

デジタル信号処理 (III)

学術国際情報センター
山口雅浩

E-mail: yamaguchi.m.aa@m.titech.ac.jp

Web: <http://guchi.gsic.titech.ac.jp>

講義内容

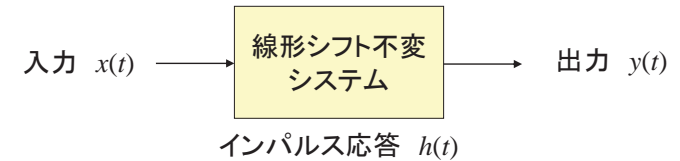
3. 連続時間システムのフーリエ解析

- フーリエ変換による線形シフト不変システムの解析
- インパルス応答と周波数特性

1

3. 連続時間システムのフーリエ解析

3. 1 フーリエ変換による線形シフト不変システムの解析



線形シフト不変システムの入出力関係

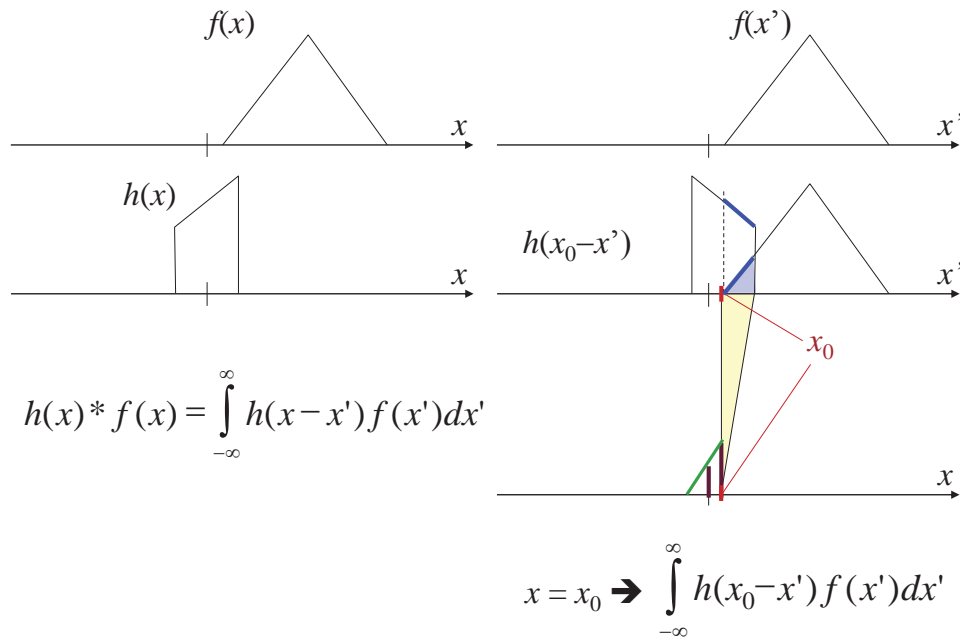
$$y(t) = S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

→ 畳込み積分 (convolution)

