現代経済の諸問題
Ⅶ 耐戦略性とギバード・サタースウェイトの定理

山邑紘史
yamamura-h@soc.titech.ac.jp

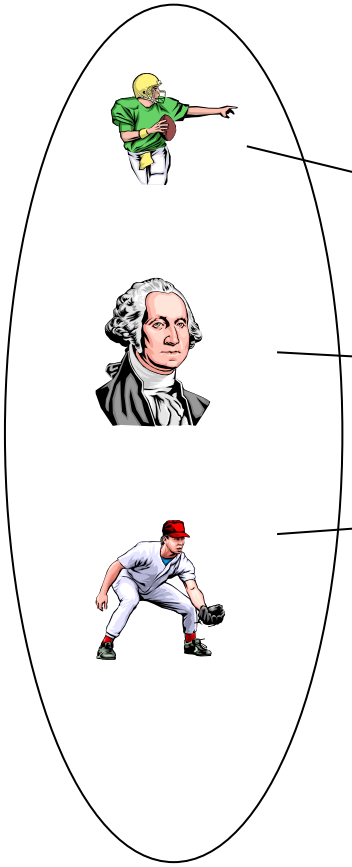
選好（評価関数）の集計

- 社会厚生（汎）関数
  - 投票者の選択肢に対する選好（評価関数）を集計して，選択肢間に対する社会的な順序を決定
- 社会厚生（汎）関数に基づく集計を行うためは，投票者の真の選好（評価関数）を知る必要がある

⇒投票者の真の選好は常に観察可能なのか？

社会選択関数(定義)

投票者



選好をインプット

$\succ_1$

$\succ_2$

$\succ_3$

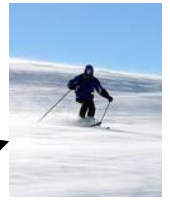
社会選択関数

f

集計結果をアウトプット

$f(\succ)$

選択肢の集合，A



ski

hot spring

ocean

社会選択関数の例

- 相対多数決ルール(Plurality Rule), f_p

選好組 $\succsim$ に対して,

- $T\left(\succsim_i\right) \equiv \left\{a \in A : \forall b \in A, a \succsim_i b\right\}$

・・・投票者iにとって最も好ましい選択肢

$P\left(\succsim\right) \equiv$

・・・多数派選択肢(最も好む人が最も多い選択肢)の集合

- $f_p\left(\succsim\right) \in P\left(\succsim\right)$

社会選択関数の例

- ボルダルール，f_B

社会選択関数の例

- 独裁ルール（投票者iが独裁者），f_{D_i}

社会選択関数の戦略的操作

- $N=\{1,2,3\}, A=\{a,b,c,d\}$, $\succsim_1 : a \succ_1 b \succ_1 c \succ_1 d$,
  $\succsim_2 : d \succ_2 c \succ_2 b \succ_2 a$, $\succsim_3 : d \succ_3 c \succ_3 b \succ_3 a$

とし，ボルダ・ルール f_B にしたがって選択肢が採用されるものとする。

このとき1は

と選好を表明することによって，

とできるため，

社会選択関数の戦略的操作

- 投票者の真の選好：現実には投票者の申告に基づいて判断するしかない。
- しかし前頁の例のように，虚偽の選好を表明することによって，投票者個人にとってより望ましい帰結を引き出すことがありうる。

…

- 社会選択関数の戦略的操作を通じて，社会選択関数が指定しない選択肢が選ばれる可能性がある。

耐戦略性

- 社会選択関数の戦略的操作を防ぐためには，戦略的操作をしても投票者が得をしないようにする必要がある。
- 耐戦略性

社会選択関数が有すべき性質

定義域の非限定性 (UD: Unrestricted Domain)

・・・あらゆる状況において，社会的に望ましい選択肢を選び出すことができる。

社会選択関数が有すべき性質

パレート原理 (PP: Pareto Principle)

