

工学数学C

ベクトル解析

高田潤一

takada@ide.titech.ac.jp

概要

4回にわたってベクトル解析について講義する。すでにいくつかの科目でベクトル解析を用いた説明がなされていると思われるので、慣れることと理解を深めることに重点を置く予定である。なお本資料には図面が入っていないので留意されたい。

1 ベクトルに関する記号の使用法

ベクトルは向きと大きさを有する量であり、大きさだけを有するスカラーとは区別される。この講義では、スカラーは a のように細字のイタリック体で表し、ベクトルは $\mathbf{v}$ のように太字のイタリック体で表す。ベクトル $\mathbf{v}$ の大きさは $|\mathbf{v}|$ で表す。大きさが1のベクトルを単位ベクトルという。特に単位ベクトルは $\hat{\mathbf{x}}$ のように通常のベクトルに $\hat{\cdot}$ をつけて区別する。

2 座標系

2.1 直角座標系

直角座標系は、原点を中心に空間に固定され、互いに直交する x 軸, y 軸, z 軸を用いる表現である。通常の座標系は右手系と呼ばれ、 x 軸から y 軸に向けて右ねじを切る方向が z 軸となるよう定義されている。座標点 (x_0, y_0, z_0) は原点から x 軸, y 軸, z 軸方向にそれぞれ x_0, y_0, z_0 だけ移動した位置にある。

直角座標系を表す単位ベクトルは、 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ で表される¹。このとき、座標点 (x_0, y_0, z_0) の位置ベクトル $\mathbf{r}_0$ は

$$\mathbf{r}_0 = x_0 \hat{\mathbf{x}} + y_0 \hat{\mathbf{y}} + z_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (1)$$

で表される。

¹大抵のベクトル解析の教科書では $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を使用している。これは、複素平面の立体への拡張を試みた Hamilton の四元数において、三つの虚数単位に i, j, k の記号を使用したことが理由と考えられる。なお、ベクトル解析は四元数の理論を起源に発展したものであり、例えば Maxwell 自身が著した電磁気学の教科書ではベクトルではなく四元数を用いた表記が用いられている。

2.2 円筒座標系

円筒座標系では、 z 軸を回転軸とする円筒を用いて座標を表現する。座標点 (ρ_0, φ_0, z_0) は、この点を通る円筒の半径 ρ_0 、 x 軸からの回転角 φ_0 及び円筒の高さ z_0 を用いて表される。円筒座標系を表す単位ベクトル $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$ はそれぞれの値が増加する方向に定義され、この順番で右手系となる。なお、座標点の位置が変わると単位ベクトルの向きは変化する。 $\hat{z}$ は直角座標系と共通であるが、 $\hat{\rho}, \hat{\varphi}$ は直角座標系の単位ベクトル $\hat{x}, \hat{y}$ を用いて、

$$\hat{\rho} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi \quad (2)$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \quad (3)$$

で表される。

このとき、座標点 (ρ_0, φ_0, z_0) の位置ベクトル $\mathbf{r}_0$ は

$$\mathbf{r}_0 = \rho_0 \hat{\rho} + z_0 \hat{z} \quad (4)$$

で表されるので、直角座標系の座標点 (x_0, y_0, z_0) との間には、次の関係が成り立つ。

$$x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0 \quad (5)$$

$$y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0 \quad (6)$$

2.3 極座標系

極座標系では、原点を中心とする球を用いて座標を表現する。座標点 $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ は、この点を通る球の半径 r_0 、 z 軸から計ったこの半径の角度（天頂角） ϑ_0 、及びこの半径の xy 平面上への射影の x 軸から計った角度（方位角） φ_0 を用いて表される。極座標系を表す単位ベクトル $\hat{r}, \hat{\vartheta}, \hat{\varphi}$ はそれぞれの値が増加する方向に定義され、この順番で右手系となる。円筒座標系と同じく、座標点の位置が変わると単位ベクトルの向きは変化する。 $\hat{\varphi}$ は円筒座標系と共通である。 $\hat{r}, \hat{\vartheta}, \hat{\varphi}$ は直角座標系の単位ベクトル $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ を用いて、

$$\hat{r} = \hat{x} \sin \vartheta \cos \varphi + \hat{y} \sin \vartheta \sin \varphi + \hat{z} \cos \vartheta \quad (7)$$

$$\hat{\vartheta} = \hat{x} \cos \vartheta \cos \varphi + \hat{y} \cos \vartheta \sin \varphi - \hat{z} \sin \vartheta \quad (8)$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \quad (9)$$

$$(10)$$

で表される。

このとき、座標点 $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ の位置ベクトル $\mathbf{r}_0$ は

