決定の木 Decision Tree
と
完全情報ゲーム
Extensive Games with Perfect Information

-- 合理的思考の技術 Lecture 3 --

小林憲正

VALDES

Tokyo Institute of Technology

決定の木 Decision Tree

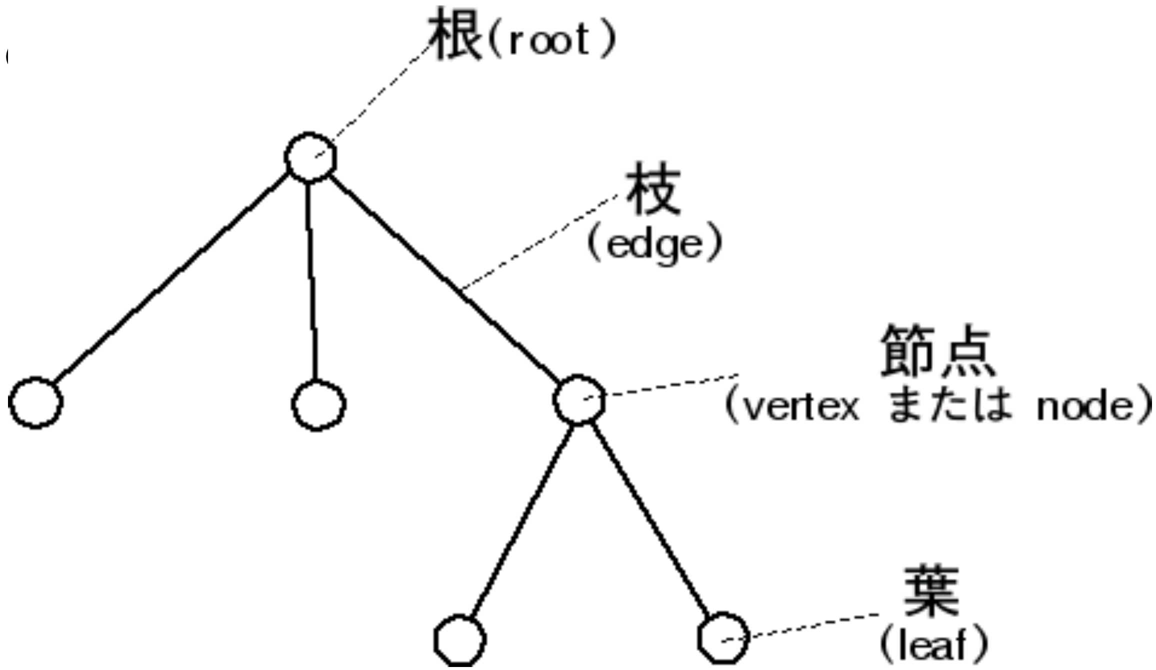
一人意思決定の表現
-- 決定の木 Decision Tree --

- 一般には、多数のノードが連なる大きな意思決定問題を考えることができる：

- 決定ノード decision node □
- 不確実性ノード chance node ○　確率分布
- 根 root　　現在の決定ノード
- 終端ノード（葉）　効用（評価値）utility

決定の木

- （根つき）木構造で、その上に定義された半順序関係が、因果関係の順序を表すも



時間

[Wikipedia 木_(数学)]

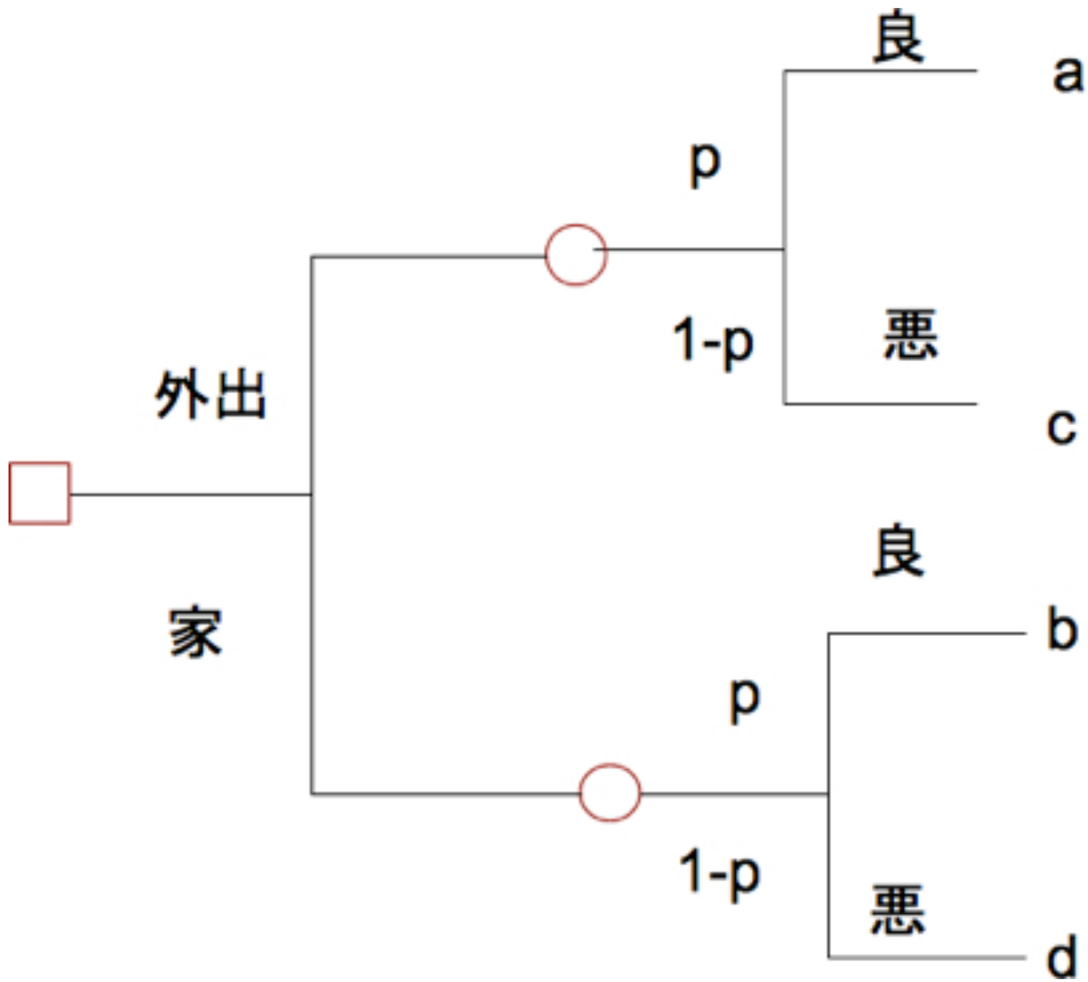
決定の木を解く一般的なアルゴリズム 後ろ向き帰納法 backward induction

