# 情報認識
# 「ベイズ推定法（第９章）」


- 担当教員：　杉山　将（計算工学専攻）
- 居室：　W8E-505
- 電子メール:　　sugi@cs.titech.ac.jp

# これまでの復習



- 最大事後確率則: $\displaystyle \operatorname*{arg\,max}_{y}\, p(y|x)$
- ベイズの定理より $p(y|x) \propto \underbrace{p(x|y)}_{\text{条件付き確率}}\underbrace{p(y)}_{\text{事前確率}}$
- 事前確率は各カテゴリの標本の割合で推定

$$\hat{p}(y) = n_y / n$$

- 本講義の主題: 条件付き確率をうまく推定したい
- 簡単のため, 条件付きでない確率密度関数 $p(x)$ を $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ から推定する問題を考える.

# 確率密度関数の推定



- パラメトリック法: モデルのパラメータを推定
  - 最尤推定法, EMアルゴリズム, 赤池の情報量規準
  - ベイズ推定法, 最大事後確率法, 経験ベイズ法
- ノンパラメトリック法: モデルを使わず直接確率密度関数を推定
  - カーネル密度推定法
  - 最近傍密度推定法

# パラメトリック法

- $\theta$ :パラメータ
- $\Theta$ :パラメータの定義域
- パラメトリックモデル $q(x;\theta)$ :有限次元のパラメータで記述された確率密度関数の族
- パラメトリック法:パラメトリックモデルを用いて確率密度関数を推定する方法

# 最尤推定法



- **尤度**: 訓練標本 $\{x_i\}_{i=1}^n$ がモデル $q(x;\theta)$ から生起する確率を $\theta$ の関数とみたもの:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} q(x_i;\theta)$$

- **最尤推定法**: 尤度を最大，即ち，手元にある訓練標本が最も生起しやすいようにパラメータ値を決める方法

$$\hat{\theta}_{ML} = \underset{\theta \in \Theta}{\arg\max}\, L(\theta)$$

# パラメータの確率的取り扱い



- 最尤推定の枠組みでは，モデル $q(x;\theta)$ のパラメータ $\theta$ を決定論的な変数として扱った.
- もし，パラメータも確率変数とみなせば，次のような確率が定義できる.
  - 事前確率 $p(\theta)$
  - 事後確率 $p(\theta \mid X)$
  - 尤度 $p(X \mid \theta)$

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

- これまではモデルを $q(x;\theta)$ と表記してきたが，ベイズ推定の枠組みでは $q(x \mid \theta)$ と表す.

# ベイズ推定法

- ベイズ推定法(Bayesian inference): モデルをパラメータの事後確率に関して平均することによって，確率密度関数を推定する方法

$$\hat{p}_{\mathrm{Bayes}}(x) = \int_{\Theta} q(x \mid \theta)\, p(\theta \mid X)\, d\theta$$

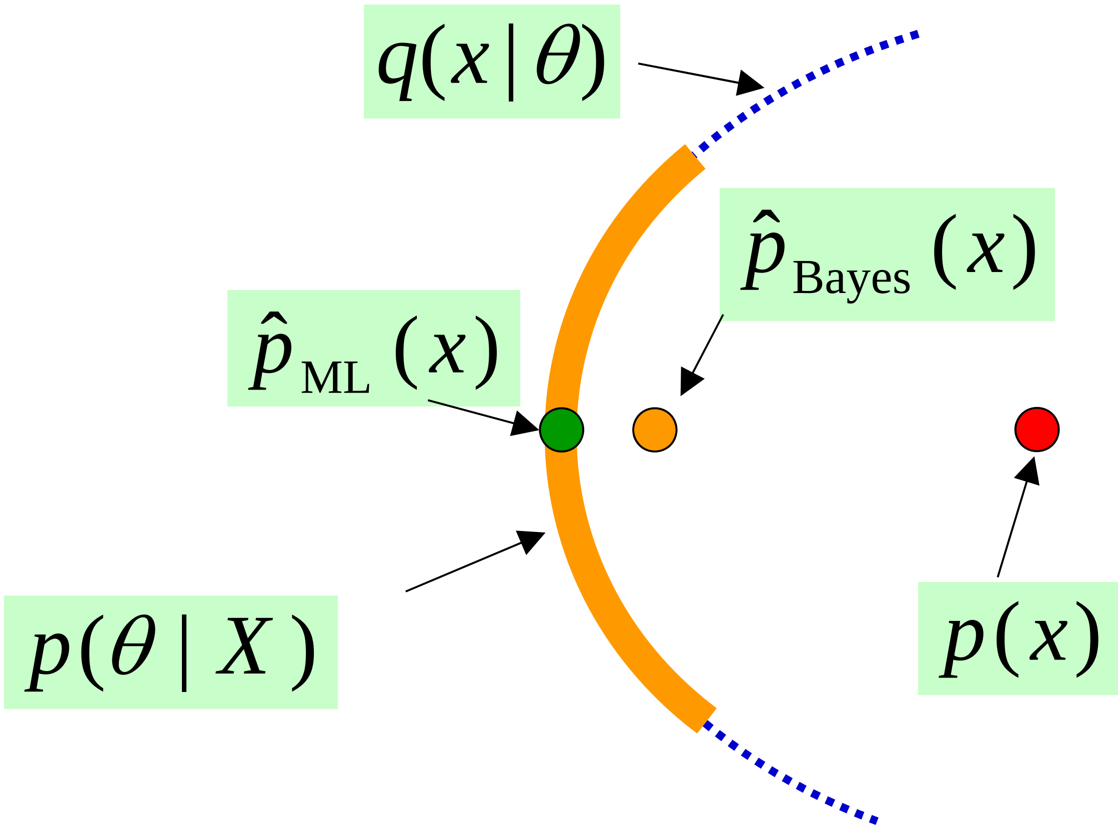
- 最尤推定:1つの代表パラメータで推定
- ベイズ推定:無数の確率密度関数の平均で推定

