ディジタル信号処理
（VI）

学術国際情報センター
山口雅浩

E-mail: *yamaguchi.m.aa@m.titech.ac.jp*

Web: *http://guchi.gsic.titech.ac.jp*

6. 離散時間信号とシステム

6．1　離散時間信号
6．2　離散たたみ込み演算
6．3　離散時間システム
6．4　離散時間信号のフーリエ変換
– 離散時間フーリエ変換
– 離散時間フーリエ変換の性質

6．1　離散時間信号

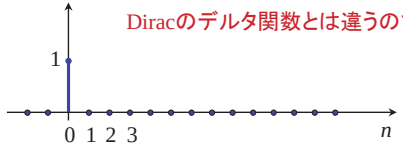
- 離散時間信号　$x(nT)$ または $x(n)$

変数が n か nT かで意味が全く異なるので注意

- 離散時間信号の例
  - 単位サンプル（単位インパルス）信号

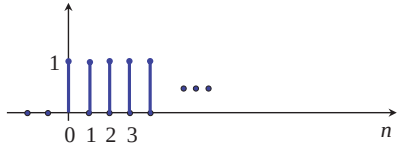
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Diracのデルタ関数とは違うので注意！



  - 単位ステップ信号

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



単位インパルス信号、単位ステップ信号の性質

- 単位ステップ信号の差分信号（微分に対応）は単位インパルス信号

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

- 単位インパルス信号の加算信号（積分に対応）は単位ステップ信号

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k)$$

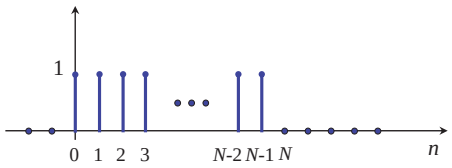
- 任意の離散時間信号 $x(n)$ に対して以下が成り立つ

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

cf. Diracのδ関数の性質

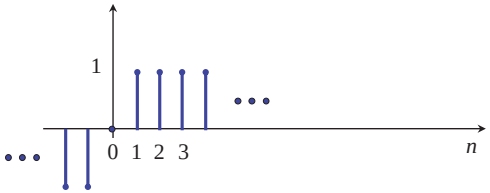
– 矩形パルス信号

$$P_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



– 符号信号

$$\mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases}$$



– べき信号 $x(n) = \mu^n$

■ μ が実数のとき、
（実数a を用いて）

$\mu > 0$ なら、
$a = \log \mu$ として
（ $\mu = e^a$ ）

$x(n) = e^{an}$

$\mu < 0$ なら、
$a = \log(-\mu)$ として
（ $\mu = -e^a$ ）

$x(n) = (-1)^n e^{an}$

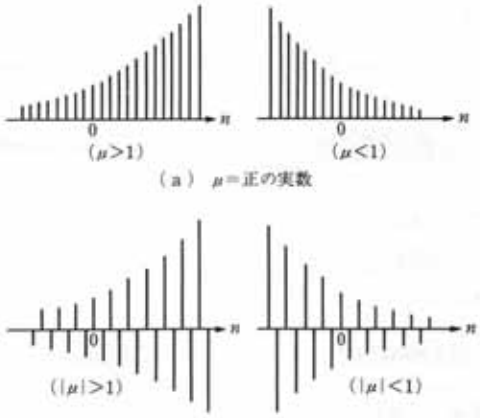


図 2·18 べき信号

図: 浜田望「よくわかる信号処理」

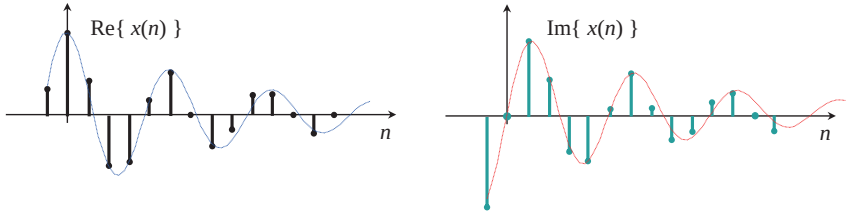
– べき信号 $x(n) = \mu^n$

■ μ が複素数のとき、

$\mu = e^{a+j\omega}$

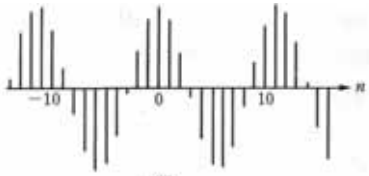
と書ける ($-\pi < \omega \le \pi$)ので

$$x(n) = e^{(a+j\omega)n} = e^{an}\{\cos \omega n + j \sin \omega n\}$$



$a = 0$ のとき $|\mu| = 1$

$x(n) = e^{j\omega n} = \cos \omega n + j \sin \omega n$



(b) $\cos\frac{\sqrt{2}}{8}\pi n$（非周期信号）

下図: 浜田望「よくわかる信号処理」

6．2 離散たたみ込み（たたみ込み演算）
Convolution

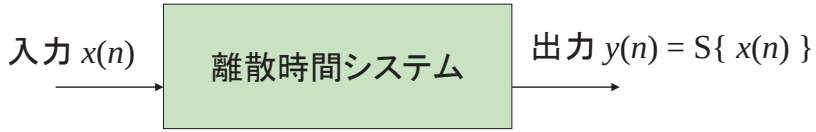
- 線形、時不変の離散時間システム
  (Linear Time-invariant system, LTI system)
- 入力信号 $x(n)$
- 出力応答 $y(n)$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

- $h(n)$: インパルス応答
  ＝ 入力が単位インパルス $x(n) = \delta(n)$ のときの応答

