# ディジタル信号処理
# (V)

学術国際情報センター
山口雅浩

E-mail: *yamaguchi.m.aa@m.titech.ac.jp*

Web: *http://guchi.gsic.titech.ac.jp*



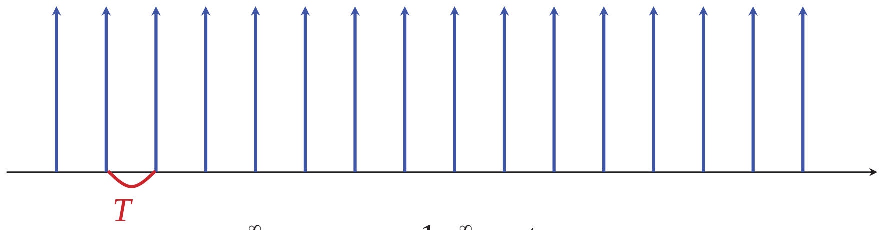
## 5. 信号の標本化(サンプリング)

p.72





## 5. 1　δ関数列(comb関数)




$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{t}{T}-n\right)$$

∵δ関数は正の定数$a$に対して　$\delta\left(\frac{t}{a}\right)=a\delta(t)$　なる性質がある

これより　$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{t}{T}-n\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$



## δ関数列のフーリエ変換

$$\boldsymbol{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\,e^{-j\omega t}dt$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t')\,e^{-j\omega(t'+nT)}\,dt'$$
$$=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega nT}=\frac{2\pi}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi m}{T}\right)}_{※}=\omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)$$

練習問題　※が正しいことを確認せよ。

デルタ関数列のフーリエ変換はデルタ関数列

間隔 $T$ $\longrightarrow$ 間隔　$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$

## ５．２　サンプリングの数学的表現

- 連続時間信号　$x(t)$
- サンプリングされた連続時間信号　$x_s(t)$
- 離散時間信号 $x[n]$

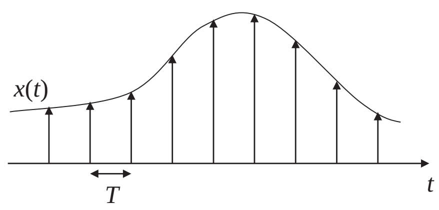
$x[n] = x(nT)$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\ \delta(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\ \delta(t-nT)$$

$$= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$= x(t)\ \delta_T(t)$$






## ５．３　サンプリングされた信号のフーリエ変換

$$X(\omega) = \boldsymbol{F}\{x(t)\}$$

---

$$X_s(\omega) = \boldsymbol{F}\{x_s(t)\}$$

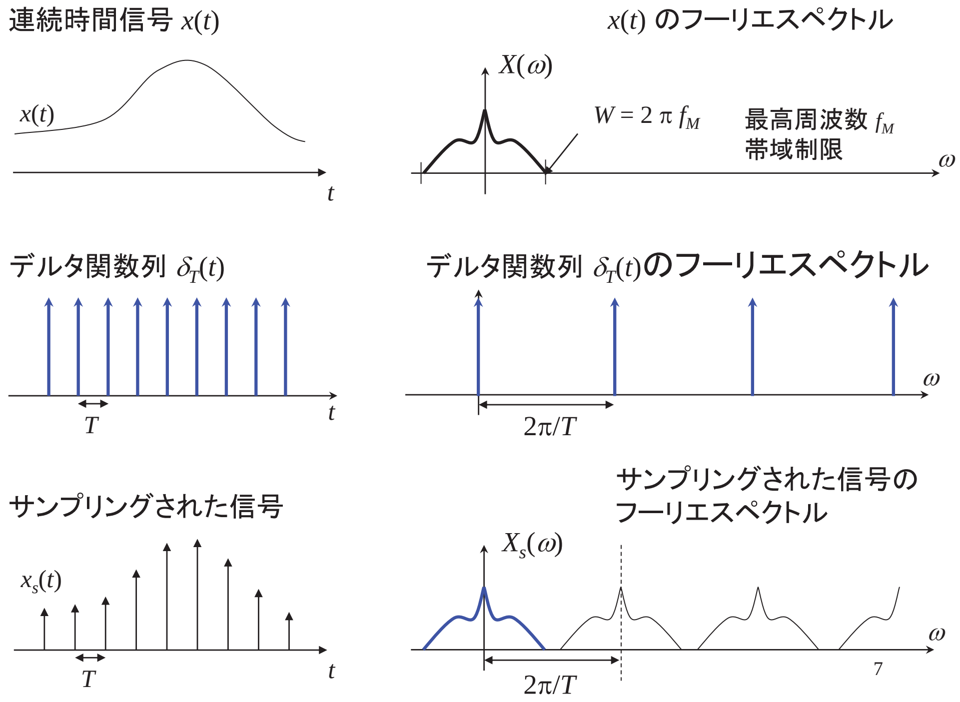
$$= \boldsymbol{F}\{x(t)\ \delta_T(t)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \boldsymbol{F}\{x(t)\} * \boldsymbol{F}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \left\{ \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi m}{T}) \right\}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(\omega - \frac{2\pi m}{T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(\omega - m\omega_s)$$