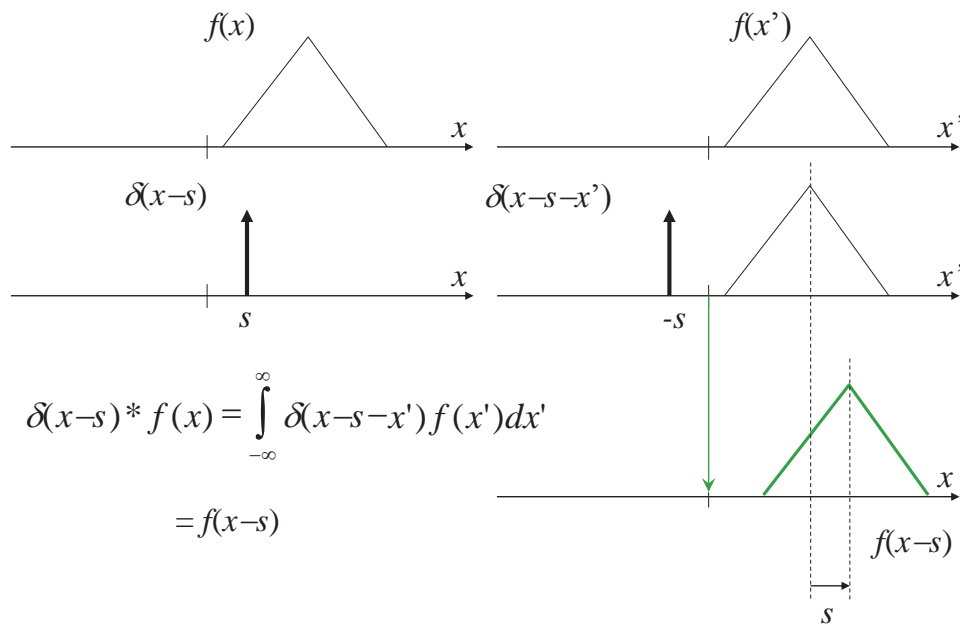
3

なぜ「たたみ込み」が重要か？

- 線形シフト不変システムの数学的記述
 - 回路・空間伝播などによる信号の劣化
 - レンズや空間的な光伝播、投影などによるイメージング系
- 2つの関数の積のフーリエ変換
 - 2つの関数のたたみ込みのフーリエ変換は積になる
- フィルタリング
 - 周波数フィルタリング (High-pass, Low-pass, Band-pass, ...)
 - 平滑化、鮮鋭化、エッジ強調、など
- 「相関演算」と類似
 - パターンマッチングなどへの応用



7



13

例: 2つの矩形パルス関数の畳み込み

$$x(t) = \frac{1}{a} p\left(\frac{t}{a}\right)$$

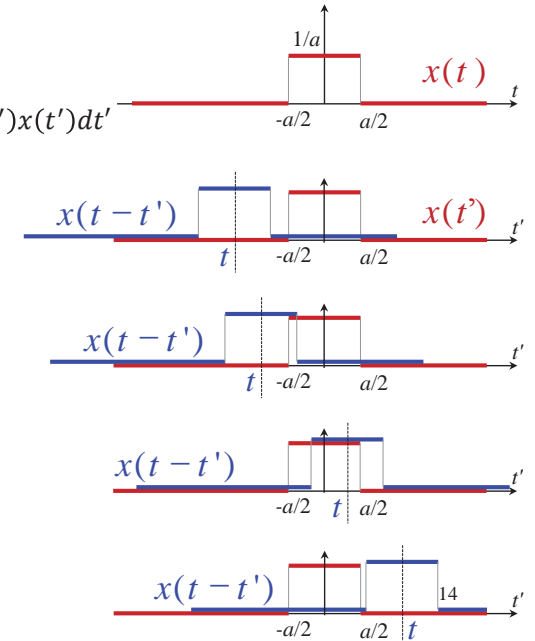
$$f(t) = a x(t) * x(t) = a \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t')x(t')dt'$$

$$t < -a \text{ のとき } f(t) = 0$$

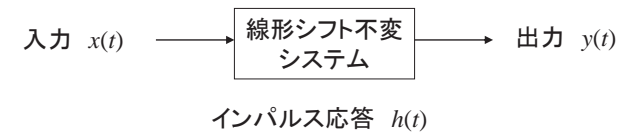
$$-a \leq t < 0 \text{ のとき } f(t) = 1 + t/a$$

$$0 \leq t < a \text{ のとき } f(t) = 1 - t/a$$

$$t \geq a \text{ のとき } f(t) = 0$$



インパルス応答と周波数特性



- 線形シフト不変システム

$$y(t) = S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- 両辺をフーリエ変換

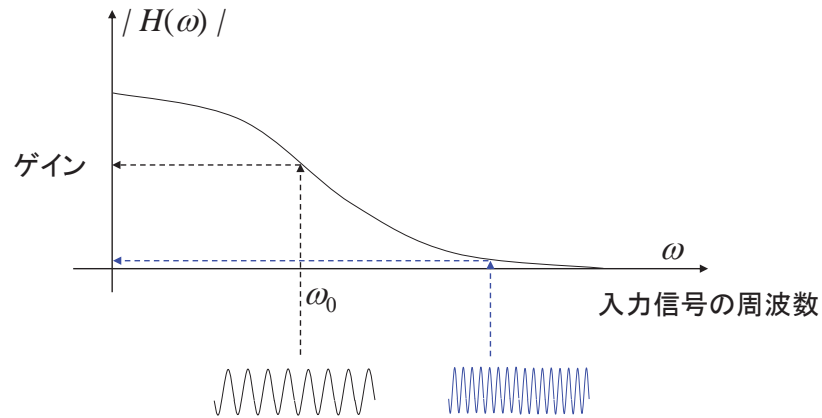
$$Y(\omega) = \mathbf{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right\} = \mathbf{F}\{x(t)\}\mathbf{F}\{h(t)\}$$