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k)h(n-k) = h(n)$$

６．３　離散時間システム



- 線形性

$$S\{ a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \} = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$$

- シフト不変性（時不変）

$$S\{ x(n - k) \} = y(n - k)$$

- LTI(Linear Time-Invariant)システム

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

- 因果性

$$h(n) = 0 \quad \text{if} \quad n < 0$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- 安定性
  - 入力 $x(n)$ が有界ならば応答 $y(n)$ も有界であれば安定。
  - 線形時不変システムにおける条件は、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} | h(n) | < \infty$$

FIRシステムとIIRシステム

- FIRシステム（非巡回形，非再帰形）
  - 差分方程式　$y(n) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k)$

- IIRシステム（巡回形，再帰形）※
  - 差分方程式　$y(n) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k)$

- 初期値　$x(-1), x(-2), \ldots, x(-M), y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$

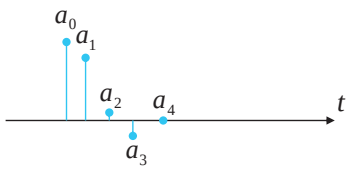
※再帰形のFIRフィルタもありえる

FIRシステムのインパルス応答

単位インパルス関数を用いて表すと

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M} a_k \delta(n-k)$$

$$h(n) = a_n$$



$$h(n) = a_0\delta(n) + a_1\delta(n-1) + a_2\delta(n-2) + a_3\delta(n-3) + a_4\delta(n-4)$$

IIRシステムのインパルス応答

- 例　$y(n) = x(n) + b\,y(n-1)$
  - 初期値 $y(-1) = 0$ とする

$$h(0) = \delta(0) + b\,y(-1) = 1$$
$$h(1) = \delta(1) + b\,y(0) = b$$
$$h(2) = \delta(2) + b\,y(1) = b^2$$
$$\vdots$$
$$h(n) = \delta(n) + b\,y(n-1) = b^n \longrightarrow \text{べき信号}$$

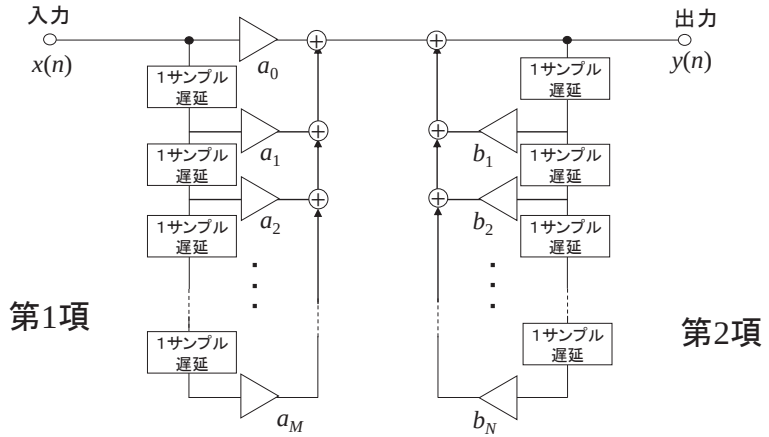
単位インパルス関数を用いて表すと

$$h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \delta(n-k)$$

差分方程式

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k)$$

- Max(M, N) : 差分方程式の次数



6．4　離散時間信号のフーリエ変換

- サンプリングされた連続時間信号 $x_s(t)$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,\delta(t-nT)$$

ディラックのδ関数

- $x_s(t)$ のフーリエ変換

$$\boldsymbol{F}\{x_s(t)\} = \boldsymbol{F}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,\delta(t-nT)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\ \delta(t-nT)\ e^{-j\omega t}dt$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