## ５．４　サンプリング定理
（その１）

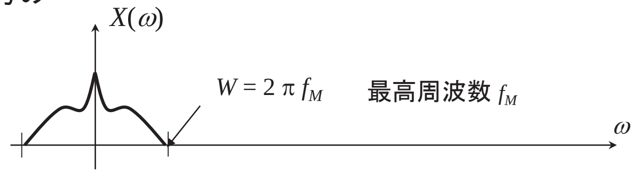
- 連続時間信号 $x(t)$ の最高周波数が $f_M$ であるとき、$f_M$ の2倍よりも高い周波数 $f_s$ でサンプリングすれば、サンプリングされた離散時間信号 $x_s(t)$ から元の連続時間信号 $x(t)$ を完全に復元することができる

※　サンプリング周波数　$f_s = 1 / T$

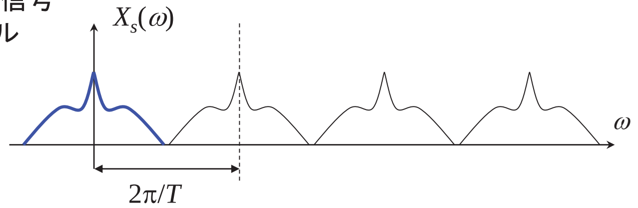
$f_N = \dfrac{1}{T} = 2 f_M$　をナイキストレート（Nyquist rate）と呼ぶ

# フーリエ領域で見ると

帯域制限された信号の
フーリエスペクトル




サンプリングされた信号
のフーリエスペクトル

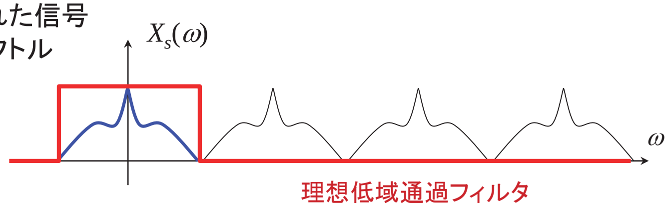



$\frac{2\pi}{T} > 2W$ すなわち $T < \frac{1}{2f_M}$ でサンプリングすれば、$X_s(\omega)$ から $X(\omega)$ を完全に復元することができる。



# どのようにして復元するか？

サンプリングされた信号
のフーリエスペクトル




取り出された信号のフーリエスペクトル




# 5．5　連続時間信号の再構成
## サンプリング定理（その2）

- 連続時間信号 $x(t)$ をサンプリング周波数 $f_s = \omega_s / 2\pi = 1 / T$ でサンプリングして得られる標本値 $x(nT)$ から元の連続時間信号 $x(t)$ を完全に再現するには、$x(t)$ が角周波数 $W = \omega_s / 2$（ナイキスト周波数）未満に帯域制限されていればよい。