・・・投票者全員にとって望ましくない選択肢が選ばれることはない。

ギバード・サタースウェイトの定理

$\#A \geq 3$ のとき，「耐戦略性」「定義域の非限定性」「パレート原理」の3条件をみたす社会選択関数は独裁ルールのみである。

ギバード･サタースウェイトの定理の証明

- 簡単化のため，
  - 2投票者
  - 3選択肢
  - 強選好

  を仮定する。
- 選択肢の数が3個のとき，厳密な選好は6通り存在する。

⇒6 × 6 = 36 通りの選好組に対する集計結果を考えればよい。

耐戦略的な社会的意思決定

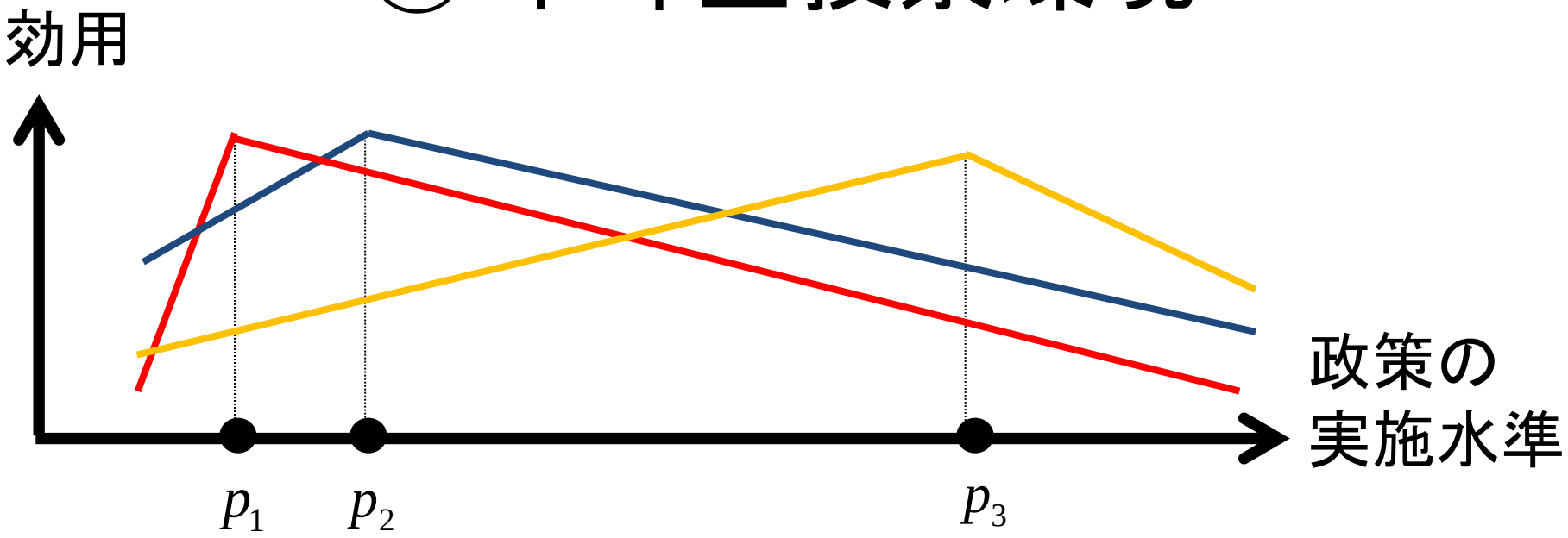
- ギバード・サタースウェイトの定理

⇒選好に関する制約がない（「定義域の非限定性」がみたされている）状況における耐戦略的な社会的意思決定の困難性

- 一方で，「定義域の非限定性」がみたされていない状況については，ギバード・サタースウェイトの定理の範囲外

⇒耐戦略的な社会的意思決定が可能となるかもしれない

① 単峰型投票環境