$$\mathbf{r}_0 = r_0 \hat{r} \quad (11)$$

で表されるので、直角座標系の座標点 (x_0, y_0, z_0) との間には、次の関係が成り立つ。

$$x_0 = r_0 \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 \quad (12)$$

$$y_0 = r_0 \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \quad (13)$$

$$z_0 = r_0 \cos \vartheta_0 \quad (14)$$

3 基本ベクトルと成分表示

互いに直交する3つの単位ベクトルを基本ベクトルという。直角座標系，円筒座標系，極座標系のそれぞれ3つの単位ベクトルは基本ベクトルとなる。任意のベクトルは基本ベクトルの一次結合で表すことができる。特に直角座標系の基本ベクトル $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ を用いて，

$$\mathbf{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \quad (15)$$

となるとき， (a_x, a_y, a_z) は $\mathbf{a}$ の成分表示となる。成分表示は数値計算には都合がよいが，必ずしも物理的な性質を理解するために最適な表現ではないことに注意する。

4 ベクトルの内積

ベクトル $\mathbf{a}$ とベクトル $\mathbf{b}$ のなす角を ψ とすると，内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \psi = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (16)$$

で表される。内積は，一方のベクトルの大きさと，他方のベクトルのこのベクトルへの正射影の大きさの積をとったもので，互いに平行な成分の寄与を表す。スカラ値をとるため，内積のことをスカラ積とも呼ぶ。

互いに直交するベクトルの内積は0となる。

内積が互いの正射影の積を表すことから，分配法則

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (17)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \quad (18)$$

が成立する。

ベクトルの大きさは自分自身との内積を用いて

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \quad (19)$$

で表される。

特に基本ベクトル $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ に対して，

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \quad (20)$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0 \quad (21)$$

を得る。

内積を成分表示で表すと，

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (22)$$

が得られる。この式は

$$\mathbf{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

$$\mathbf{b} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}$$

を代入し，分配法則を用いて展開すれば得られる。

5 ベクトルの外積

ベクトル $\mathbf{a}$ とベクトル $\mathbf{b}$ のなす角を ψ とすると、外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \hat{\mathbf{n}} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \psi = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (23)$$

で表される。外積は、2つのベクトルで形成される平行四辺形の面積を大きさとし、 $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ に対して右ねじの方向に向きを有する。ベクトル値をとるため、外積のことをベクトル積とも呼ぶ。右ねじの関係があるため、交換法則は成立せず、順序を入れ替えると符号が反転する。

互いに平行なベクトルの外積はゼロベクトルとなる。

外積が2つのベクトルで形成される平行四辺形の面積を表すことから、分配法則

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (24)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (25)$$

が成立する。

特に基本ベクトル $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ に対して、

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} \quad (27)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \quad (28)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (29)$$

を得る。

外積を成分表示で表すと、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{\mathbf{x}} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{\mathbf{y}} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{\mathbf{z}} \quad (30)$$

が得られる。内積同様に

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{x}} + a_y \hat{\mathbf{y}} + a_z \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{b} = b_x \hat{\mathbf{x}} + b_y \hat{\mathbf{y}} + b_z \hat{\mathbf{z}}$$

を代入し、分配法則を用いて展開すれば得られる。また、行列式を用いて、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (31)$$

と表すこともできる。

6 ベクトルの分解

任意のベクトル $\mathbf{a}$ は、ある単位ベクトル $\hat{\mathbf{e}}$ に対して、その平行成分と垂直成分に分けることができる。

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp} \quad (32)$$

$$\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}) \hat{\mathbf{e}} \quad (33)$$

$$\mathbf{a}_{\perp} = \hat{\mathbf{e}} \times (\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{e}}) \quad (34)$$

7 三重積

ベクトル解析では、3つのベクトルの積が頻繁に出現するため、特に三重積と呼んでいる。

スカラー三重積 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ は3つのベクトルを辺とする平行六面体の体積を表し、次の関係を満たす。

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (35)$$

ベクトル三重積 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ は

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (36)$$

の関係を満たす。この証明には成分表示を用いるのが容易である。式 (36) の左辺は

$$(a_x \hat{\mathbf{x}} + a_y \hat{\mathbf{y}} + a_z \hat{\mathbf{z}}) \times \{(b_y c_z - b_z c_y) \hat{\mathbf{x}} + (b_z c_x - b_x c_z) \hat{\mathbf{y}} + (b_x c_y - b_y c_x) \hat{\mathbf{z}}\}$$

と表すことができるので、その x 成分を求めると、

$$a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z) = (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)b_x - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)c_x = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_x - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_x$$

となるので、式 (36) の左辺を得る。

8 ベクトルの空間積分

一変数関数の場合と異なり、ベクトル解析では基本的に三次元空間内で定義された関数を取り扱う。したがって、積分範囲の定義も一変数関数のように区間で表すことはなく、線（単積分）、面積（二重積分）、体積（三重積分）となる。

8.1 線積分

三次元空間中の曲線 C は媒介変数 t を用いて一般に

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{x}} + y(t)\hat{\mathbf{y}} + z(t)\hat{\mathbf{z}} \quad (37)$$