- 終端ノードから出発
- 以下のように、直前のノードで折りたたみ、効用を指定する
（再帰的手続き recursive procedure）:
  - 不確実性ノードについては、期待効用で置き換え
  - 決定ノードについては、効用最大値で置き換え
- プロセスの終点は、決定の木の根
（＝現時点での決定ノード）

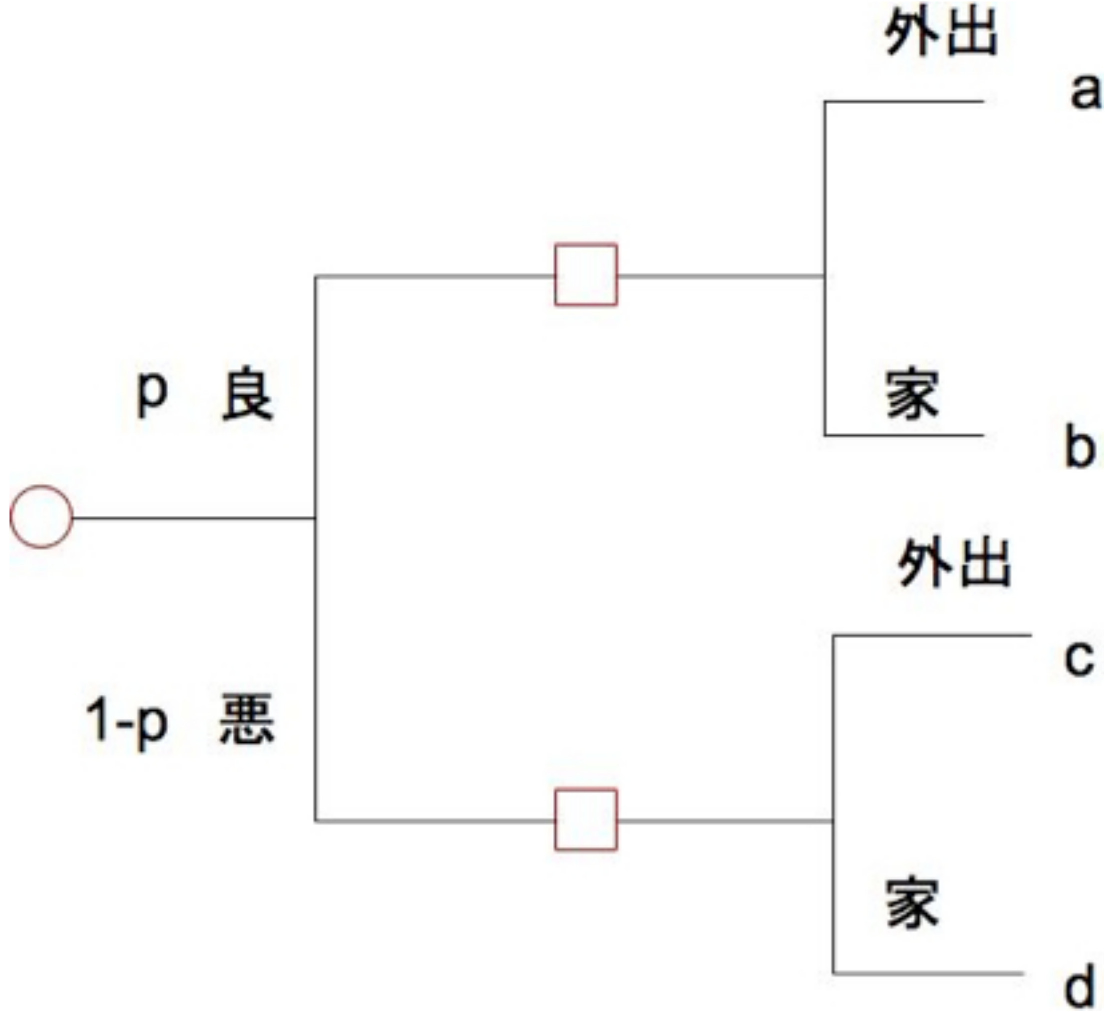
- 囲碁・将棋の「読み」は、この作業を指す
- 大きな意思決定問題では計算量が爆発してしまう（「読み」だけで囲碁や将棋をプレーすることは不可能）