$$= H(\omega)X(\omega)$$

$H(\omega)$: 周波数特性, システム関数, 伝達関数,
= インパルス応答のフーリエ変換

15

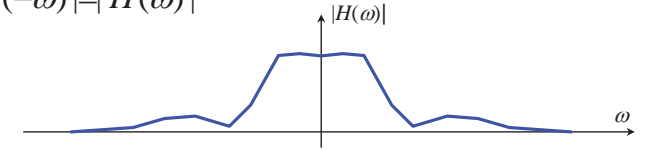
周波数特性



$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| |X(\omega)| = A(\omega) |X(\omega)|$$

16

- インパルス応答 $h(t)$ が実数のとき、振幅特性は原点对称 (偶関数) : $|H(-\omega)| = |H(\omega)|$



- 上を証明せよ。

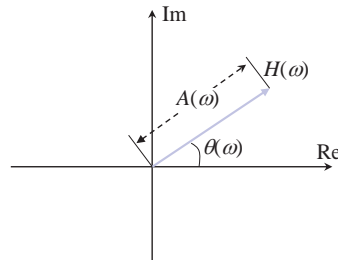
$$H(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j(-\omega)t} dt$$

18

周波数特性は複素数

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \text{Re}\{H(\omega)\} + j \text{Im}\{H(\omega)\} \\ &= A(\omega) e^{j\theta(\omega)} \end{aligned}$$

- 振幅特性 $A(\omega) = |H(\omega)|$
 $|Y(\omega)| = |H(\omega)| |X(\omega)| = A(\omega) |X(\omega)|$
- 位相特性 $\theta(\omega)$



$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{-j\xi(\omega)}$$

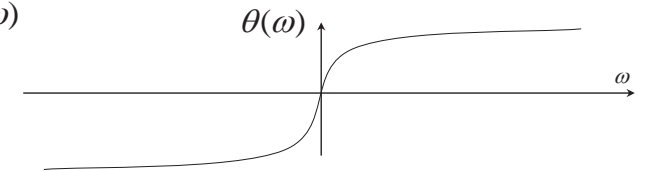
$$Y(\omega) = |Y(\omega)| e^{-j\eta(\omega)} \quad \text{とすると}$$

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) = A(\omega) |X(\omega)| e^{-j\{\theta(\omega) + \xi(\omega)\}}$$

$$\eta(\omega) = \xi(\omega) + \theta(\omega)$$

17

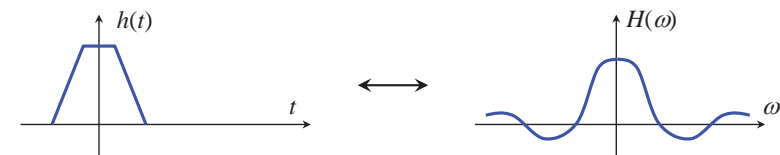
- インパルス応答 $h(t)$ が実数のとき、位相特性は奇関数
 $\theta(-\omega) = -\theta(\omega)$



- 上を証明せよ。

19

- インパルス応答が実数で対称(偶関数)なとき: $h(t) = h(-t)$
周波数特性は実数で対称



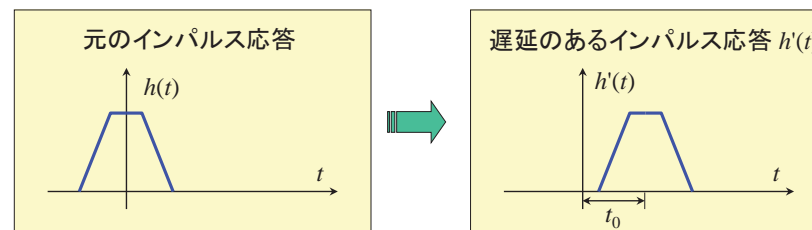
- 上を確かめよ

したがって

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos \omega t \, dt = H(-\omega)$$