と表すことができる。

このとき、 $\mathbf{r}$ の t に対する変化分の極限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \quad (38)$$

はこの曲線の接線ベクトルとなる。

区間 (t_1, t_2) における曲線の長さ l は、接線ベクトル $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ を用いて、

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| dt \quad (39)$$

で表される。

ベクトル関数 $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ の曲線 C 上の線積分は、

$$\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt \quad (40)$$

によって定義される。すなわち、線積分においてはベクトル関数と接線ベクトルとの内積を積分する。特に曲線 C が閉曲線の場合には、

$$\oint_C \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (41)$$

で表す。

8.2 面積分

三次元空間中の曲面 S は媒介変数 (u, v) を用いて一般に

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\hat{\mathbf{x}} + y(u, v)\hat{\mathbf{y}} + z(u, v)\hat{\mathbf{z}} \quad (42)$$

と表すことができる。

このとき、 $\mathbf{r}$ の u 及び v に対する変化分の極限

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta u} = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \quad (43)$$

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta v} = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \quad (44)$$

は、いずれもこの曲面の接線ベクトルとなる。したがって平面

$$\mathbf{r}(u, v) + \alpha \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} + \beta \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}, \quad \forall \alpha, \beta \quad (45)$$

は $\mathbf{r}(u, v)$ における S の接平面となる。また、

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \quad (46)$$

は $\mathbf{r}(u, v)$ における S の法線ベクトルといい、その大きさは $du dv$ に対応する面積に対応する。

区間 $u \in (u_1, u_2), v \in (v_1, v_2)$ における曲面の面積 A は、法線ベクトル $\mathbf{n}(u, v)$ を用いて、

$$A = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} |\mathbf{n}(u, v)| du dv \quad (47)$$

で表される。

ベクトル関数 $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ の曲面 S 上の面積分は、

$$\iint_S \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{n} = \iint_S \mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \right) du dv \quad (48)$$

によって定義される。すなわち、面積分においてはベクトル関数と法線ベクトルとの内積を積分する。特に曲面 S が閉曲面の場合には、

$$\oint_S \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{n} \quad (49)$$

で表す。

9 体積分

三次元空間中での定積分の積分範囲は体積 V の形で与えられ、

$$\iiint_V f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (50)$$

と表す。

10 勾配 (gradient)

10.1 二次元の場合

x, y の関数 $f(x, y)$ は, (x, y, f) の三次元空間において曲面を表す. 勾配は, この曲面がもっとも傾いている方向とその傾きの大きさを表すために考えられたものである.

具体的に, 点 (x_0, y_0) における関数 $f(x, y)$ の勾配を考えてみる. x 軸から y 軸に向かって φ' だけ回転した方向を ρ' 方向とする². (x, y) 平面上で点 (x_0, y_0) を通り $\hat{\rho}'$ に平行な直線を考え, これを f 方向に伸ばした鉛直面を考える. この鉛直面の方程式は,

$$(x - x_0) \sin \varphi' - (y - y_0) \cos \varphi' = 0 \quad (51)$$

で表される. 曲面 $f(x, y)$ の (x_0, y_0) における $\hat{\rho}'$ 方向の傾きを考えるために, 鉛直面と曲面の交線を, 点 (x_0, y_0) を原点として, ρ' を変数とする関数 $g(\rho')$ として,

$$g(\rho') = f(\rho' \cos \varphi' - x_0, \rho' \sin \varphi' - y_0) \quad (52)$$

と定義する. $g(\rho')$ の $\rho' = 0$ における傾きは

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g}{\partial \rho'} \right|_{\rho'=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial \rho'} f(\rho' \cos \varphi' - x_0, \rho' \sin \varphi' - y_0) \right|_{\rho'=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right|_{x=x_0, y=y_0} \left. \frac{\partial x}{\partial \rho'} \right|_{\rho'=0} + \left. \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right|_{x=x_0, y=y_0} \left. \frac{\partial y}{\partial \rho'} \right|_{\rho'=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right|_{x=x_0, y=y_0} \left. \frac{\partial}{\partial \rho'} (\rho' \cos \varphi' - x_0) \right|_{\rho'=0} + \left. \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right|_{x=x_0, y=y_0} \left. \frac{\partial}{\partial \rho'} (\rho' \sin \varphi' - y_0) \right|_{\rho'=0} \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} \cos \varphi' + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} \sin \varphi' \end{aligned} \quad (53)$$

と表される. このとき, 関数 f の勾配 $\text{grad} f(x, y)$ をベクトル関数として

$$\text{grad} f(x, y) = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (54)$$

と定義すると,

$$\hat{\rho}' = \hat{x} \cos \varphi' + \hat{y} \sin \varphi' \quad (55)$$

より,

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \rho'} \right|_{\rho'=0} = \text{grad} f(x, y) \Big|_{x=x_0, y=y_0} \cdot \hat{\rho}' \quad (56)$$

が成立する. ベクトルの内積の定義

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \psi \quad (57)$$

より, 傾き $\frac{\partial g}{\partial \rho'}$ の値が最大となる ρ' の方向では, $\hat{\rho}'$ は $\text{grad} f$ と平行となり, そのときの傾きは $|\text{grad} f|$ に等しくなる. すなわち, $\text{grad} f$ は関数 f がもっとも傾いている方向とその傾きの大きさを表すことがわかる.