例） 天気と外出

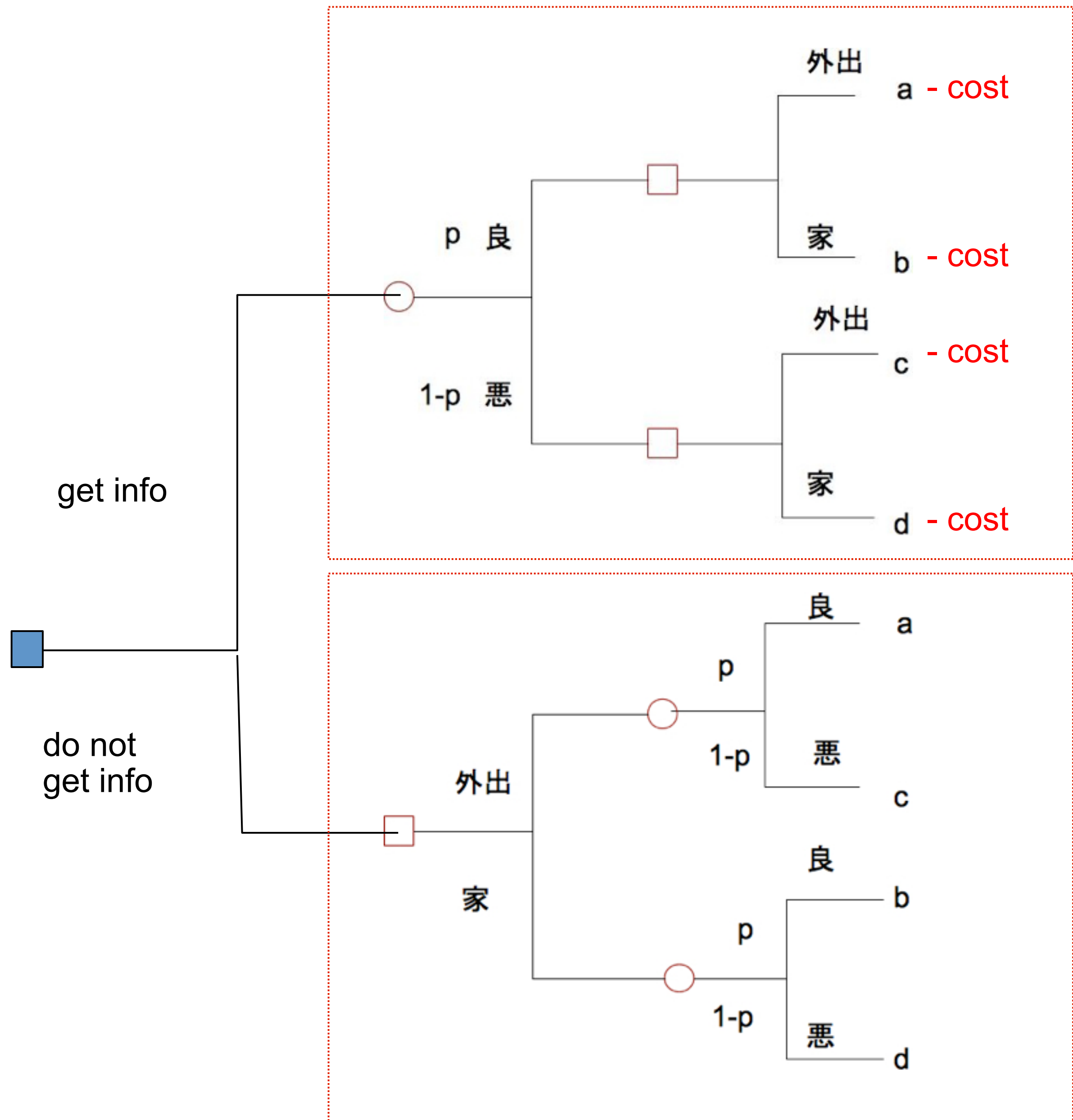
注意）



例） 天気と外出
情報を得た後に意思決定



情報をゲットするかどうかの意思決定



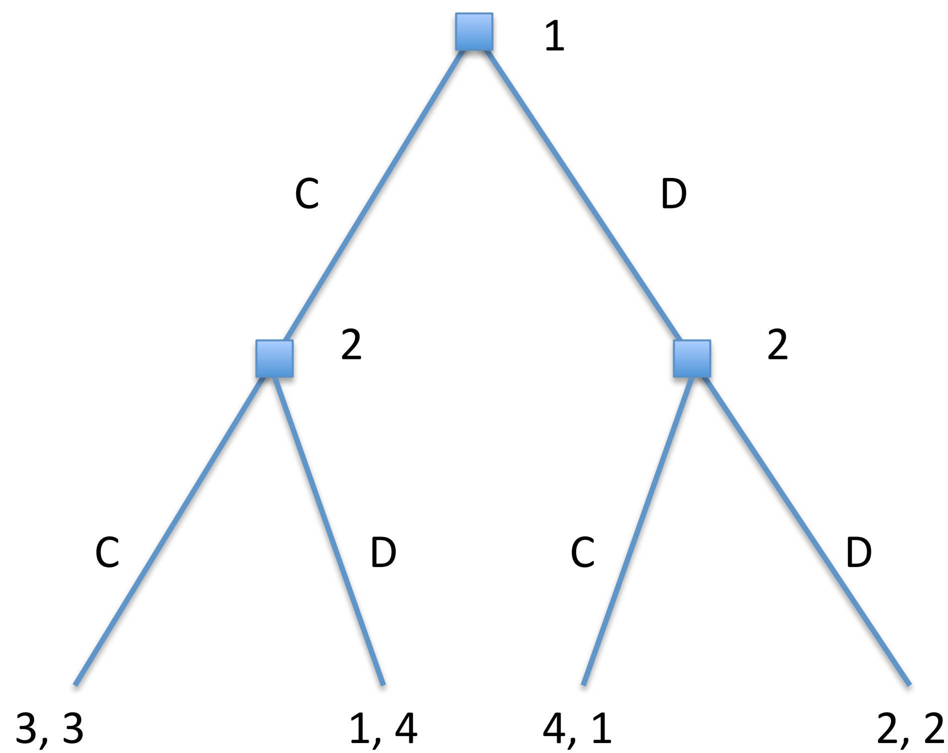
EVPI （次ページ参照）
と cost の
大小比較で
情報をゲットするか否か
の
意思決定を行う