20

- インパルス応答に遅延があるとき



$$h'(t) = h(t - t_0)$$

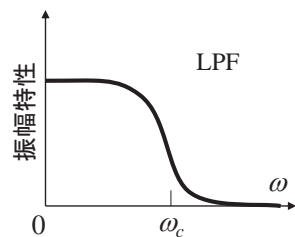
$$\begin{aligned} H'(\omega) &= \mathcal{F}\{h'(t)\} \\ &= \mathcal{F}\{h(t - t_0)\} \\ &= \mathcal{F}\{h(t)\} e^{-j\omega t_0} = H(\omega) e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

$H(\omega)$ に対して ωt_0 なる位相特性を付加したもの

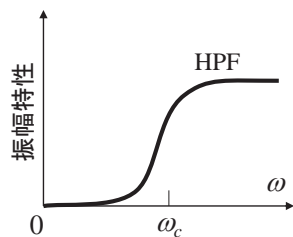
ω に比例する位相特性: 直線位相

22

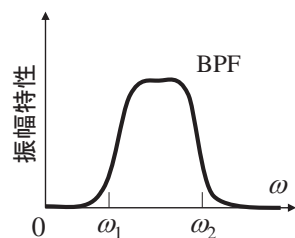
フィルタの種類



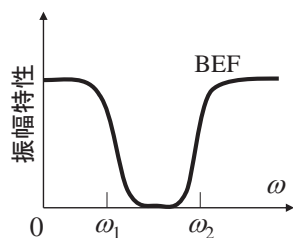
低域通過フィルタ



高域通過フィルタ



帯域通過フィルタ



帯域除去フィルタ

21

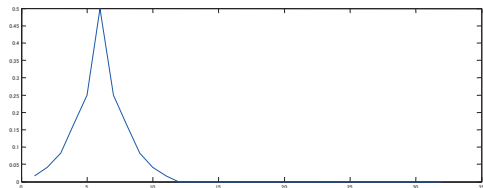
例題

任意の周波数の正弦波入力 $x(t) = A \cos(2\pi a t)$ に対して $y(t) = A \cos(2\pi a t - \phi)$ を出力するシステムの周波数特性を求めよ

23

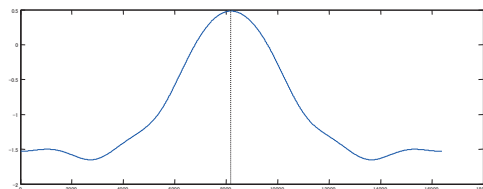
周波数フィルター

$h(t)$



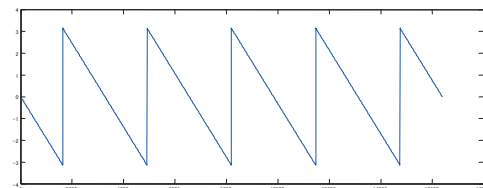
$\log(|H(\omega)|)$

振幅特性



$\theta(\omega)$

位相特性



Matlab code (参考)

```
filt = [0.2 0.5 1 2 3 6 3 2 1 0.5 0.2] / 12;
```

```
delta = zeros(16384, 1);
delta(1) = 1;
ir = conv(delta, filt);
plot(ir([1:32]));
```

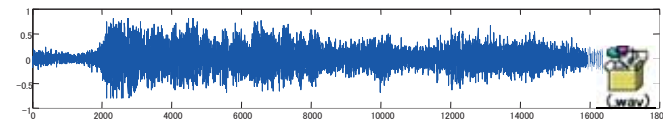
```
tf = fft(ir);
plot(fftshift(log(abs(tf))));
```

```
ptf = imag(log(tf));
plot(ptf);
```