²原点に関する円筒座標系と区別するために, ' を付加している. なお, 偏微分が含まれる計算では, ' を微分記号として扱うことはしない. また, この講義では $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ のように下付文字で偏微分を表すこともしない.

10.2 三次元の場合

x, y, z の関数 $f(x, y, z)$ は、もはや幾何学的に表現することは不可能であるが、勾配

$$\text{grad} f(x, y, z) = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (58)$$

は、二次元の場合と同じく、関数 f の変化が一番大きな方向とその変化の傾きの大きさを表す。

10.3 ナブラ記号

ベクトルの微分を表す演算子としてナブラ記号

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (59)$$

がよく用いられる。ナブラ記号はベクトルの微分の直角座標系における成分表示を記号化したものであり、形式的な演算が可能となるために広く用いられている。ナブラ記号を用いると、勾配は

$$\text{grad} f = \nabla f \quad (60)$$

と表すことができる。なお、ナブラ記号は演算子であるため、交換法則は成り立たない。

10.4 勾配と線積分

曲線 C の始点を $\mathbf{r}_0$ 、終点を $\mathbf{r}_1$ とすると、

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}_0) \quad (61)$$

が成り立つ。このことは、次のようにして説明できる。

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \left(\hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (\hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz) \\ &= \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \\ &= \int_C df \\ &= f(\mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (62)$$

特に C が閉曲線の場合には

$$\oint_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (63)$$

となる。

10.5 直角座標系以外での表記

直角座標系以外の場合には、成分表示で説明することは難しいので、勾配の定義にさかのぼって考えることにする。位置 $\mathbf{r}_0 = \hat{x}x_0 + \hat{y}y_0 + \hat{z}z_0$ の近傍 $\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}$ を考える。ただし、

$$d\mathbf{r} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz \quad (64)$$

である。このとき、Taylor 展開および勾配の定義より

$$f(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) \simeq f(\mathbf{r}_0) + dx \left. \frac{\partial}{\partial x} f(\mathbf{r}) \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} + dy \left. \frac{\partial}{\partial y} f(\mathbf{r}) \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} + dz \left. \frac{\partial}{\partial z} f(\mathbf{r}) \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} = f(\mathbf{r}_0) + d\mathbf{r} \cdot \nabla f(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \quad (65)$$

が成立する。

10.5.1 円筒座標系

円筒座標系では、

$$\mathbf{r} = \hat{\rho}\rho + \hat{z}z = \hat{x}\rho \cos \varphi + \hat{y}\rho \sin \varphi + \hat{z}z \quad (66)$$

と表すことができるので、微分 $d\mathbf{r}$ は

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz \\ &= (\hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi) d\rho + (-\hat{x}\rho \sin \varphi + \hat{y}\rho \cos \varphi) d\varphi + \hat{z} dz \\ &= \hat{\rho} d\rho + \hat{\varphi} \rho d\varphi + \hat{z} dz \end{aligned} \quad (67)$$

で表される。これを、式 (65)

$$df = d\mathbf{r} \cdot \nabla f \quad (68)$$

に代入すると、

$$\hat{\rho} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \quad (69)$$

$$\hat{\varphi} \cdot \nabla f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (70)$$

$$\hat{z} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (71)$$

を得る。

11 発散 (divergence)

x, y, z に関するベクトル関数 $\mathbf{f}(x, y, z)$ を考える³。xyz 空間上の有限な体積 V を考え、その周囲を表す閉曲面を ∂V で表す。 ∂V を横切るベクトル関数 $\mathbf{f}(x, y, z)$ の総計は、

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} \quad (72)$$

で表される。法線ベクトル $d\mathbf{S} = \hat{n}dS$ は閉曲面 ∂V に垂直外向きに定義される。 $\mathbf{f}$ 全体の中で閉曲面を横切るのは法線に平行な成分のみとなるため、法線ベクトルと $\mathbf{f}$ との内積をとっている。

この積分値を体積で正規化し、 (x_0, y_0, z_0) を中心としてゼロに近づけた値を (x_0, y_0, z_0) における発散と定義する。

$$\text{div} \mathbf{f} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\partial V} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}}{V} \quad (73)$$