完全情報ゲーム
Games with Perfect Information

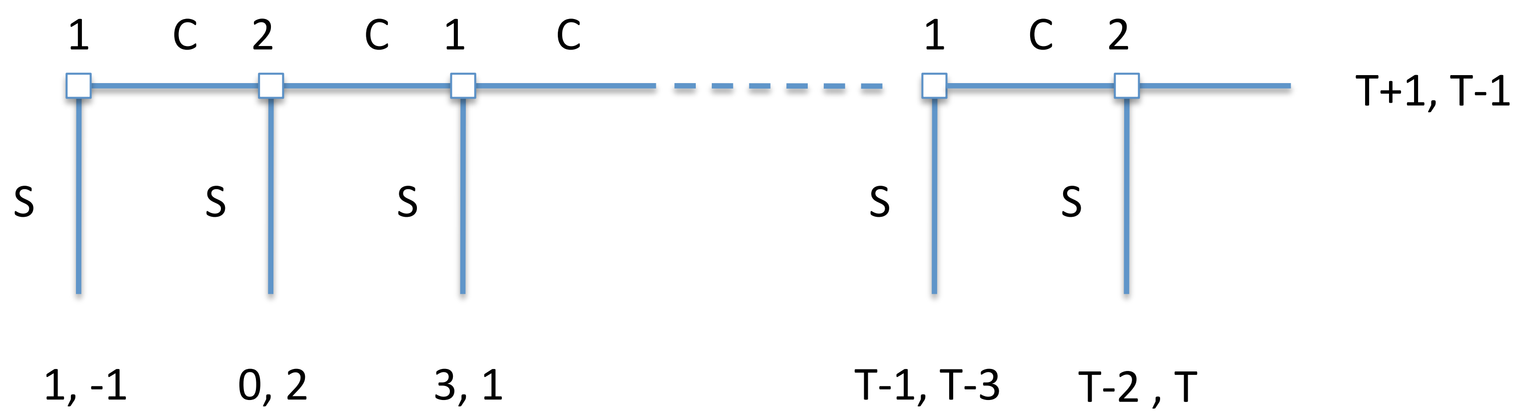
ゲームの木 Game Tree
- 決定の木の多人数への拡張 -

- ゲームの木 game tree
  - 決定ノードは、プレーヤーの手番
  - 終端ノードには、それぞれのプレーヤーの効用
- 木を用いたゲームの表現を展開形 extensive form という
- 過去の他のプレーヤー（自然も含む）のプレーが全て見えるという意味で完全情報 perfect information であると呼ばれる

例）２段階囚人のジレンマ



例） ムカデゲーム Centipede Game (Rosenthal, 1981)



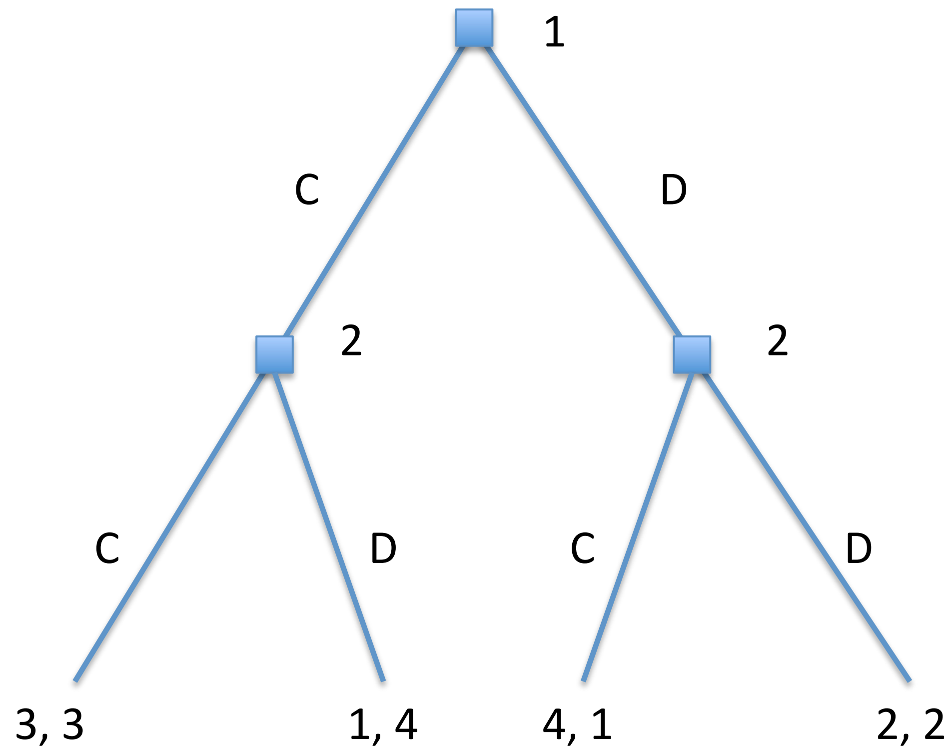
- S = Selfish, C = Cooperative、のイメージ
- 各決定ノードで、それぞれのプレーヤーは S をプレーする方が、自分が C をプレー直後に相手に S をプレーされるよりは得だが、相手が一回 C をプレーしてくれれば、そっちの方が得