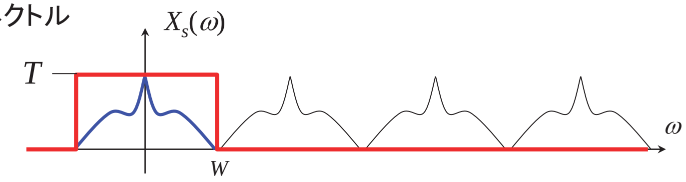
  このとき以下の式を用いて $x(t)$ を再現できる

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin W(t-nT)}{W(t-nT)}$$



# サンプリングされた信号に対する フーリエ領域でのフィルタリング

サンプリングされた信号
のフーリエスペクトル




理想低域通過フィルタ = 矩形パルス関数　$T\,p(\omega/2W)$

$$X_R(\omega) = X_s(\omega) \cdot T\,p(\omega / 2W)$$

取り出された信号の
フーリエスペクトル

# $X_R(\omega)$ を逆フーリエ変換すれば

$\boldsymbol{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\omega)F_2(\omega)$ より $\boldsymbol{F}^{-1}\{F_1(\omega)F_2(\omega)\} = f_1(t) * f_2(t)$
を使う

$$x_R(t) = \boldsymbol{F}^{-1}\{X_s(\omega)\cdot T\ p(\frac{\omega}{2W})\} = \boldsymbol{F}^{-1}\{X_s(\omega)\} * \boldsymbol{F}^{-1}\{T\ p(\frac{\omega}{2W})\}$$

矩形パルス関数の逆フーリエ変換は、

$$\boldsymbol{F}^{-1}\{T\ p(\frac{\omega}{2W})\} = \frac{T}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t}d\omega = \frac{T}{2\pi}\left[\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\right]_{-W}^{W}$$

$$= \frac{T}{j2\pi t}\left(e^{jWt} - e^{-jWt}\right) = \frac{1}{Wt}\sin Wt$$

$$\because \quad T = \frac{\pi}{W}$$



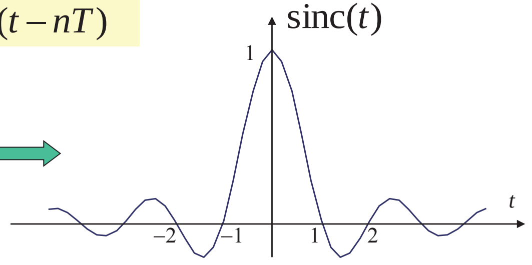
$$x_R(t) = x_s(t) * \frac{1}{Wt}\sin Wt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t')\frac{1}{W(t-t')}\sin W(t-t')dt'$$

$x_s(t')$ は $t' = nT$ 以外は $f_s(t') = 0$ なので、

$$x_R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\sin W(t-nT)}{W(t-nT)}$$

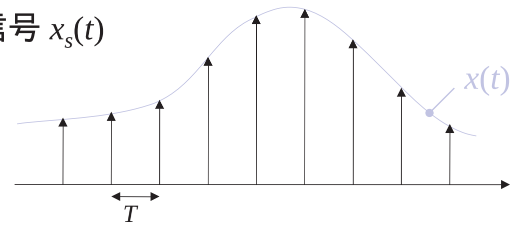
$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$



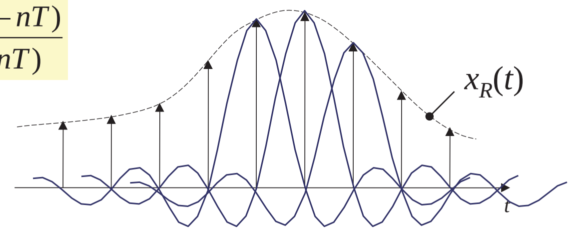



# 時間領域での再構成（フィルタリング）

サンプリングされた信号 $x_s(t)$




$$x_R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\sin W(t-nT)}{W(t-nT)}$$



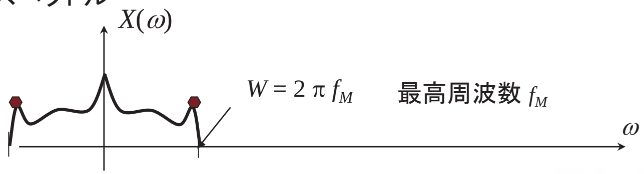

間を埋める ＝ 補間 (Interpolation)