- 政策の実施水準について，**理想点**（p_1，p_2，p_3）により近い方が望ましい，という選好

⇒この環境においては，$p_1 \succ p_2, p_3 \succ p_2$ をみたすような選好は抱きえないので，

単峰型選好

- 選択肢の集合，$A \subseteq \mathfrak{R}$
- A 上の選好 $\succsim$ が単峰型選好

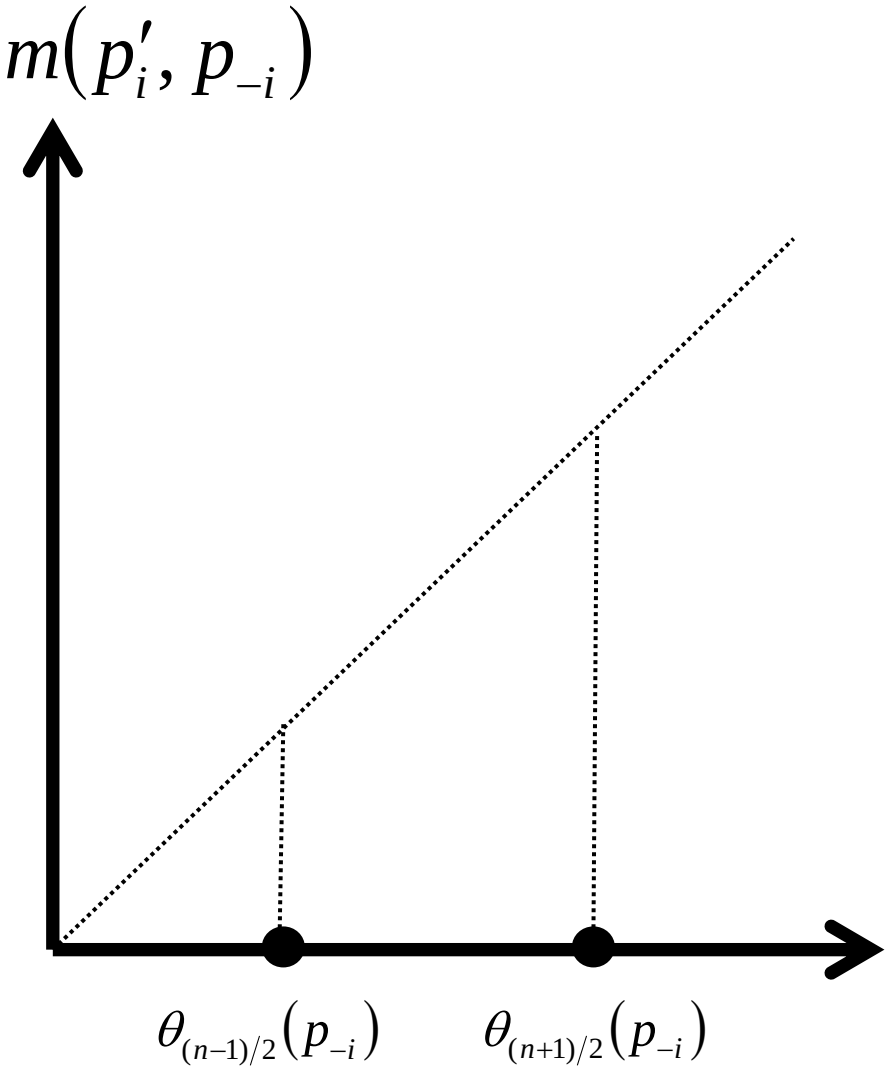
$\Leftrightarrow$

中位投票者ルールの耐戦略性(1/5)

- 中位投票者ルール（$\#N$が奇数であると仮定）

- 命題：中位投票者ルールは耐戦略的である

中位投票者ルールの耐戦略性(2/5)



- 記号の簡単化のため，
  $p(\succsim_i) = p_i$と表記
- $\theta_k(p_{-i})$:$(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n)$
の内,k番目に小さい数
- $p_i' < \theta_{(n-1)/2}(p_{-i})$