24

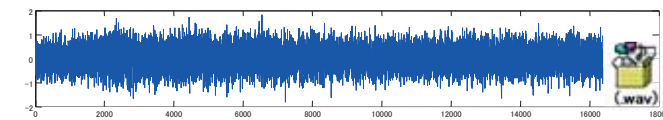
Audio

$y(t)$



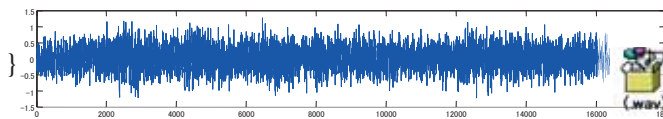
```
load handel
yy = y([1:16384]);
plot(yy);
wavwrite(yy, 'halle.wav');
```

$y(t)+n(t)$



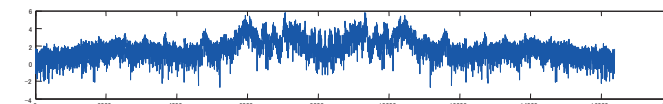
```
yn = yy + n*0.4;
plot(yn);
wavwrite(yn, 'hallen.wav');
```

$o(t) =$
 $\{ y(t)+n(t) \}$
 $* h(t)$



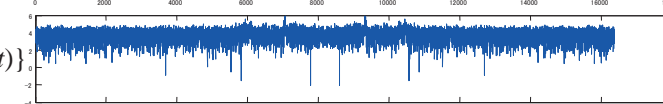
```
yc = conv(yn, filt);
plot(yc);
wavwrite(yc, 'hallec.wav');
```

$F\{y(t)\}$



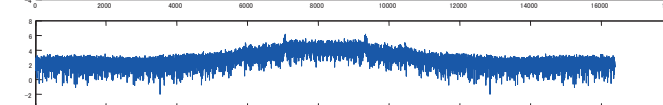
```
fty = fft(yy);
plot(fftshift(log(abs(fty))));
```

$F\{y(t)+n(t)\}$



```
ftyn = fft(yn);
plot(fftshift(log(abs(ftyn))));
```

$F\{o(t)\}$

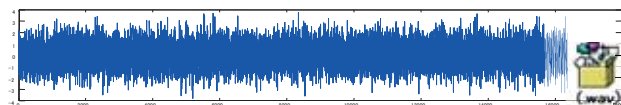


```
ftyc = fft(yc);
plot(fftshift(log(abs(ftyc))));
```

26

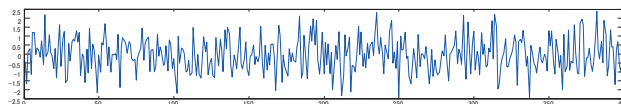
ノイズ

$n(t)$



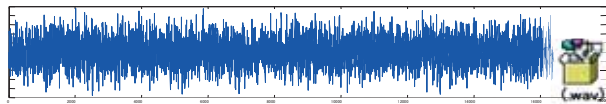
```
n = randn(16384, 1);
plot(n);
plot(n([1:400]));
```

$F\{n(t)\}$



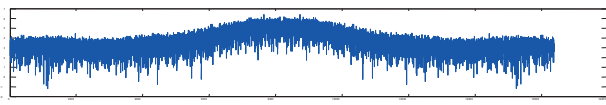
```
fn = fft(n);
plot(fftshift(log(abs(fn))));
```

$o_n(t)$
 $= n(t) * h(t)$



```
nc = conv(n, filt);
wavwrite(nc, 'noisec.wav');
plot(nc);
plot(nc([1:400]));
```

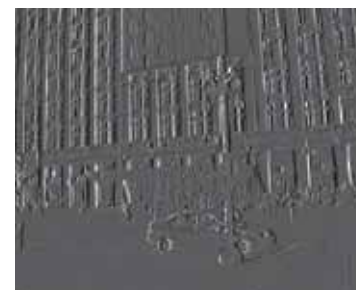
$F\{o_n(t)\}$



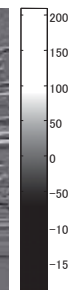
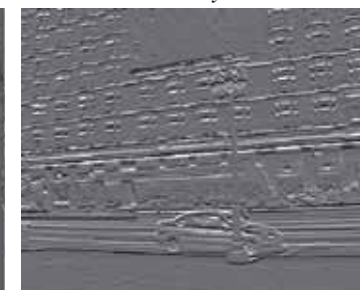
```
fnc = fft(nc);
plot(fftshift(log(abs(fnc))));
```