$(\Omega = \omega T)$

離散時間フーリエ変換　（DTFT）

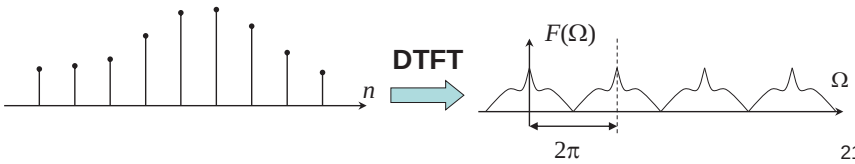
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

後に述べる離散フーリエ変換（DFT）とは異なる！

- サンプリングされた信号のフーリエ変換は周期関数（第V回資料参照）

$$X(\Omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\Omega+2\pi)n} = X(\Omega)$$

- 周期：2π



逆離散時間フーリエ変換

- $X(\Omega)$は周期2πの周期関数なので、積分範囲は 0 - 2π または −π ~ π でよい

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n} d\Omega$$

逆フーリエ変換の式と比べると
$\omega T \rightarrow \Omega$,　積分範囲,　連続時間信号→離散時間信号
が異なる

「ディラックのδ関数と、単位インパルス信号との違い」

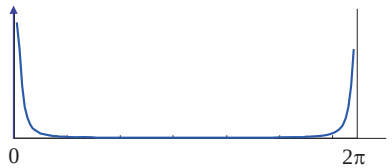
離散時間フーリエ変換の例（1）

- 単位インパルス $\delta(n)$

$$\textbf{DTFT}\{\delta(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\Omega n} = 1$$

- 単位ステップ　$u(n)$

$$\textbf{DTFT}\{u(n)\} = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi m)$$



$$\left|\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}\right|^2 = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}\frac{1}{1-e^{+j\Omega}} = \frac{1}{1+1-e^{j\Omega}-e^{-j\Omega}} = \frac{1}{2(1-\cos\Omega)}$$

単位ステップ系列を以下のように表す

$$u(n) = u_1(n) + u_2(n)$$

ただし

$$u_1(n) = 0.5 \quad 、\quad u_2(n) = \begin{cases} 0.5 & n \geq 0 \\ -0.5 & n < 0 \end{cases}$$

このとき、

$$U_1(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5 e^{-j\Omega n} = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi m)$$

となる。また

$$u_2(n) - u_2(n-1) = \delta(n)$$

の両辺を離散時間フーリエ変換すると

$$U_2(\Omega) - U_2(\Omega)e^{-j\Omega} = 1$$
$$= (1-e^{-j\Omega})U_2(\Omega)$$

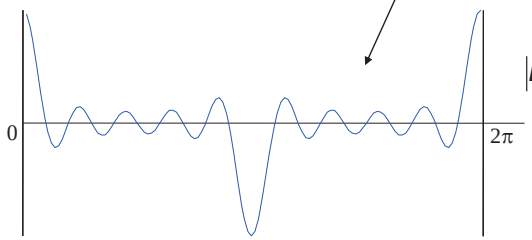
となるので、これより、

$$U_2(\Omega) = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}$$

離散時間フーリエ変換の例（2）

- 矩形パルス

$$\textbf{DTFT}\{P_n(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1-e^{-j\Omega N}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{e^{-j\Omega(N-1)/2}\{e^{j\Omega N/2} - e^{-j\Omega N/2}\}}{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}$$
$$= e^{-j\Omega(N-1)/2}\frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}$$



$$\left|\textbf{DTFT}\{P_n(n)\}\right| = \left|\frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right|$$

離散時間フーリエ変換の性質
（連続時間のフーリエ変換と同様の性質を持つ）

(1) 線形性
(2) 時間軸推移
(3) 時間軸の伸縮
(4) 周波数軸の推移
(5) 周波数軸の伸縮
(6) 対称性
(7) 複素共役
(8) 差分信号

$$\textbf{DTFT}\{x(n) - x(n-1)\} = X(\Omega) - X(\Omega)e^{-j\Omega} = (1-e^{-j\Omega})X(\Omega)$$

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{d}{d\Omega}e^{-j\Omega n} = \textbf{DTFT}\{-jn\, x(n)\}$$

離散たたみ込みの離散時間フーリエ変換

- 連続時間信号の場合と同様にたたみ込み演算の定理が成り立つ

$$\boldsymbol{DTFT}\{x(n)*h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\ e^{-j\Omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)H(\Omega)e^{-j\Omega k}$$

$$= X(\Omega)H(\Omega)$$

ただし

$$X(\Omega) = \boldsymbol{DTFT}\{x(n)\}$$

$$H(\Omega) = \boldsymbol{DTFT}\{h(n)\}$$