すなわち、 (x_0, y_0, z_0) の周囲における発散（湧き出し）量を単位体積当りに換算したものが $\text{div} \mathbf{f}$ である。

³想定しているのは水の湧き出しによって生じる流速や電荷によって生じる電界である。

特に V として, (x_0, y_0, z_0) を中心に, 各辺が x, y, z 軸に平行な微小直方体を考える. 各辺の長さを dx, dy, dz とし, 外向き法線ベクトルが $\hat{x}, -\hat{x}, \hat{y}, -\hat{y}, \hat{z}, -\hat{z}$ となる面をそれぞれ $S_{x+}, S_{x-}, S_{y+}, S_{y-}, S_{z+}, S_{z-}$ とする. このとき, 各面における湧き出し量は次のように求めることができる.

$$\begin{aligned}\iint_{S_{x+}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_{x+}} \mathbf{f} \cdot \hat{x} dydz = f_x(x_0 + \frac{1}{2}dx, y_0, z_0) dydz \\ &= [f_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2}dx \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y_0, z_0)|_{x=x_0}] dydz\end{aligned}\quad (74)$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_{x-}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_{x-}} \mathbf{f} \cdot (-\hat{x}) dydz = -f_x(x_0 - \frac{1}{2}dx, y_0, z_0) dydz \\ &= -[f_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{2}dx \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y_0, z_0)|_{x=x_0}] dydz\end{aligned}\quad (75)$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_{y+}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_{y+}} \mathbf{f} \cdot \hat{y} dzdx = f_y(x_0, y_0 + \frac{1}{2}dy, z_0) dzdx \\ &= [f_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2}dy \frac{\partial}{\partial y} f_y(x_0, y, z_0)|_{y=y_0}] dzdx\end{aligned}\quad (76)$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_{y-}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_{y-}} \mathbf{f} \cdot (-\hat{y}) dzdx = -f_y(x_0, y_0 - \frac{1}{2}dy, z_0) dzdx \\ &= -[f_y(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{2}dy \frac{\partial}{\partial y} f_y(x_0, y, z_0)|_{y=y_0}] dzdx\end{aligned}\quad (77)$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_{z+}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_{z+}} \mathbf{f} \cdot \hat{z} dxdy = f_z(x_0, y_0, z_0 + \frac{1}{2}dz) dxdy \\ &= [f_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2}dz \frac{\partial}{\partial z} f_z(x_0, y_0, z)|_{z=z_0}] dxdy\end{aligned}\quad (78)$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_{z-}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_{z-}} \mathbf{f} \cdot (-\hat{z}) dxdy = -f_z(x_0, y_0, z_0 - \frac{1}{2}dz) dxdy \\ &= -[f_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{2}dz \frac{\partial}{\partial z} f_z(x_0, y_0, z)|_{z=z_0}] dxdy\end{aligned}\quad (79)$$

なお, 微小量に対する一次の Taylor 展開

$$f(x + dx, y, z) = f(x, y, z) + dx \frac{\partial f}{\partial x} \quad (80)$$

を用いた. これより,

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = dxdydz \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) \quad (81)$$

を得るので,

$$dxdydz = V \quad (82)$$

よりただちに

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}}{V} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} \quad (83)$$

を得る⁴.

⁴通常の教科書ではこちらを定義としていることが多いが, 本講義では微分のもつ意味から定義する方針である.

11.1 ガウスの定理

発散が単位体積あたりの湧き出し量であることに留意すると、体積 V 内の総湧き出し量は $\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} dV$ で与えられる。この体積を微小領域に分割して、発散の定義式

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}}{V} \quad (84)$$

に代入してみると、右辺は微小領域の境界が体積 V の内部にある場合は隣接する微小領域間で打ち消しあうため、 V の表面 ∂V 上の積分のみが残る。すなわち、

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} dV = \oiint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} \quad (85)$$

が成立する。この式をガウスの定理とよぶ。ガウスの定理は、有限体積内から湧き出すベクトルの総量が表面上を直交するベクトルの総量に等しくなることを示している。

11.2 直角座標系以外での表記

直角座標系以外の場合でも、発散の定義 (72) にさかのぼって考えればよい。

11.2.1 円筒座標系

ρ, φ, z に関するベクトル関数 $\mathbf{f}(\rho, \varphi, z)$ を考える。 $\rho\varphi z$ 空間上に、体積 V として、 (ρ_0, φ_0, z_0) を中心に、各辺が ρ, φ, z 軸に平行な部分円筒殻を考え、その表面を ∂V で表す。各軸方向の微小範囲を $d\rho, d\varphi, dz$ とし、外向き法線ベクトルが $\hat{\rho}, -\hat{\rho}, \hat{\varphi}, -\hat{\varphi}, \hat{z}, -\hat{z}$ となる面をそれぞれ $S_{\rho+}, S_{\rho-}, S_{\varphi+}, S_{\varphi-}, S_{z+}, S_{z-}$ とする。このとき、各面における湧き出し量は次のように求めることができる。