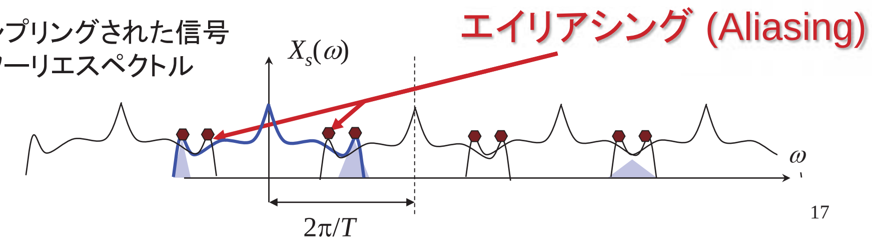
# サンプリング定理を満たさない場合

$$\frac{1}{T} < 2f_M$$

原信号のフーリエスペクトル

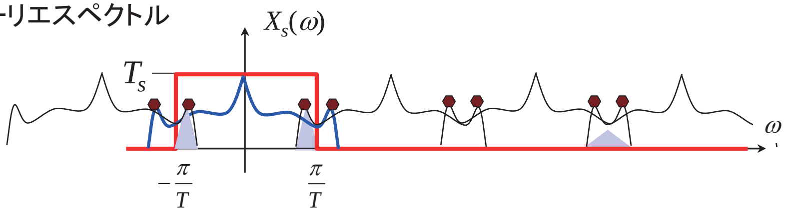



サンプリングされた信号
のフーリエスペクトル



# エイリアシングが生じた信号に対する フーリエ領域でのフィルタリング

サンプリングされた信号
のフーリエスペクトル

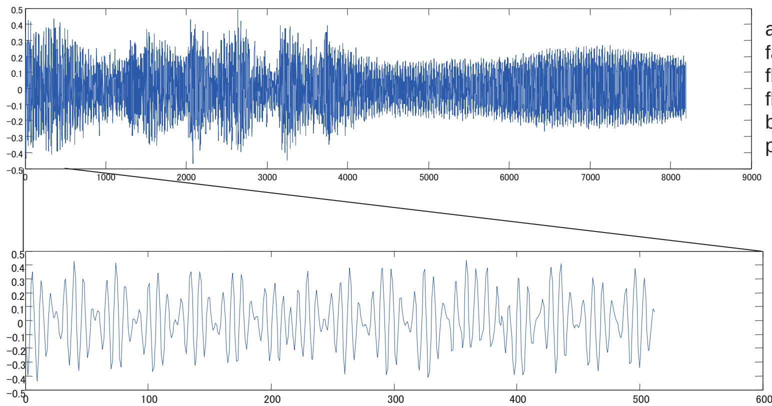



$$X_R(\omega) = X_s(\omega)\cdot T\ p\left(\frac{\omega}{2\pi / T}\right)$$

取り出された信号の
フーリエスペクトル

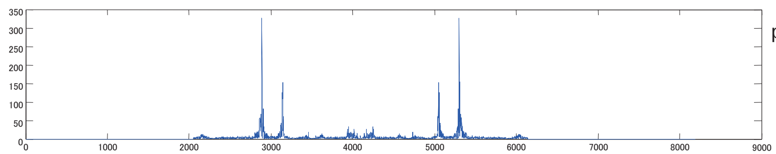



# 5．6　例



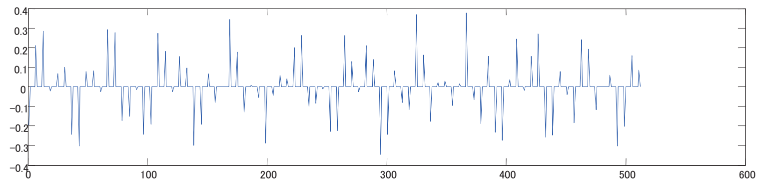
```
au = wavread( 'ring.wav');
fa = FFT( au );
fbl = fa;
fbl([2049:6144]) = 0;
bl2 = real( IFFT( fbl ));
plot( bl2 );
```

```
plot( bl2([1:512]) );
```