25

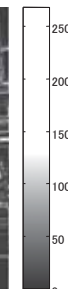
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$



$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$



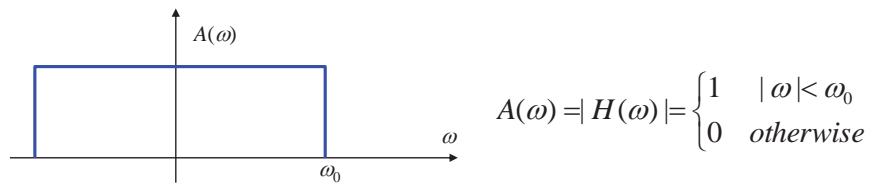
Original



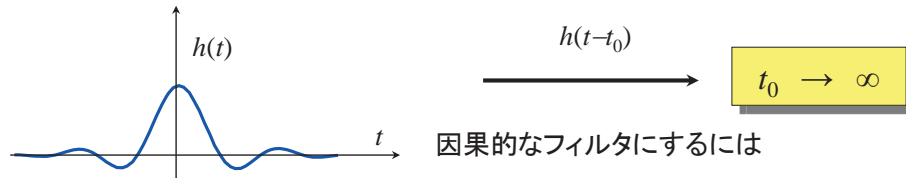
勾配の絶対値
 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$

28

理想低域通過フィルタ

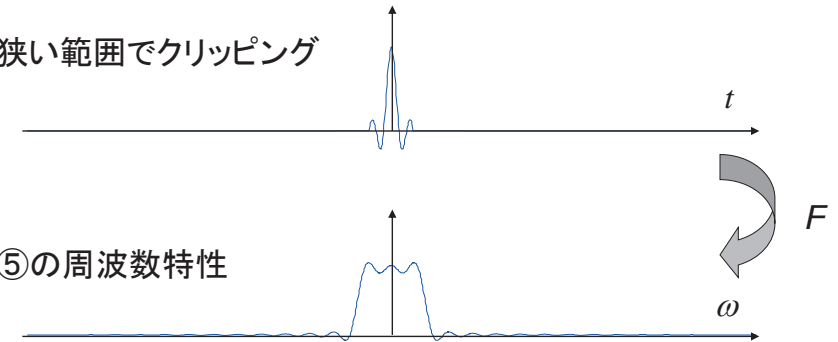


$$\mathcal{F}^{-1}\{A(\omega)\} = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}$$



$h(t)$ を有限の領域でクリップする必要がある → 理想低域通過フィルタは得られない

⑤: 狭い範囲でクリッピング



⑥: ⑤の周波数特性

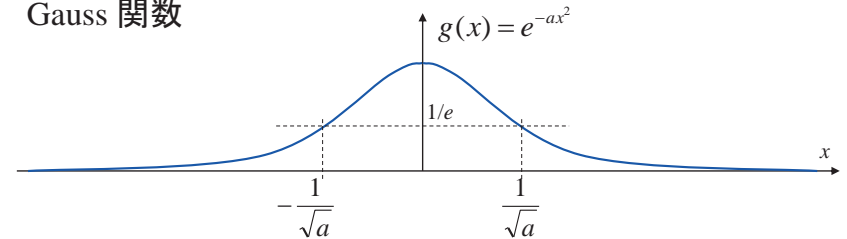
MATLABの場合 (FFT使用)

```
xf([1:1024]) = 0;
xf([1:48]) = 1;
xf([1024-47:1024]) = 1;
plot(fftshift(xf));
axis([1 1024 0 2]);
psf = ifft(xf);
plot(fftshift(real(psf)));
axis([1 1024 -0.05 0.1]);
cpsf([1:1024]) = 0;
cpsf([1:100]) = real(psf([1:100]));
cpsf([1024-99:1024]) = real(psf([1024-99:1024]));
plot(fftshift(cpsf));
axis([1 1024 -0.05 0.1]);

frq = fft(cpsf);
plot(fftshift(real(frq)));
axis([1 1024 -1 2]);
cpsf([1:1024]) = 0;
cpsf([1:30]) = real(psf([1:30]));
cpsf([1024-29:1024]) = real(psf([1024-29:1024]));
plot(fftshift(cpsf));
axis([1 1024 -0.1 0.3]);
frq1 = fft(cpsf);
plot(fftshift(real(frq1)));
axis([1 1024 -1 2]);
```