$$\iint_{S_{\rho+}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_{\rho+}} \mathbf{f} \cdot \hat{\rho} \rho d\varphi dz = f_\rho(\rho_0 + \frac{1}{2}d\rho, \varphi_0, z_0) \left(\rho + \frac{1}{2}d\rho \right) d\varphi dz \quad (86)$$

$$\iint_{S_{\rho-}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_{\rho-}} \mathbf{f} \cdot (-\hat{\rho}) \rho d\varphi dz = -f_\rho(\rho_0 - \frac{1}{2}d\rho, \varphi_0, z_0) \left(\rho - \frac{1}{2}d\rho \right) d\varphi dz \quad (87)$$

$$\iint_{S_{\varphi+}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_{\varphi+}} \mathbf{f} \cdot \hat{\varphi} dz d\rho = f_\varphi(\rho_0, \varphi_0 + \frac{1}{2}d\varphi, z_0) dz d\rho \quad (88)$$

$$\iint_{S_{\varphi-}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_{\varphi-}} \mathbf{f} \cdot (-\hat{\varphi}) dz d\rho = -f_\varphi(\rho_0, \varphi_0 - \frac{1}{2}d\varphi, z_0) dz d\rho \quad (89)$$

$$\iint_{S_{z+}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_{z+}} \mathbf{f} \cdot \hat{z} \rho d\rho d\varphi = f_z(\rho_0, \varphi_0, z_0 + \frac{1}{2}dz) \rho d\rho d\varphi \quad (90)$$

$$\iint_{S_{z-}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_{z-}} \mathbf{f} \cdot (-\hat{z}) \rho d\rho d\varphi = -f_z(\rho_0, \varphi_0, z_0 - \frac{1}{2}dz) \rho d\rho d\varphi \quad (91)$$

微小量に対する一次の Taylor 展開 (80) を用いると、

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \rho d\rho d\varphi dz \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho f_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) \quad (92)$$

を得るので、

$$\rho d\rho d\varphi dz = V \quad (93)$$

よりただちに

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho f_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad (94)$$

を得る。

12 回転 (rotation)

x, y, z に関するベクトル関数 $\mathbf{f}(x, y, z)$ を考える⁵. xyz 空間上の有限な面積 S を考え, その周囲を表す閉曲線を ∂S で表す. ベクトル関数 $\mathbf{f}(x, y, z)$ の ∂S に沿った成分の総計は,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} \quad (95)$$

で表される. 接線ベクトル $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$ は曲面の法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ に対して右ねじの向きに定義される. $\mathbf{f}$ 全体の中で閉曲線に沿うのは接線成分のみとなるため, 接線ベクトルと $\mathbf{f}$ との内積をとっている.

この積分値を面積で正規化し, (x_0, y_0, z_0) を中心としてゼロに近づけた値を, (x_0, y_0, z_0) における回転の $\hat{\mathbf{n}}$ 成分と定義する.

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \text{rot} \mathbf{f} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial S} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l}}{S} \quad (96)$$

すなわち, (x_0, y_0, z_0) の周囲における $\hat{\mathbf{n}}$ に対する右ねじ方向の回転 (渦) 量を単位面積当りに換算したものが $\hat{\mathbf{n}} \cdot \text{rot} \mathbf{f}$ である.

特に S として, (x_0, y_0, z_0) を中心に, 法線がそれぞれ x, y, z 軸に平行な 3 通りの微小長方形を考える. 各辺の長さを dx, dy, dz とし, 法線ベクトルが $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ となる面をそれぞれ S_x, S_y, S_z とする. このとき, 各面における渦の量は次のように求めることができる.

