレイヤーの β の値が動くことはない。よって、結末が変わらないのであれば、利得にも変化はない。

以上から、この場合は嘘をついてもつかなくても変わらない。

以上の1,2から、嘘をつかなかったときに得られる利得は嘘をついた時の利得以上となる、ということが常に成り立つ。つまり、このプレイヤーの支配戦略は「嘘をつかない」ということになる。

• ここからは、情報を公開しないことによる得について考える。

情報を公開したときの利得の変化を考えることにする。

1. オークション終了後、落札できるプレイヤー

嘘をついて落札しても利得が増えることがないのは上記の通り。つまり、情報が公開されても特にプレイヤーができることはない。

2. オークション終了後、落札できないプレイヤー

嘘をつくことで自身の利得を増やすことはできない。しかし、このオークションはセカンドプライスオークションなので、落札できないプレイヤーは落札するプレイヤーの費用 β の値を $\beta < \alpha$ の間で自由に動かすことができる。 β を動かして自身の利得を増やすことはできないが、落札するプレイヤーの利得を減らすことができる。

つまり、情報を公開しないことで得をするのは、落札するプレイヤーである。

First Price Auction について

利得の設定は基本的にセカンドプライスオークションと同じだが、 $\beta = \alpha$ が常に成り立ち、費用 β は入札額 α によって変化するという点が異なる。

1. $\alpha > A$ とした場合

セカンドプライスオークションと同じで嘘をつくことによるメリットはない。

2. $\alpha < A$ とした場合

落札できない状態のまま変わらない、または結果が落札できたから落札できなかったに変わった、という2つの場合、利得は0のまま変わらない。問題は、落札できた状態のまま変わらない場合である。

この場合、 $\alpha < A$ としたことで得られる利得は、 $(A - \alpha) > 0$ となり、嘘をつかずに落札できた場合よりも利得が大きいのである。ただし、 $\alpha < A$ としたことで落札できなくなってしまうと、利得は0になってしまう。

以上からいえることは、高いほうに嘘をつく意味はないが、低いほうには嘘をつく意味はあるということである。周りの評判などの情報を集めていけば、 α を落札できる最低ラインまで下げることができるため、利得が大きく増える。一方、情報が何もないのであれば、落札して得られる利得0であるよりも、利得が $\Delta \alpha$ だけでも得られた方がよいので、支配戦略は $\alpha = (A - \Delta \alpha)$ となる。

上記に情報があれば利得を最高にできると書いた。では、入札情報が公開される場合はどうだろうか？

この場合、嘘をついて利得をあげようとするならば、入札は後の方がいい。なぜなら、もし自分が $\alpha = (A - \gamma)$ という入札を行った後に、別のプレイヤーが $\alpha' = (\alpha + \Delta \alpha)$ ($\Delta \alpha < \gamma$ とする)という入札を行ったとすれば、得られる利得は0だが、もし自分が $\alpha = (A - \gamma + 2\Delta \alpha)$ という入札を行い落札していれば、得られた利得は $(A - \alpha) > 0$ となるためである。つまり、入札を後にすればするほど、得られる情報は大きくなるためである。

以上から、情報が公開される場合、後に入札して落札するプレイヤーが得をし、支配戦略は「入札締め切り直前に入札額を落札できる最低額にして入札」となる。