31

Gauss 関数



$$\text{Gauss 積分 } I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

正規化された Gauss 関数 (積分値 = 1) $g_n(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot e^{-ax^2}$

$a \rightarrow \infty$ とすることで, Dirac デルタ関数となる。 $\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot e^{-ax^2} \right)$

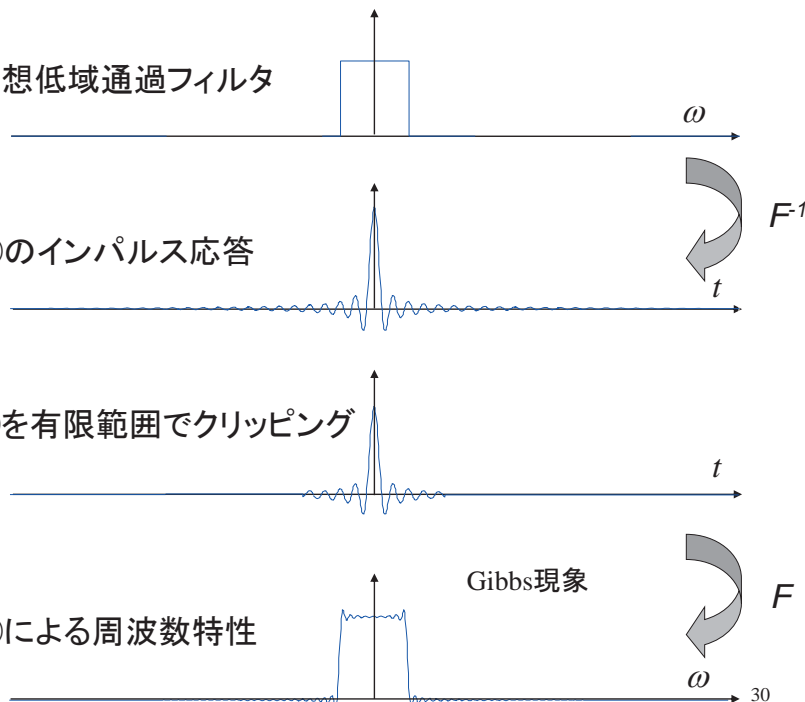
$g(x) = e^{-ax^2}$ で $a \rightarrow 0$ とすると, $g(x) = 1$ となる。

①: 理想低域通過フィルタ

②: ①のインパルス応答

③: ②を有限範囲でクリッピング

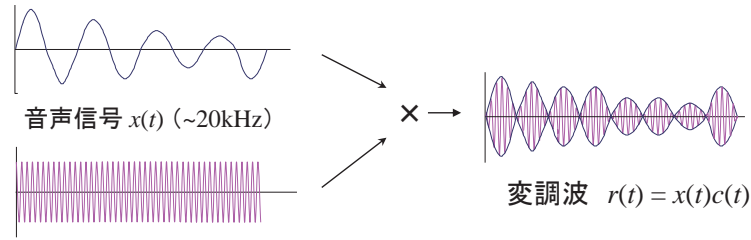
④: ③による周波数特性



34

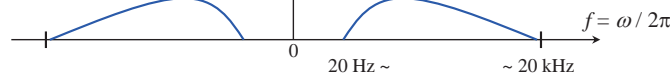
補足

AMラジオ (Amplitude Modulation, 振幅変調)