# ベイズ推定法のイメージ



$$\hat{p}_{\text{Bayes}}(x) = \int_{\Theta} q(x \mid \theta) p(\theta \mid X) d\theta$$

- 一般に $\hat{p}_{\text{Bayes}}(x)$ はモデルに含まれない.



# ベイズ推定法の計算



- 尤度は

$$p(X\mid\theta)=\prod_{i=1}^{n}q(x_i\mid\theta)$$

- 事後確率は，ベイズの定理を用いれば

$$p(\theta\mid X)=\frac{p(X\mid\theta)\,p(\theta)}{p(X)}$$

$$=\frac{p(X\mid\theta)\,p(\theta)}{\int_{\Theta}p(X\mid\theta')\,p(\theta')d\theta'}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}q(x_i\mid\theta)p(\theta)}{\int_{\Theta}\prod_{i'=1}^{n}q(x_{i'}\mid\theta')p(\theta')d\theta'}$$

# ベイズ推定法の計算（続き）



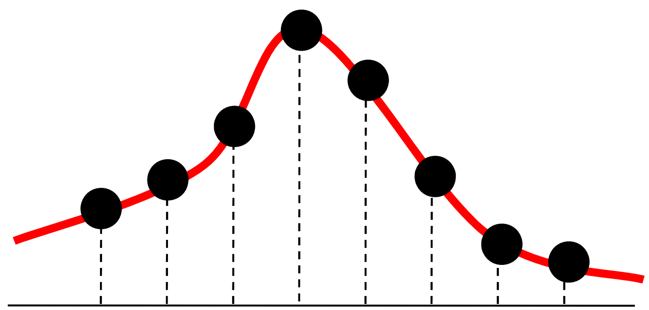
$$\hat{p}_{\mathrm{Bayes}}(x) = \int_{\Theta} q(x \mid \theta) \frac{\prod_{i=1}^{n} q(x_i \mid \theta) p(\theta)}{\int_{\Theta} \prod_{i'=1}^{n} q(x_{i'} \mid \theta') p(\theta') d\theta'} d\theta$$

- ベイズ推定法は，事前確率とモデルさえ与えられれば，原理的には計算できる．
- しかし，実際にはパラメータに関する積分を計算しなければならない．

# ベイズ推定法の計算（続き）



- パラメータ空間 Θ の次元が低いとき，格子上の値を使えば，（台形公式などにより）簡単に近似計算できる．
- しかし，格子点の数はパラメータ空間の次元に指数的に比例するため，次元が高いとき，計算効率が非常に悪い．



# 最大事後確率推定法



- 最大事後確率推定法(maximum a posteriori probability estimation, MAP推定法): パラメータに関して積分するのをやめて，事後確率を最大にするパラメータ値１点を用いる

$$\hat{p}_{\mathrm{MAP}}(x) = q(x \mid \hat{\theta}_{\mathrm{MAP}})$$

$$\hat{\theta}_{\mathrm{MAP}} = \operatorname*{arg\,max}_{\theta} p(\theta \mid X)$$

- ベイズの定理より

$$\hat{\theta}_{\mathrm{MAP}} = \operatorname*{arg\,max}_{\theta} \left[ \sum_{i=1}^{n} \log q(x_i \mid \theta) + \log p(\theta) \right]$$

# 最大事後確率推定法と最尤推定法



- MAP推定法はベイズ推定の近似解法.
- しかし，代表パラメータ $\hat{\theta}_{\mathrm{MAP}}$ で分布を推定するため，ベイズ推定よりはむしろ最尤推定に近い.
- MAP推定法は，対数尤度に対数事前確率を加えたものを最大にする.
- そのためMAP法は，罰則付き最尤推定法 (penalized MLE)とも呼ばれる.

$$\hat{\theta}_{\mathrm{MAP}} = \arg\max_{\theta} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \log q(x_i \mid \theta)}_{\text{対数尤度}} + \underbrace{\log p(\theta)}_{\text{対数事前確率}} \right)$$

# 演習



- 以下の設定でMAP推定量と最尤推定量を求めよ.
  - モデル:分散1のガウスモデル

$$q(x \mid \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{(x-\mu)^2}{2} \right)$$

  - 標本: $\{x_i\}_{i=1}^n, \ x_i \in R$
  - 事前確率:ガウス分布 $p(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}} \exp\left( -\frac{\mu^2}{2\beta^2} \right)$ $\beta > 0$

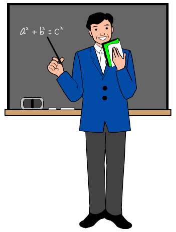
（小さい $|\mu|$ の方が出やすい）

- MAP推定量と最尤推定量の関係を調べよ.