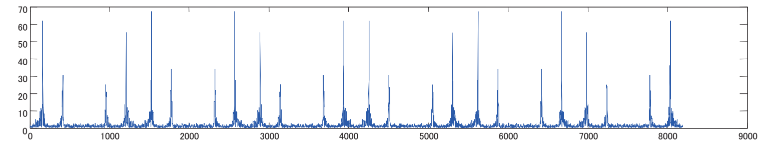


```
plot( fftshift( abs( fbl ) );
```

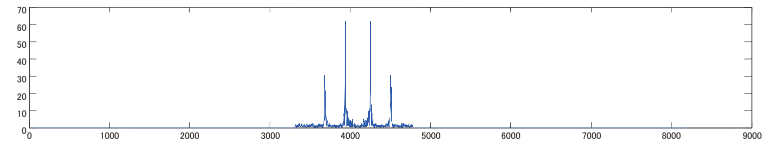




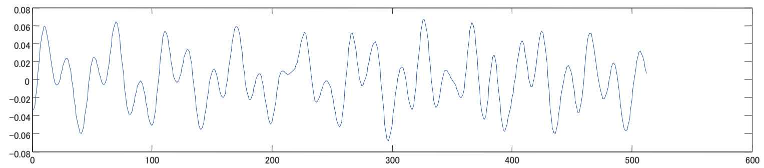
```
bls6( [1:8192] ) = 0;
bls6( [1:6:8192] ) =
    bl2( [1:6:8192] );
plot( bls6 );
```



```
fbls6 = FFT( bls6 );
plot( fftshift( abs(fbls6)) );
```



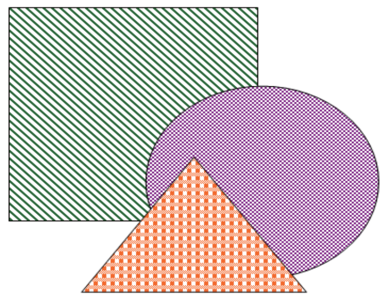
```
fblr6 = fbls6;
fblr6([683:7508]) = 0;
plot( fftshift( abs(fblr6)) );
```



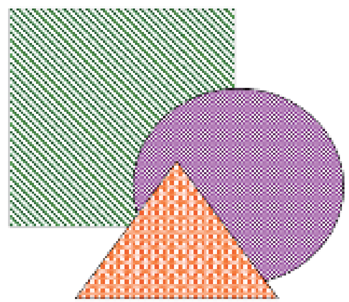
```
blr6 = real( IFFT( fblr6 ) );
plot( blr6 );
```



