$EVPI \geq 0$の証明

$$EVPI \coloneqq \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\max_{a\in A} u(a,\omega) - \max_{a\in A}\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)u(a,\omega)$$

集合Ωは定義からして,高々可算集合としても差し支えない.そこで集合Ωを$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$と定め,$n$に対する数学的帰納法で証明する.

1° $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} EVPI &\coloneqq p(\omega_1)\max_{a\in A} u(a,\omega_1) - \max_{a\in A} p(\omega_1)u(a,\omega_1) \\ &= p(\omega_1)\max_{a\in A} u(a,\omega_1) - p(\omega_1)\max_{a\in A} u(a,\omega_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので$EVPI \geq 0$ が成り立つ.

2° $n = k(k = 1,2,\cdots)$のとき$EVPI \geq 0$ が成り立つと仮定すると,

$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} EVPI &\coloneqq \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)\max_{a\in A} u(a,\omega) - \max_{a\in A}\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)u(a,\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} p(\omega_i)\max_{a\in A} u(a,\omega_i) - \max_{a\in A}\sum_{i=1}^{k+1} p(\omega_i)u(a,\omega_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} p(\omega_i)\max_{a\in A} u(a,\omega_i) - \sum_{i=1}^{k+1} p(\omega_i)u(a^*,\omega_i) \\ &\qquad\qquad (a^*\text{は}\sum_{i=1}^{k+1} p(\omega_i)u(a,\omega_i)\text{を最大にする}A\text{の要素}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} p(\omega_i)\max_{a\in A} u(a,\omega_i) - \sum_{i=1}^{k} p(\omega_i)u(a^*,\omega_i) \\ &\qquad + p(\omega_{k+1})\left\{\max_{a\in A} u(a,\omega_{k+1}) - u(a^*,\omega_{k+1})\right\} \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} p(\omega_i)\max_{a\in A} u(a,\omega_i) - \sum_{i=1}^{k} p(\omega_i)u(a^*,\omega_i) \\ &\qquad\qquad (\because \max_{a\in A} u(a,\omega_{k+1}) - u(a^*,\omega_{k+1}) \geq 0) \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} p(\omega_i)\max_{a\in A} u(a,\omega_i) - \max_{a\in A}\sum_{i=1}^{k} p(\omega_i)u(a,\omega_i) \\ &\qquad\qquad (\because \max_{a\in A}\sum_{i=1}^{k} p(\omega_i)u(a,\omega_i) - \sum_{i=1}^{k} p(\omega_i)u(a^*,\omega_i) \geq 0) \\ &\geq 0 \qquad\qquad (\because n = k\text{のときの仮定}) \end{aligned}$$

1°, 2°から数学的帰納法より$EVPI \geq 0$■