搬送波 $c(t)$ (数百kHz ~ 数MHz) $c(t) = \cos 2\pi f_c t$
 f_c : キャリア周波数

音声信号のスペクトル $|X(\omega)|$



実数値の信号のフーリエ変換
 なので、 $|X(\omega)|$ は原点对称

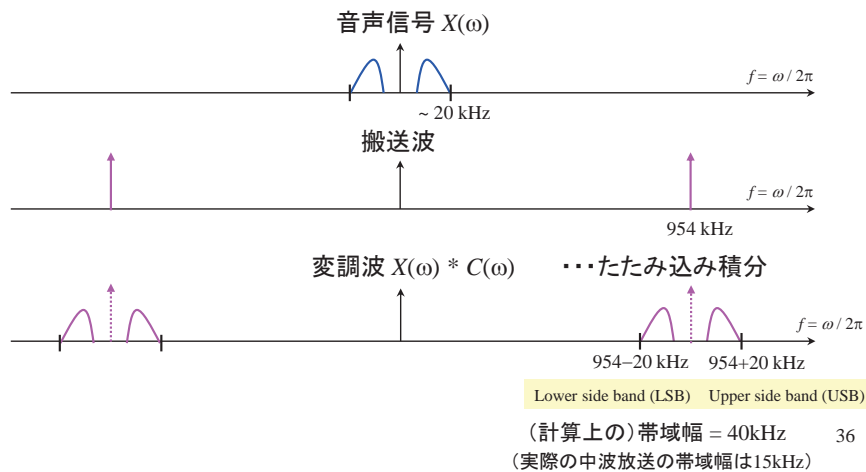
35

フーリエ領域で見ると

音声信号 $X(\omega)$

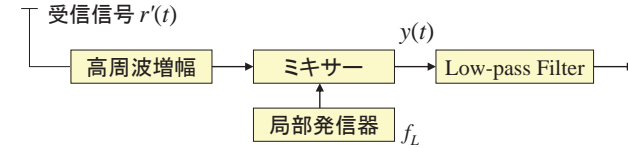
搬送波 $C(\omega) = \pi \{ \delta(\omega - 2\pi f_c) + \delta(\omega + 2\pi f_c) \}$

変調波 $F\{x(t)c(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * C(\omega) = \frac{1}{2} \{ X(\omega - 2\pi f_c) + X(\omega + 2\pi f_c) \}$



36

復調(ヘテロダイン方式の原理)



$$q(t) = \cos 2\pi f_L t$$

$$Q(\omega) = \pi \{ \delta(\omega - 2\pi f_L) + \delta(\omega + 2\pi f_L) \}$$

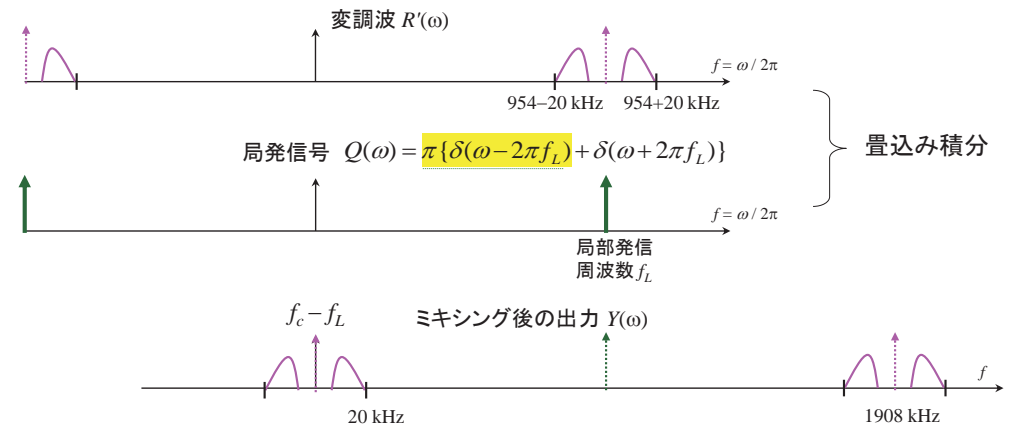
ミキシング後の出力

$$y(t) = r'(t) q(t)$$

$$Y(\omega) = F\{r'(t)q(t)\} = \frac{1}{2\pi} R'(\omega) * Q(\omega) = \frac{1}{2} \{ R'(\omega - 2\pi f_L) + R'(\omega + 2\pi f_L) \}$$

37

復調(ヘテロダイン方式の原理)



$f_c - f_L = 0$ ならば 20kHz以上を除去する低域通過フィルタ(LPF)
 により原信号を得ることができる
 (ホモダイン検波)

$f_c - f_L = f_{IF}$ f_{IF} : 中間周波数(スーパーヘテロダイン検波)

38