$\Rightarrow m(p_i', p_{-i}) = \theta_{(n-1)/2}(p_{-i})$

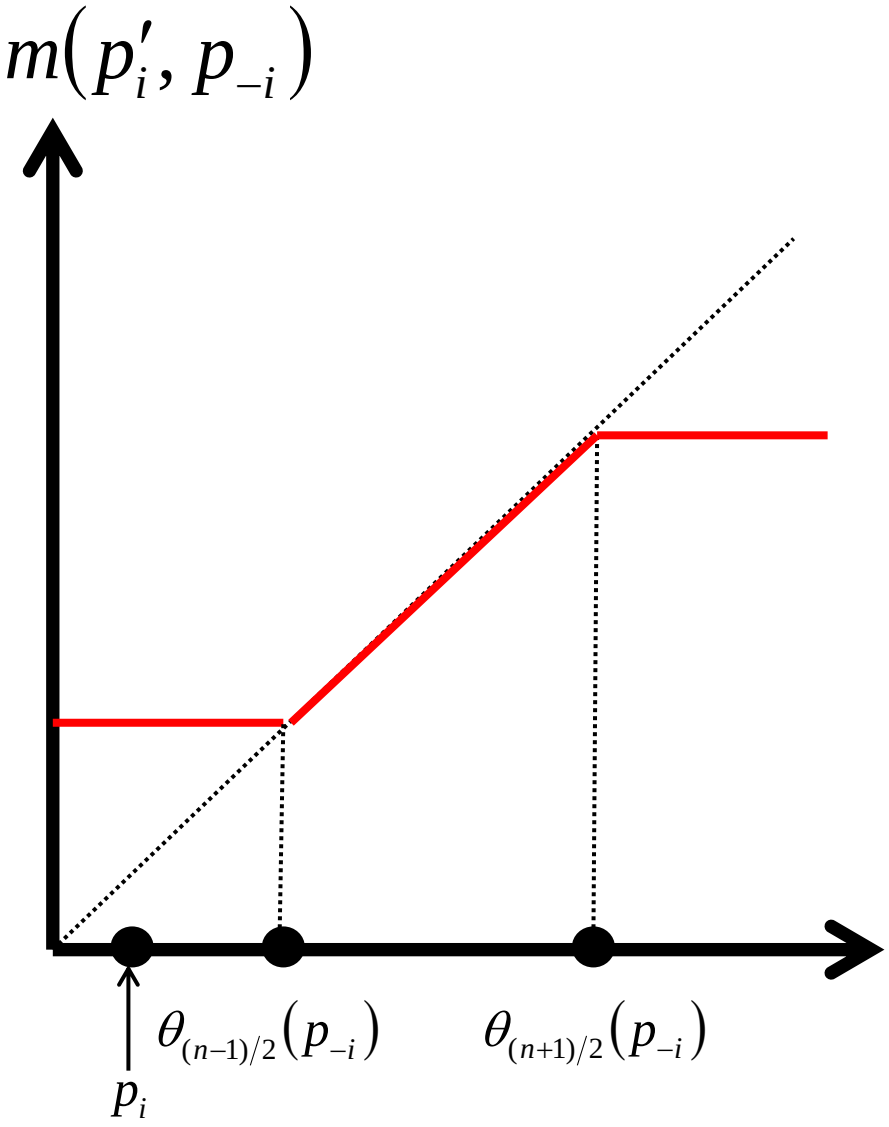
- $\theta_{(n+1)/2}(p_{-i}) \leq p_i' \leq \theta_{(n+1)/2}(p_{-i})$

$\Rightarrow m(p_i', p_{-i}) = p_i'$

- $\theta_{(n+1)/2}(p_{-i}) < p_i'$

$\Rightarrow m(p_i', p_{-i}) = \theta_{(n+1)/2}(p_{-i})$

中位投票者ルールの耐戦略性(3/5)