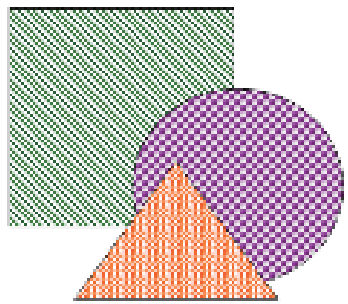
# 画像の場合



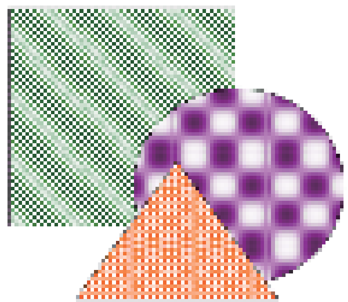
原画像



T = 6pixel



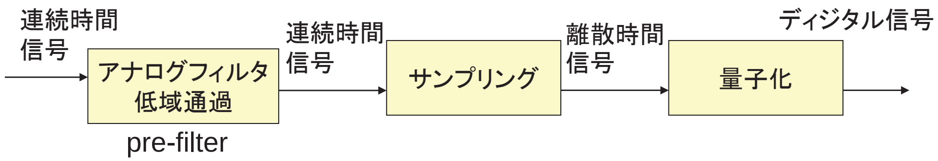
T = 8pixel



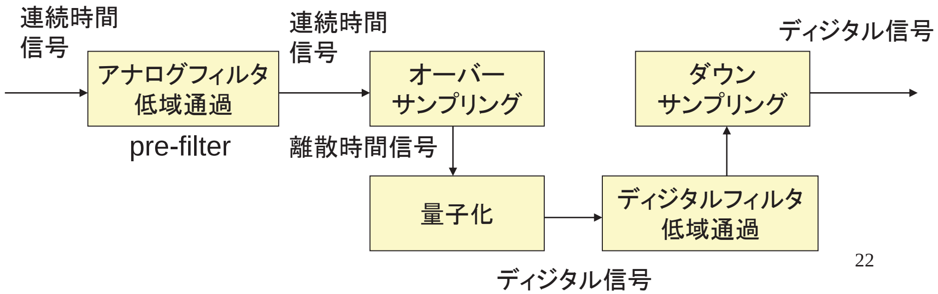
T = 10pixel

# 5．7　A/D変換, D/A変換

## A/D変換

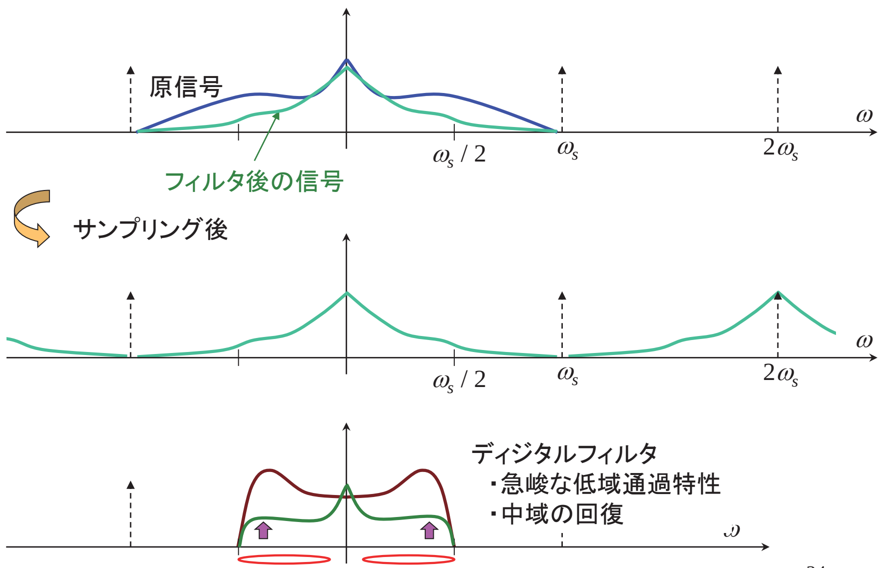



## オーバーサンプリングA/D変換システム



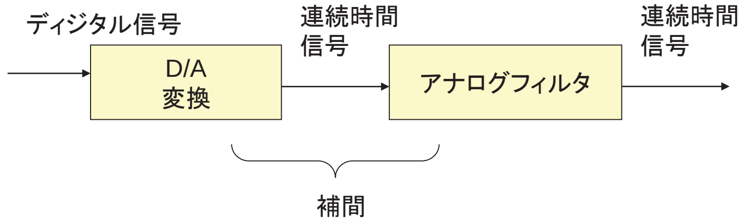


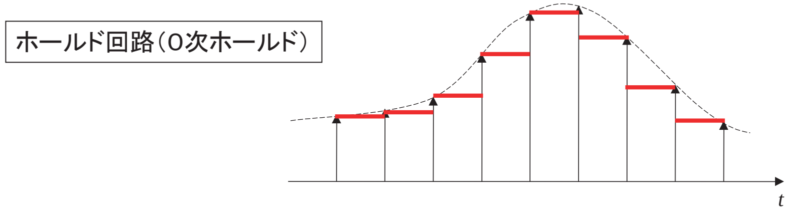

## オーバーサンプリング






## D/A変換



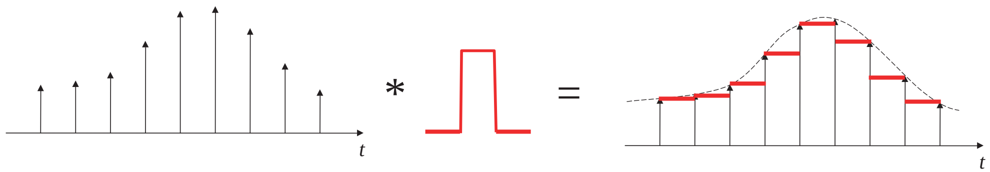




※ 0次ホールドによって補間された連続時間信号のフーリエスペクトルはどのような特性となるか？



## 補間と畳み込み

0次ホールド（0次補間） ＝ 矩形パルス関数の畳み込み




線形補間（一次補間） ＝ Λ関数の畳み込み