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S_x} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} &= f_y(x_0, y_0, z_0 - \frac{1}{2}dz)dy + f_z(x_0, y_0 + \frac{1}{2}dy, z_0)dz \\ &\quad - f_y(x_0, y_0, z_0 + \frac{1}{2}dz)dy - f_z(x_0, y_0 - \frac{1}{2}dy, z_0)dz \\ &= [f_y(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{2}dz \frac{\partial}{\partial z} f_y(x_0, y_0, z)|_{z=z_0}]dy + [f_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2}dy \frac{\partial}{\partial y} f_z(x_0, y, z_0)|_{y=y_0}]dz \\ &\quad - [f_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2}dz \frac{\partial}{\partial z} f_y(x_0, y_0, z)|_{z=z_0}]dy - [f_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{2}dy \frac{\partial}{\partial y} f_z(x_0, y, z_0)|_{y=y_0}]dz \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y} f_z(x_0, y, z_0)|_{y=y_0} - \frac{\partial}{\partial z} f_y(x_0, y_0, z)|_{z=z_0} \right\} dydz \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S_y} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} &= f_z(x_0 - \frac{1}{2}dx, y_0, z_0)dz + f_x(x_0, y_0, z_0 + \frac{1}{2}dz)dx \\ &\quad - f_z(x_0 + \frac{1}{2}dx, y_0, z_0)dz - f_x(x_0, y_0, z_0 - \frac{1}{2}dz)dx \\ &= [f_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{2}dx \frac{\partial}{\partial x} f_z(x, y_0, z_0)|_{x=x_0}]dz + [f_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2}dz \frac{\partial}{\partial z} f_x(x_0, y_0, z)|_{z=z_0}]dx \\ &\quad - [f_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2}dx \frac{\partial}{\partial x} f_z(x, y_0, z_0)|_{x=x_0}]dz - [f_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{2}dz \frac{\partial}{\partial z} f_x(x_0, y_0, z)|_{z=z_0}]dx \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial z} f_x(x_0, y_0, z)|_{z=z_0} - \frac{\partial}{\partial x} f_z(x, y_0, z_0)|_{x=x_0} \right\} dzdx \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S_z} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} &= f_x(x_0, y_0 - \frac{1}{2}dy, z_0)dx + f_y(x_0 + \frac{1}{2}dx, y_0, z_0)dy \\ &\quad - f_x(x_0, y_0 + \frac{1}{2}dy, z_0)dx - f_y(x_0 - \frac{1}{2}dx, y_0, z_0)dy \\ &= [f_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{2}dy \frac{\partial}{\partial y} f_x(x_0, y, z_0)|_{y=y_0}]dx + [f_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2}dx \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y_0, z_0)|_{x=x_0}]dy \\ &\quad - [f_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2}dy \frac{\partial}{\partial y} f_x(x_0, y, z_0)|_{y=y_0}]dx - [f_y(x_0, y_0, z_0) - \frac{1}{2}dx \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y_0, z_0)|_{x=x_0}]dy \end{aligned}$$

⁵想定しているのは水の渦によって生じる力や電流によって生じる磁界である.

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y_0, z_0)|_{x=x_0} - \frac{\partial}{\partial y} f_x(x_0, y, z_0)|_{y=y_0} \right\} dx dy \quad (99)$$

なお，発散のときと同じく微小量に対する一次の Taylor 展開 (80) を用いた．このとき，微小面積の定義

$$S_x = dydz \quad (100)$$

$$S_y = dzdx \quad (101)$$

$$S_z = dxdy \quad (102)$$

より，ただちに

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \text{rot} \mathbf{f} = \lim_{S_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial S_x} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}}{S_x} = \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \quad (103)$$

$$\hat{\mathbf{y}} \cdot \text{rot} \mathbf{f} = \lim_{S_y \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial S_y} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}}{S_y} = \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \quad (104)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \text{rot} \mathbf{f} = \lim_{S_z \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial S_z} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}}{S_z} = \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \quad (105)$$

を得る⁶．また，これらをまとめて，

$$\text{rot} \mathbf{f} = \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) = \nabla \times \mathbf{f} \quad (106)$$

と表すことができる．

12.1 ストークスの定理

回転が単位面積あたりの渦の量であることに留意すると，面積 S 内の総渦量は $\iint_S \text{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ で与えられる．この面積を微小領域に分割して，回転の定義式

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \text{rot} \mathbf{f} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}}{S} \quad (107)$$

に代入してみると，右辺は微小領域の境界が面積 S の内部にある場合は隣接する微小領域間で打ち消しあうため， S の周囲 ∂S 上の積分のみが残る．すなわち，

$$\iint_S \text{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} \quad (108)$$

が成立する．この式をストークスの定理とよぶ．ストークスの定理は，有限面積内に存在する渦の総量が外周上における接線ベクトルの総計に等しくなることを示している．

12.2 直角座標系以外での表記

直角座標系以外の場合でも，回転の定義 (96) にさかのぼって考えればよい．

12.2.1 円筒座標系

ρ, φ, z に関するベクトル関数 $\mathbf{f}(\rho, \varphi, z)$ を考える． ρ, φ, z 空間上に，面積 S として， (ρ_0, φ_0, z_0) を中心に，法線がそれぞれ ρ, φ, z 軸に平行な 3 通りの微小長方形⁷ を考える．各軸方向の微小範囲を

⁶通常の教科書ではこちらを定義としていることが多いが，本講義では微分のもつ意味から定義する方針である．

⁷ ρ 軸に垂直な図形は厳密には部分円筒面となる． z 軸に垂直な図形は厳密にはバウムクーヘン形となる．

$d\rho, d\varphi, dz$ とし、法線ベクトルが $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$ となる面をそれぞれ S_ρ, S_φ, S_z とする。このとき、各面における渦の量は次のように求めることができる。