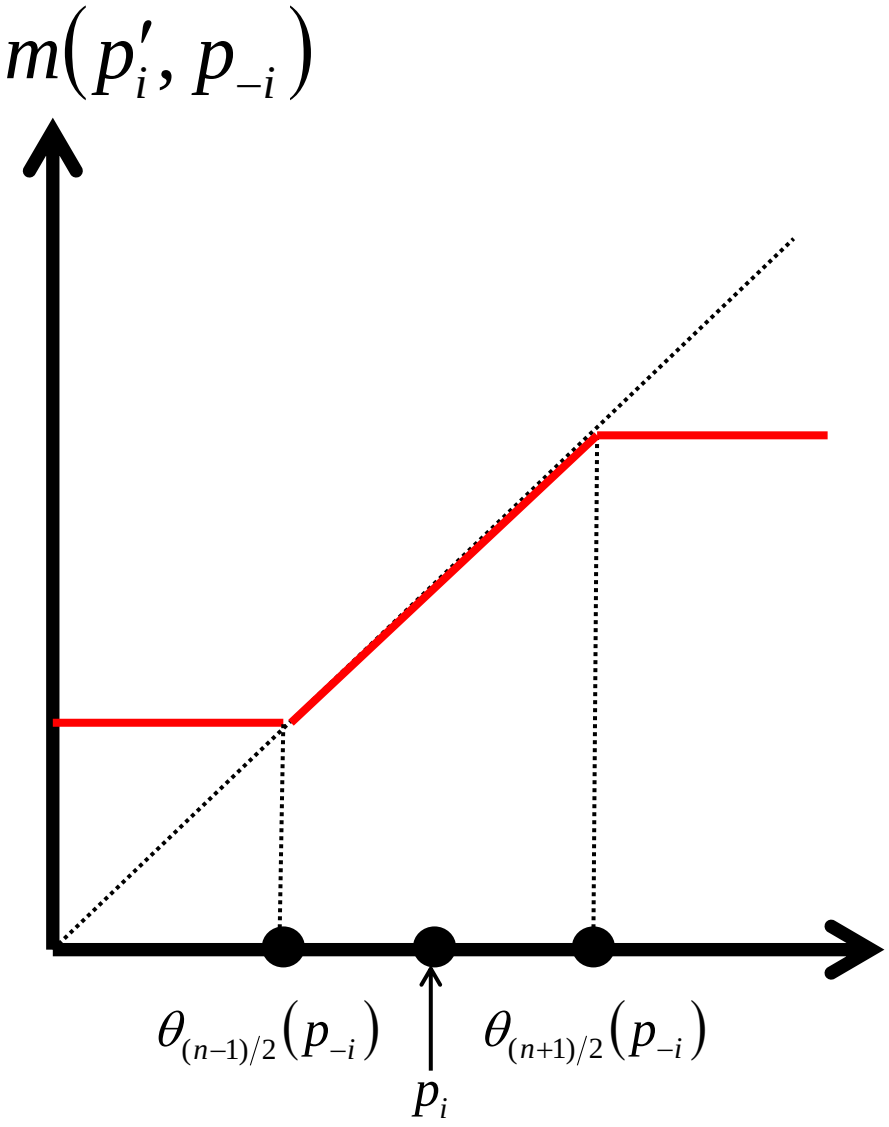
1. 真の選好が $p_i < \theta_{(n-1)/2}(p_{-i})$ であるとき

- 任意の表明される選好 p_i' に対して,

なので,

が成り立つ。

中位投票者ルールの耐戦略性(4/5)