完全情報ゲームの定式化

$$\langle \mathcal{K}, P, u \rangle$$

- 木構造　$\mathcal{K} = \langle H, A \rangle$
  - ノード → 履歴（歴史） history の集合 H
    ノードとパスは一対一対応 → 行動の列で表現可能
    h = (a_1, a_2, …), 特に始点ノードは空の列 $\emptyset$ で表現することがある。
  - 枝 → 行動 action の集合 A
    ノード h で可能な行動の集合を A(h) と書く。
- プレーヤー関数　$P : H \setminus Z \to N$
  - Z は終端ノード
- 効用関数　$u_i : Z \to \Re$

例）２段階囚人のジレンマ



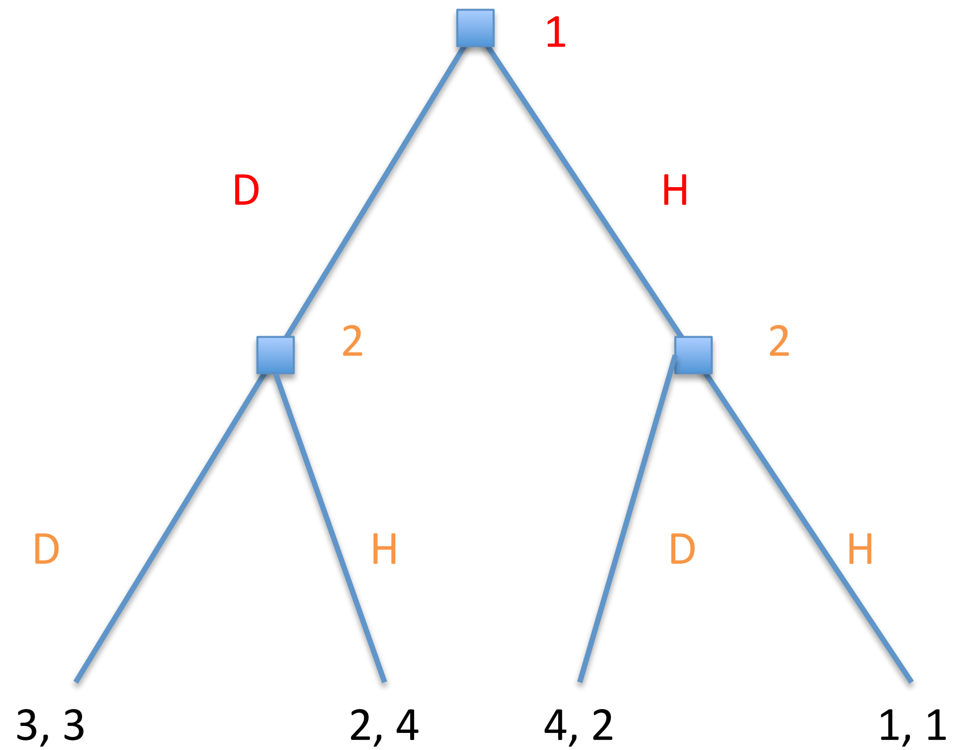
$$H_1 = \{\emptyset\}$$

$$H_2 = \{C, D\}$$

戦略 Strategy

- 各プレーヤーについて、その全ての決定ノードにおける行動選択を列挙したものを戦略という（各プレーヤーの決定ノード$h \in H_i$ に対して、
  $s_i(h) \in A(h)$を定める関数）
- 戦略は、起こりえるすべての場合を想定し、それぞれの場合での自分の行動を記述した事前の計画に相当
  – 定義上、実際の歴史では到達されないパス（反実仮想）におけるプレーの仕方も指定している。
  – あらゆる場合に備えているため、「他のプレーヤーの実際のプレーに驚く」という事態は想定していない。（このような想定が現実的かどうかは後で検討する）

例） ２段階タカハト (dove-hawk)