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S_\rho} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} &= f_\varphi(\rho_0, \varphi_0, z_0 - \frac{1}{2}dz)\rho d\varphi + f_z(\rho_0, \varphi_0 + \frac{1}{2}d\varphi, z_0)dz \\ &\quad - f_\varphi(\rho_0, \varphi_0, z_0 + \frac{1}{2}dz)\rho d\varphi - f_z(\rho_0, \varphi_0 - \frac{1}{2}d\varphi, z_0)dz \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} f_z(\rho_0, \varphi, z_0)|_{\varphi=\varphi_0} d\varphi dz - \frac{\partial}{\partial z} f_\varphi(\rho_0, \varphi_0, z)|_{z=z_0} \rho d\varphi dz\end{aligned}\quad (109)$$

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S_\varphi} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} &= f_z(\rho_0 - \frac{1}{2}d\rho, \varphi_0, z_0)dz + f_\rho(\rho_0, \varphi_0, z_0 + \frac{1}{2}dz)d\rho \\ &\quad - f_z(\rho_0 + \frac{1}{2}d\rho, \varphi_0, z_0)dz - f_\rho(\rho_0, \varphi_0, z_0 - \frac{1}{2}dz)d\rho \\ &= \frac{\partial}{\partial z} f_\rho(\rho, \varphi, z)|_{z=z_0} dz d\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} f_z(\rho, \varphi_0, z_0)|_{\rho=\rho_0} dz d\rho\end{aligned}\quad (110)$$

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S_z} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} &= f_\rho(\rho_0, \varphi_0 - \frac{1}{2}d\varphi, z_0)d\rho + f_\varphi(\rho_0 + \frac{1}{2}d\rho, \varphi_0, z_0)\left(\rho_0 + \frac{1}{2}d\rho\right)d\varphi \\ &\quad - f_\rho(\rho_0, \varphi_0 + \frac{1}{2}d\varphi, z_0)d\rho - f_\varphi(\rho_0 - \frac{1}{2}d\rho, \varphi_0, z_0)\left(\rho_0 - \frac{1}{2}d\rho\right)d\varphi \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho f_\varphi(\rho, \varphi_0, z_0) \right\} \Big|_{\rho=\rho_0} d\rho d\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\rho(\rho_0, \varphi, z_0)|_{\varphi=\varphi_0} d\rho d\varphi\end{aligned}\quad (111)$$

このとき、微小面積の定義

$$S_\rho = \rho d\varphi dz \quad (112)$$

$$S_\varphi = dz d\rho \quad (113)$$

$$S_z = \rho d\rho d\varphi \quad (114)$$

より、ただちに

$$\hat{\rho} \cdot \text{rot} \mathbf{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial z} \quad (115)$$

$$\hat{\varphi} \cdot \text{rot} \mathbf{f} = \frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial \rho} \quad (116)$$

$$\hat{z} \cdot \text{rot} \mathbf{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho f_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_\rho}{\partial \varphi} \quad (117)$$

を得る。

13 補足

ベクトル解析の有する物理的な意味は引き続き電磁気学にて説明する。また、ベクトル解析で重要な内容のうち、工学数学 C で網羅できなかった以下の内容についても電磁気学の講義内で取り扱う予定である。

1. グリーンの定理
2. ヘルムホルツの定理

14 課題

1. 極座標系の各成分（式 (7)-(9)）を，図を描き導出せよ．
2. $\text{grad } f$ の極座標系の各成分を円筒座標系と同様の手順で求めよ．
3. $\text{div } \mathbf{f}$ の極座標系の各成分を円筒座標系と同様の手順で求めよ．
4. $\text{rot } \mathbf{f}$ の極座標系の各成分を円筒座標系と同様の手順で求めよ．

教科書について

ベクトル解析については多くの教科書が出版されているが，本講義では教科書は使用しない．以下の教科書 [1, 2, 4] を参考としているが，各項目の順番は異なっている．現在，Wiley 社の E ブックトライアルを実施しているので，[5, 6] は無料ダウンロード可能である．

参考文献

- [1] 矢野健太郎, 石原繁, ベクトル解析, 基礎解析学コース, 裳華房, 1995.
- [2] E. Kreyszig, **Advanced Engineering Mathematics**, 8th eds., John Wiley and Sons, 1999.
- [3] E. クライツィグ, 堀素夫（訳）, 線形代数とベクトル解析, 技術者のための高等数学 2, 培風館, 2003.
- [4] 松森徳衛（編）, エレクトロニクスのための電磁気学例題演習, コロナ社, 1990.
- [5] H.J. Visser, **Antenna Theory and Applications**, Ch. 3, John Wiley and Sons, 2012.
<http://onlinelibrary.wiley.com/book/10.1002/9781119944751>
- [6] S.S. Bayin, **Essentials of Mathematical Methods in Science and Engineering**, Ch. 2, John Wiley and Sons, 2008. <http://onlinelibrary.wiley.com/book/10.1002/9780470378045>