2. 真の選好が

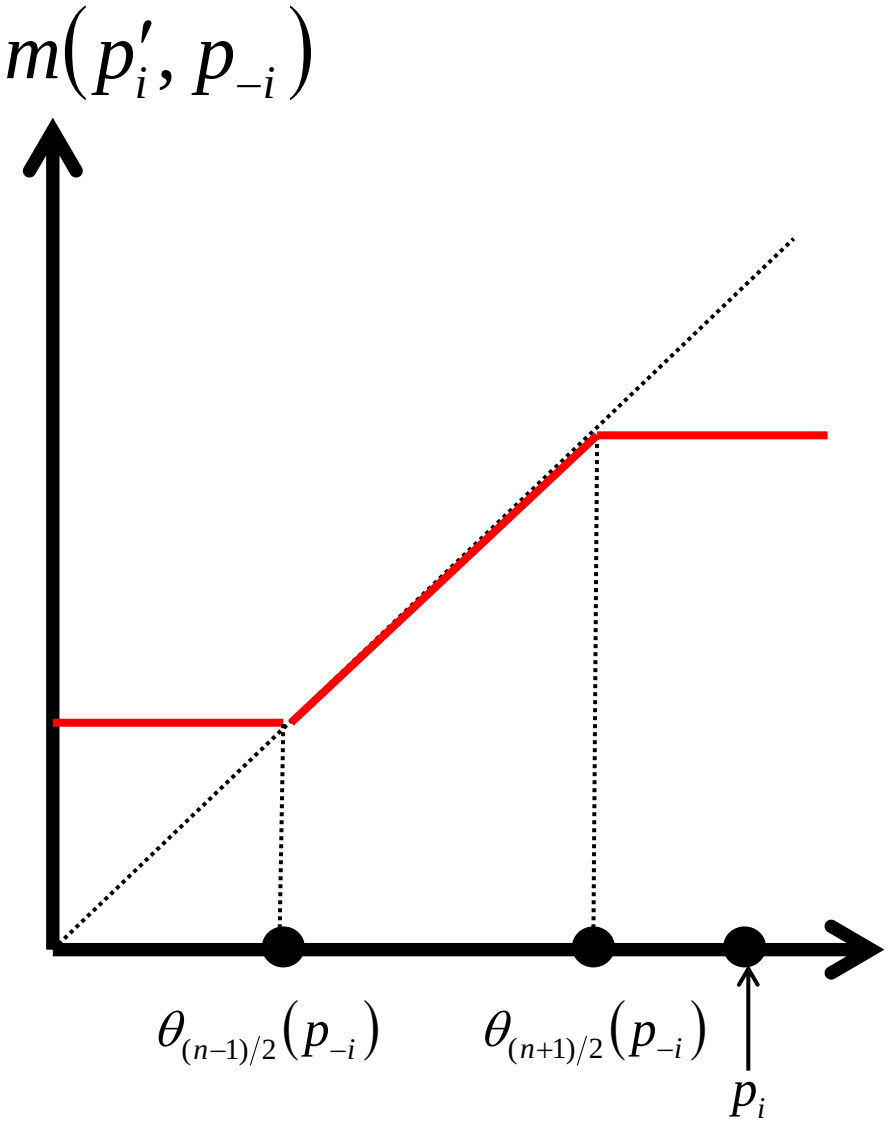
$\theta_{(n-1)/2}(p_{-i}) \leq p_i \leq \theta_{(n-1)/2}(p_{-i})$

のとき

- $f(p_i, p_{-i}) = p_i$ より，任意の表明される選好 p_i' に対して，

が成り立つ。

中位投票者ルールの耐戦略性(5/5)



3. 真の選好が $p_i > \theta_{(n+1)/2}(p_{-i})$ であるとき

- 任意の表明される選好 p_i' に対して,

なので,

が成り立つ。

耐戦略的な社会選択関数の特徴づけ

- 一般化中位投票者ルール（$\#N$は偶数でもよい）

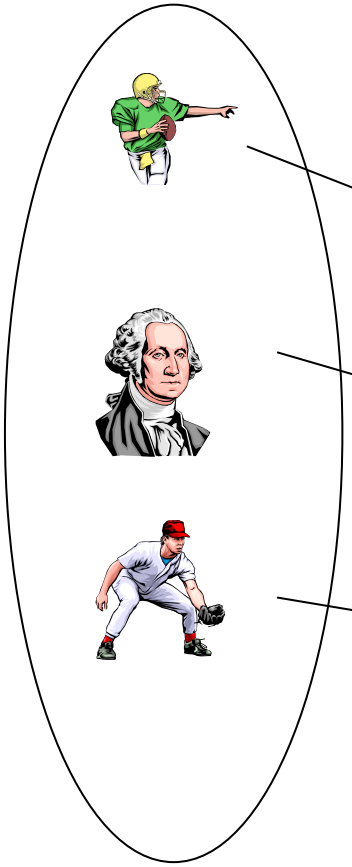
- ムーランの定理

単峰型投票環境において，「耐戦略性」「パレート原理」「匿名性」の3条件をみたす社会選択関数は一般化中位投票者ルールに限られる。

② オークション

入札者の集合

(=投票者の集合)