# 事前確率の役割



- 最尤推定法は訓練標本が少ないとき精度がよくないことがある.
- MAP推定法では事前確率の大きい方に解が引っ張られるので，訓練標本が少ない場合でも精度がよいことがある.



# まとめ



- ベイズ推定法：パラメータも確率変数とみなして，パラメータの事後分布に関してモデルを平均する
- パラメータに関する積分の計算が大変
- 最大事後確率推定法（MAP法）：ベイズ推定法の積分を最大の点で近似する
- MAP法はベイズ推定よりもむしろ最尤推定に近い（罰則付き最尤推定法とも呼ばれる）

# 小レポート



- Octaveなどを用いた実験：
  - 平均0.5，分散1の正規分布から$n$ 個標本を生成せよ．
  - 演習で用いたモデル，事前分布に対して，MAP推定法を用いて分布の平均を推定せよ．

$$\hat{\mu}_{\mathrm{MAP}} = \frac{1}{n+\beta^{-2}} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

  - 事前分布の $\beta$ の値を変化させ，推定結果がどのように変化するかを調べよ．また，最尤推定法$(\beta=\infty)$とも比較せよ．
  - 真の平均，標本数などを変化させたとき，実験結果がどのように変化するかを考察せよ．

# Octaveのサンプルプログラム



ex8.m

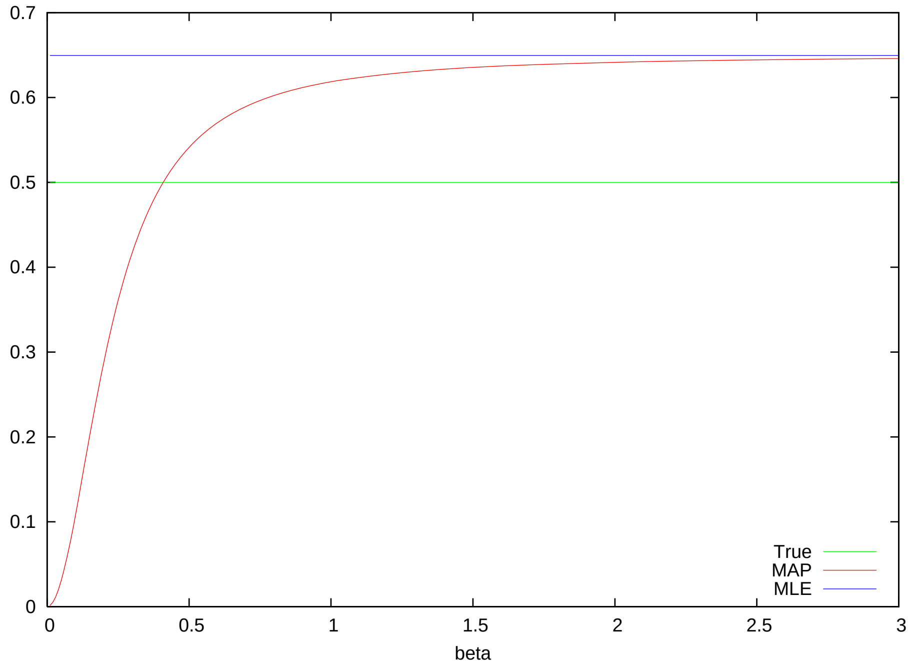
```
clear all
n=20; mu=0.5; sigma=1;
xx=sigma*randn(n,1)+mu;
betas=[0.01:0.01:3];

mu_MLE=mean(xx); sigma_MLE=std(xx,1);
for i=1: length(betas);
  mu_MAP(i)=sum(xx)/(n+betas(i).^(-2));
end

figure(1); clf; hold on;
plot(betas,mu*ones(size(betas)),‘g-')
plot(betas,mu_MAP,'r-')
plot(betas,mu_MLE*ones(size(betas)),'b-')
xlabel('beta'); legend('True','MAP','MLE',4)
print -deps MAP.eps
```

# 実行例





# 試験について



- 2月3日（月）10時45分～12時15分
- S222講義室
- 試験内容：
  - 専門用語の英単語（日本語→英語）
  - 自由記述問題（以下より2問選択）
    - 識別関数のよさを測る規準について
    - 最尤推定法について
    - ノンパラメトリック法について
    - モデル選択について
  - 自分が考えたパターン認識の例について
- 教科書，ノートの持ち込みは不可．

# レポート提出に関する注意



- これまで遅刻レポートを受け取ってきたが, 遅刻レポート受け取りの最終期限は, 1月27日の講義終了時とする.
- それ以降は一切受け付けないので注意すること.