戦略の集合

$S_1 = A(\varnothing) = \{D, H\}$

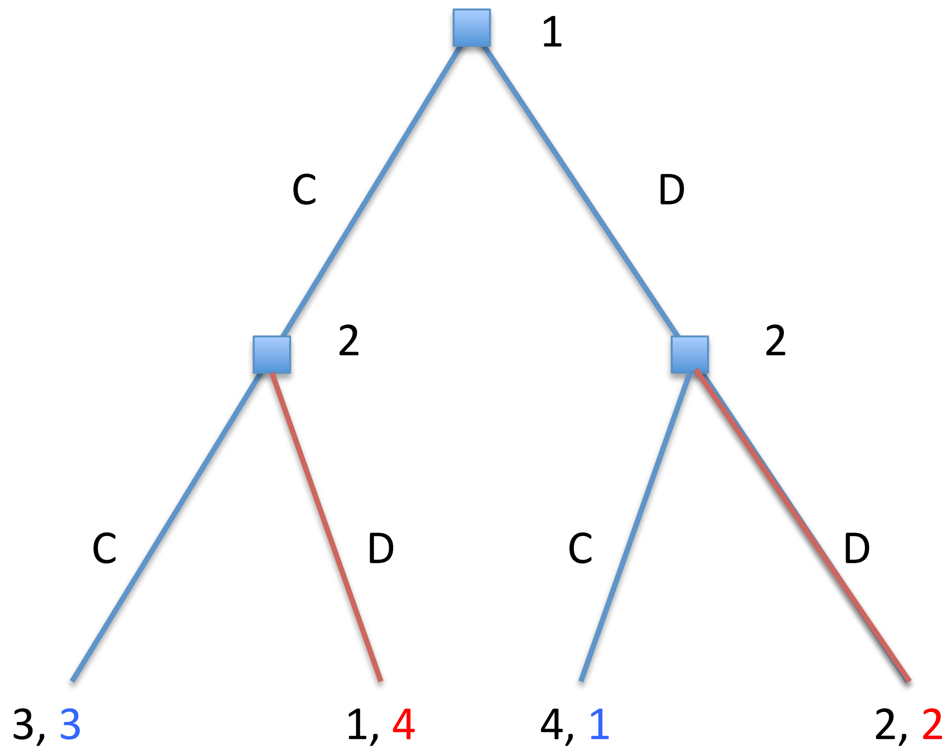
$S_2 = A(D) \times A(H) = \{D, H\}^2$

後ろ向き帰納法
Backward Induction

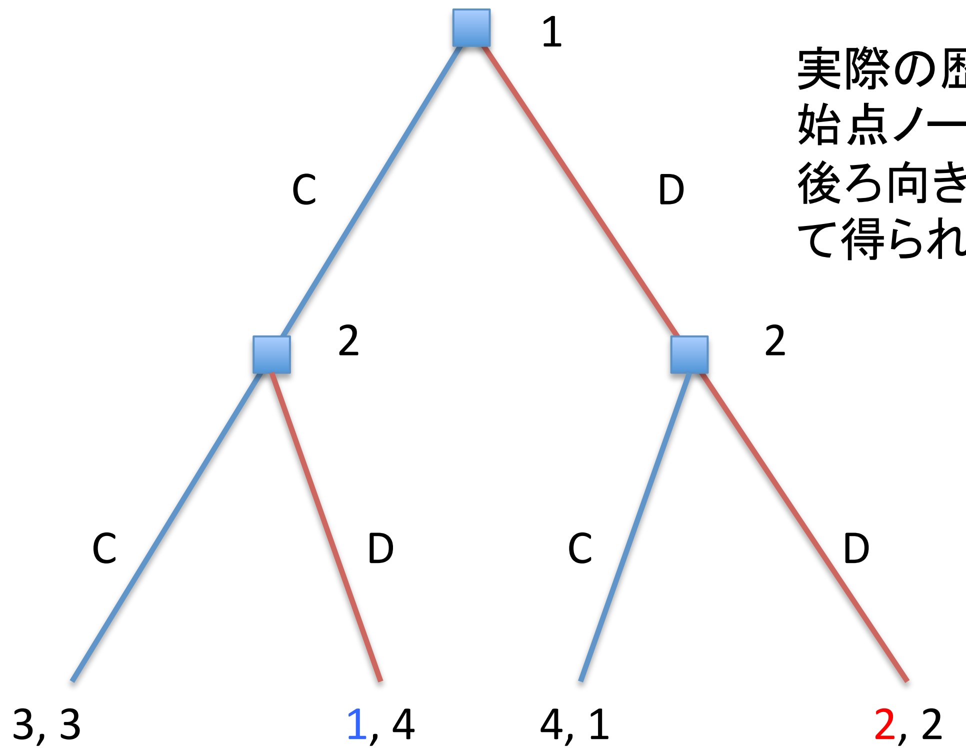
アルゴリズム:

- 終端ノードから出発
- それぞれのプレーヤーが決定ノードで効用最大化したとして、そのプレーヤーが選んだ枝と付随する効用値で置き換える
- 自然については、期待効用で置き換える