支払意思額を
インプット

v_1

v_2

v_3

オークションルール

= 社会選択関数

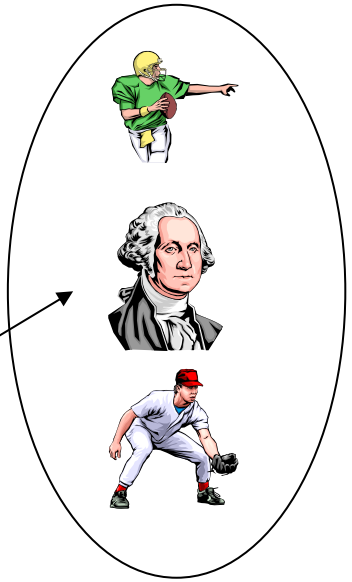
f

落札者をア
ウトプット

$f^N(v)$

落札者の集合×支払
ベクトルの集合

=選択肢の集合, A



×

支払ベクトル
をアウトプット

$f^P(v) \in \Re^N$

(t_1, t_2, t_3)

$(0, t_2', 0)$

オークションにおける「選択肢」

- オークションにおいては，入札者の表明した入札額にしたがって，「落札者」と「支払額」とが決定される。
- 落札者の集合 =
- 支払額の集合 =

⇒選択肢の集合=

オークションにおける「選好」

- 入札者iの支払意思額: v_i

⇒ 入札者の選好 $\succsim_i$ は以下の条件をみたすと仮定

1.
2.
3.

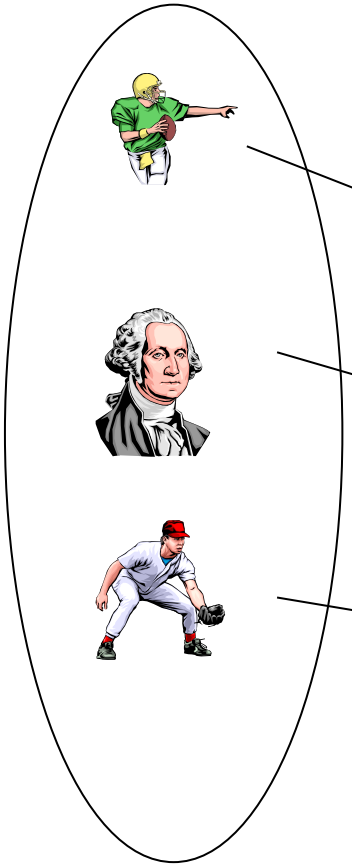
⇒ $\succsim_i$ は以下の効用関数によって表現される

$$u_i(j,t) =$$

セカンドプライスオークション

入札者の集合

(=投票者の集合)



支払意思額を
インプット

1700

1500

1300

オークションルール

= 社会選択関数

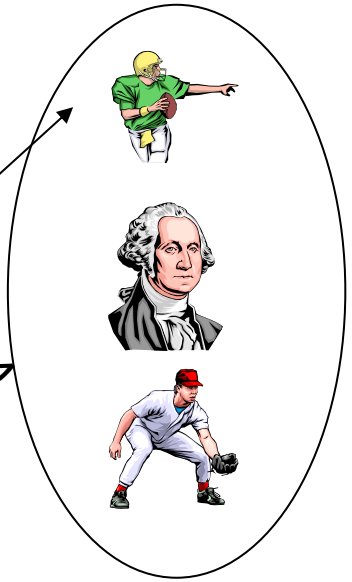
f

落札者の集合×支払
ベクトルの集合

=選択肢の集合, A

落札者をア
ウトプット

$f^N(v)=1$



×

支払ベクトル
をアウトプット

$f^P(v)$

$=(1500,0,0)$

(t_1,t_2,t_3)

セカンドプライスオークション（定義）

- 落札者の決定

- 支払ベクトルの決定

命題：セカンドプライスオークションは耐戦略的

セカンドプライスオークションの耐戦略性

- $\max v_{-i}$: i以外の支払意思額の最高額
- セカンドプライスオークションの定義より，iの表明した支払意思額 v_i' に対して

1.

⇒

2.

⇒

3.

⇒

セカンドプライスオークションの耐戦略性

（ケース1）真の支払意思額が $v_i > \max v_{-i}$ のとき

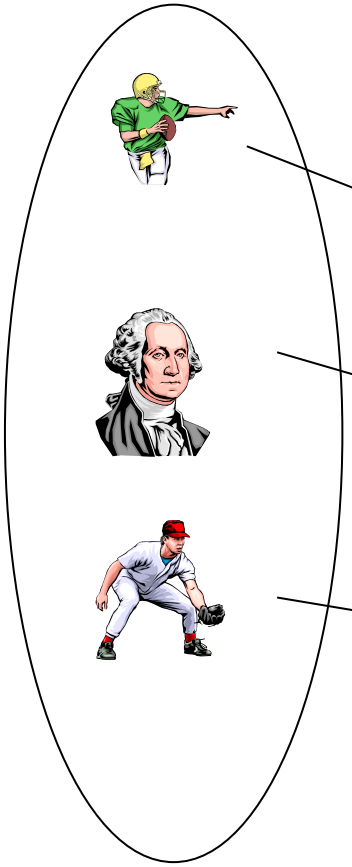
（ケース2）真の支払意思額が $v_i < \max v_{-i}$ のとき

（ケース3）真の支払意思額が $v_i = \max v_{-i}$ のとき

ファーストプライスオークション

入札者の集合

(=投票者の集合)



支払意思額を
インプット

1700

1500

1300

オークションルール

= 社会選択関数

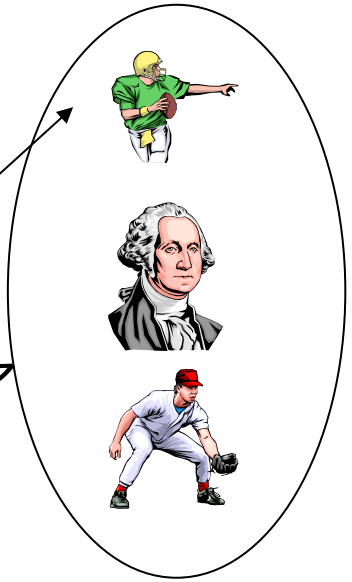
f

落札者の集合×支払ベクトルの集合

=選択肢の集合, A

落札者をアウトプット

$f^N(v)=1$



×

支払ベクトルをアウトプット

$f^P(v)$

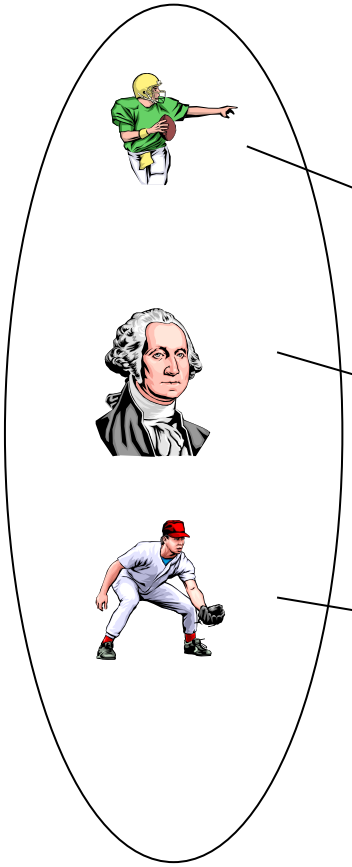
$=(1700,0,0)$

(t_1,t_2,t_3)

サードプライスオークション

入札者の集合

(=投票者の集合)



支払意思額を
インプット

1700

1500

1300

オークションルール

= 社会選択関数

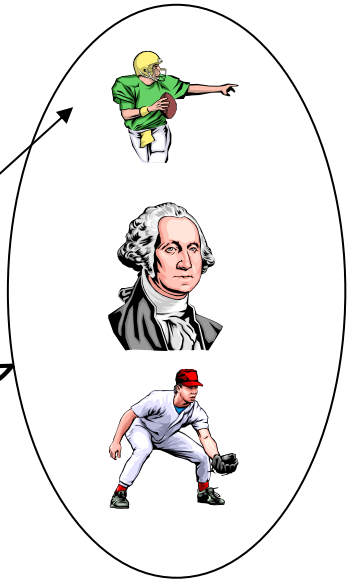
f

落札者の集合×支払ベクトルの集合

=選択肢の集合, A

落札者をアウトプット

$f^N(v)=1$



×

支払ベクトルをアウトプット

$f^P(v)$

$=(1300,0,0)$

(t_1,t_2,t_3)

ファースト（サード）プライスオークション

- 落札者の決定

セカンドプライスオークションと同じ。

- 支払ベクトルの決定