例） ２段階囚人のジレンマ

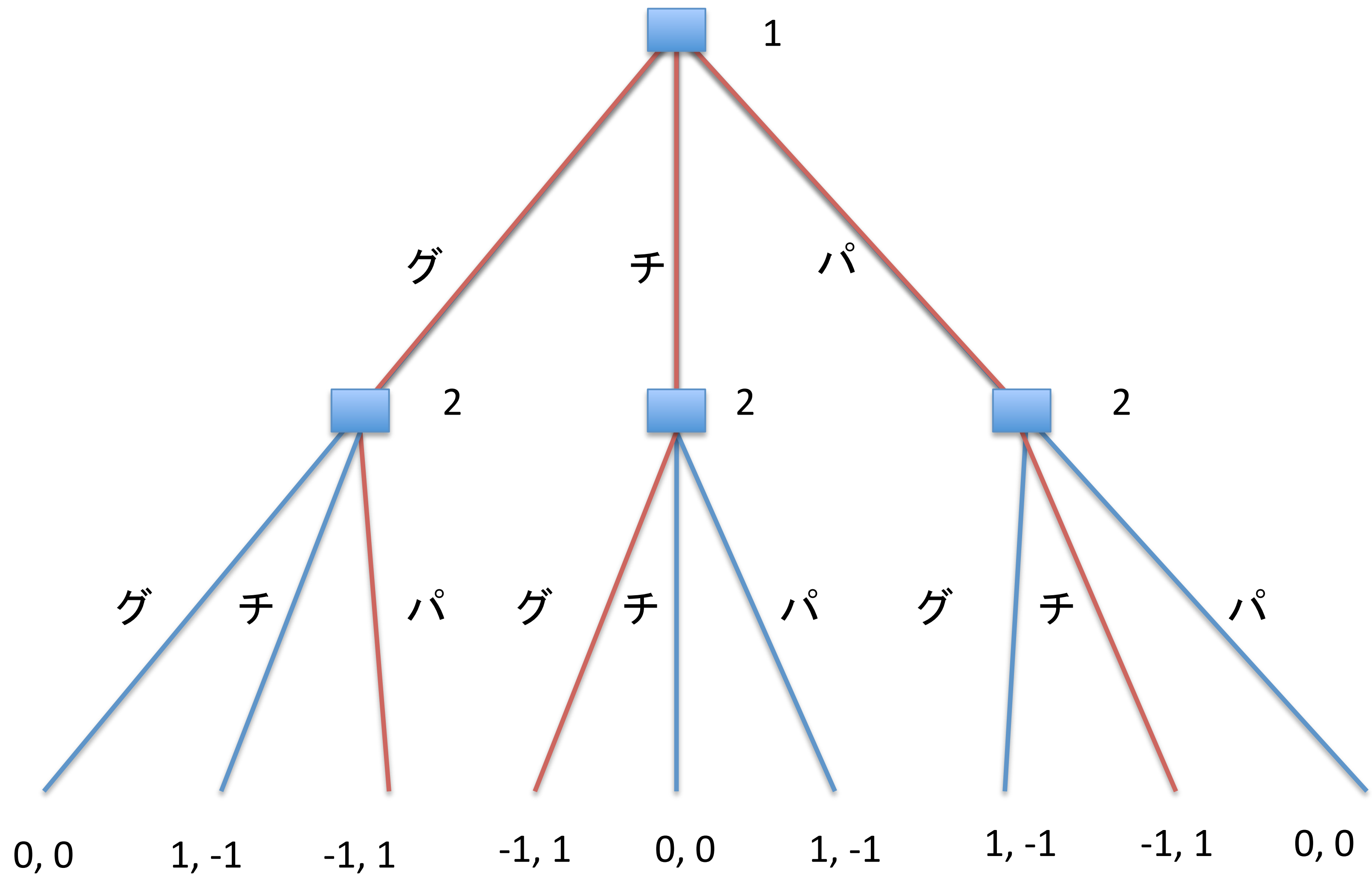


例）２段階囚人のジレンマ



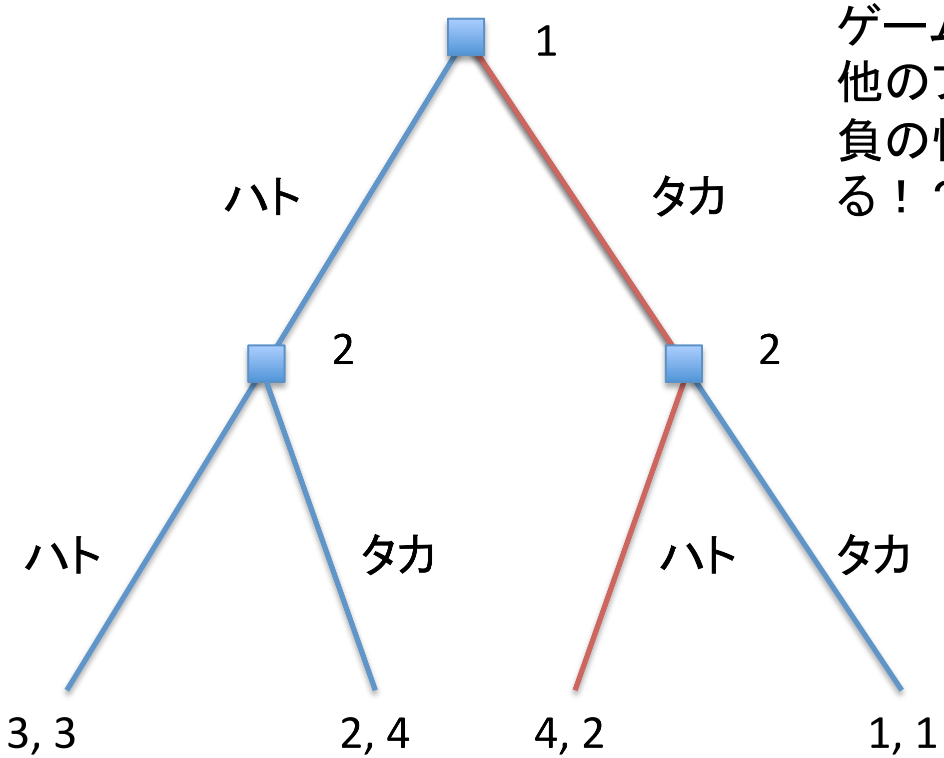
実際の歴史（履歴）history は、
始点ノードから、
後ろ向き帰納法の解をつなげ
て得られる。

後手が得するゲーム
例）じゃんけん



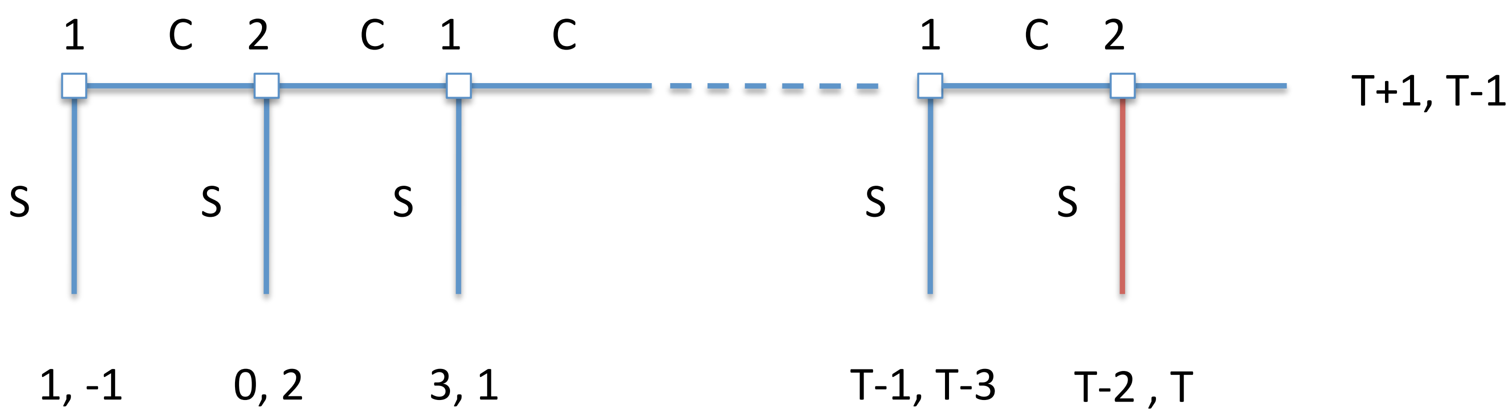
コミットメント Commitment 効果
先手が得する場合

例）２段階　チキンゲーム

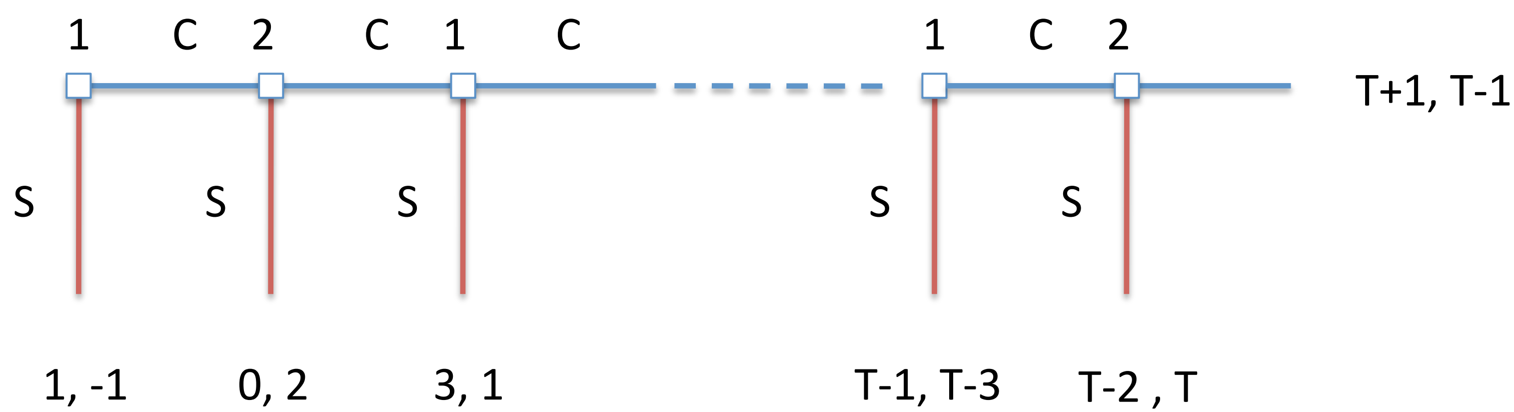


ゲーム状況では、
他のプレーヤーの手を知ることが
負の情報の価値を持つことがあり得る！？

例） ムカデゲーム Centipede Game



例） ムカデゲーム Centipede Game



結局、後ろ向き帰納法の解では、初回にプレーヤー1が S をプレーしてゲームが終わる。

- 後ろ向き帰納法の特徴 -
合理性の共有知識
Common Knowledge or Rationality (CKR)

自分が合理的であったとしても、他のプレーヤーが合理的と思わなくなった瞬間に、
（＝　合理性の共有知識 CKR の欠如）
必ずしも後ろ向き帰納法は有効でない！

例）　囲碁で上手が下手と打つ場合、しばしば相手の「下手な手」を想定して、それに対する最適応答を考える。つまり、わざと最善でない手をプレーする方が良いことがあり得る。

- 後ろ向き帰納法が疑わしい理由 - 反実仮想 counterfactuals と CKR (Reny, 1992)

- 後ろ向き帰納法は、すべての決定ノードでのプレーヤーの合理性 (Aumann, 1995) を前提にしているが、解の歴史のパス path 上以外は、一般にはすべてのパス上で、過去にプレーした少なくとも一人のプレーヤーが非合理的！
→ これって、どうなの？！
極端な例） ムカデゲーム
- ほとんど唯一の後ろ向き帰納法の正当化は、過去の後ろ向き帰納法によらない手がすべてケアレス･ミスであったという解釈。(=震える手 trembling hand)

戦略的非合理性 Strategic Irrationality (Basu, 1988)

- 戦略的に非合理性を演出し、未来の他のプレーヤーの行動に影響を与えることを通じて得をすることがありえる。
  - 例） ムカデゲームで、あえてCを多数回プレーすることにより、CKRが満たされていないことをアピール！！
- 観察されたプレート矛盾しない推測のもとでの最適応答として正当化される戦略をreasonable strategyという。

まとめ

- 決定の木
- 完全情報ゲーム
- 後ろ向き帰納法
- 後ろ向き帰納法の問題点と戦略的非合理性

References:

- R. J. Aumann, **Backward induction and common knowledge of rationality**, *Games and Economic Behavior* **8** 6-19 (1995)
- K. Basu. **Strategic irrationality in extensive games**, *Mathematical Social Sciences* **15** 247-60 (1988)
- I. Gilboa. ***Rational Choice***, MIT Press (2010)
- M. J. Osborne and A. Rubinstein. ***A Course in Game Theory*****,** MIT Press (1994)
- P. J. Reny. **Rationality in Extensive-Form Games**, *The Journal of Economic Perspectives* **6** 103-118 (1992)
- R. W. Rosenthal. **Games of Perfect Information, Predatory Pricing and the Chain-Store Paradox,** *Journal of Economic Theory* **25** 92-100 (1981)
- R. Selten. **The chain store paradox**, *Theory and Decision* **9** 127-159 (1978)