

デジタル電子回路

第2回

ブール代数

ブール代数の定義

集合Lが与えられ、その任意の元(要素)A, Bに対し、2種類の演算 $\cdot$ 、 $+$ が定義されているとき、 $A \cdot B$ 、 $A+B$ はLの元であり、次の公理が成立する。ただし、A,B,CはLの元とする。

【公理1】可換則

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + B = B + A$$

【公理2】結合則

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

【公理3】吸収則

$$A \cdot (A + B) = A$$

$$A + (A \cdot B) = A$$

【公理4】分配則

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

【公理5】相補則

最小元 ϕ と最大元 I が存在し、任意の元 A に対して

$$A \cdot \bar{A} = \phi$$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$\bar{A}$ を補元と呼ぶ。

以上が成立するとき
Lをブール代数という。

ブール代数の双対性 (Duality)

双対性(そうついせい) : Duality 2つのものが対(裏返し)になっていること。

相対(そうたい)という言葉もあるので注意。

ブール代数の各元の補元をとり、演算記号 $\cdot$ 、 $+$ を交換して得られる関係はブール代数のすべての公理に反しない。

$$A \cdot B = B \cdot A \longrightarrow \bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A}$$

$\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ を新たにA, Bと書くことで公理1の第2式となる。

ブール代数と論理関数

2つの元 0, 1だけを有する集合Lを考える。

ブール代数の2つの演算 $\cdot$ 、 $+$ をAND, OR, Aの補元 $\bar{A}$ をAに対するNOTに対応

$$\begin{array}{ll} \text{演算 } \cdot & \longrightarrow \text{AND} \\ \text{演算 } + & \longrightarrow \text{OR} \\ \bar{A} & \longrightarrow \text{NOT} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{最大元 } I & : 1 \\ \text{最小元 } \phi & : 0 \end{array}$$

L'の任意の元A,B,Cは、ブール代数の公理をすべて満たしており、L'はブール代数。

任意の論理関数 $f(A,B,C,\dots)$ は、0または1の値をとりL'に属し、論理関数の集合はブール代数となる。

ブール代数の諸性質はすべて論理関数に適用できる。

論理関数の諸定理

【定理2】 $A \cdot 1 = A$
 $A + 0 = A$

<証明> 第1式 公理5の第2式を用いると
 $A \cdot 1 = A \cdot (A + \bar{A})$
よって公理3の第1式より $A \cdot 1 = A$

【定理3】 $A \cdot 0 = 0$
 $A + 1 = 1$

<証明> 第1式 公理5の第1式を用いると
 $A \cdot 0 = A \cdot (A \cdot \bar{A})$
 $= (A \cdot A) \cdot \bar{A} = A \cdot \bar{A}$
 $= 0$

論理関数の諸定理

【定理4】 $\overline{(\bar{A})} = A$

<証明> $\overline{(\bar{A})} = \overline{(\bar{A})} + 0 = \overline{(\bar{A})} + A \cdot \bar{A} = (\overline{(\bar{A})} + A) \cdot (\overline{(\bar{A})} + \bar{A})$
 $= (\overline{(\bar{A})} + A) \cdot 1 = (\overline{(\bar{A})} + A) \cdot (A + \bar{A})$
 $= (\overline{(\bar{A})} \cdot A + A \cdot \bar{A}) + (\overline{(\bar{A})} \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot A) = \bar{A} + A = A$

【定理5】 Aの補元 $\bar{A}$ はただ一つ存在する。

<証明> Aが異なる2つの補元 $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ を持ったとすると、
 $\bar{A}_1 = \bar{A}_1 \cdot 1 = \bar{A}_1 \cdot (A + \bar{A}_2) = \bar{A}_1 \cdot A + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$
 $= 0 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 = \bar{A}_2$
 $\bar{A}_2 = \bar{A}_2 \cdot 1 = \bar{A}_2 \cdot (A + \bar{A}_1) = \bar{A}_2 \cdot A + \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_1$
 $= 0 + \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_1 = \bar{A}_1$

論理関数の諸定理

【定理6】 $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ **ド・モルガンの定理**
 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

<証明> $\overline{A} \cdot \overline{B}$ が $A+B$ の補元であることを示す。

$$\begin{aligned}(A+B) + \overline{A} \cdot \overline{B} &= ((A+B) + \overline{A}) \cdot ((A+B) + \overline{B}) \\ &= ((A+A) + B) \cdot (A + (B+\overline{B})) \\ &= (1+B) \cdot (A+1) = 1 \cdot 1 \\ &= 1 \quad \text{公理5} \quad \text{定理3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A+B) \cdot (\overline{A} \cdot \overline{B}) &= A \cdot (\overline{A} \cdot \overline{B}) + B \cdot (\overline{A} \cdot \overline{B}) \\ &= (A \cdot \overline{A}) \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot (B \cdot \overline{B}) \\ &= 0 \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot 0 = 0 + 0 \\ &= 0 \quad \text{公理5} \quad \text{定理3}\end{aligned}$$

ド・モルガンの定理

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

重要:必ず覚えておくこと。

一般に論理関数 $f(A,B,C,\dots,+, \cdot)$ が与えられた時、 $\overline{f}$ は f の各変数の補元をとり、論理記号 $+$ 、 $\cdot$ を入れ替えて得られる。

$$\overline{f}(A, B, C, \dots, +, \cdot) = f(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \dots, \cdot, +)$$

A を $\overline{A}$ に 入れ替え

論理関数の諸定理

【定理1】 $A \cdot A = A$ **ベキ等則**
 $A + A = A$

<証明>

第1式 公理3の第2式を用いると

$$A \cdot A = A \cdot (A + (A \cdot B)) = A \cdot (A + C) \quad (A \cdot B) \text{を} C \text{とおく}$$

よって公理3の第1式より

$$A \cdot A = A$$

第2式 公理3の第1式を用いて $(A+B)$ を D とおくと

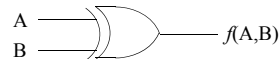
$$\begin{aligned}A + A &= A + (A \cdot (A + B)) = A + (A \cdot D) \\ &= A\end{aligned}$$

定理1の第1式と第2式は互いに双対の関係にある。
 双対性のある公理から導かれる定理にも双対性がある。

論理関数の組み立てと展開

真理値表が与えられた時、どのように論理関数を求めるか？

<例題1> 排他的論理和 (XOR, EXOR: Exclusive OR)



真理値表 論理式による表現

A	B	$f(A,B)$	$f(A,B) = A \oplus B$
0	0	0	
0	1	1	$f(A,B) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$
1	0	1	
1	1	0	

この論理式はどうやって導出するか？
 演習でやった通り、複数の表現がある。

XORの論理式

<例題1> 排他的論理和 (XOR: Exclusive OR)

真理値表

A	B	$f(A,B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A または B のいずれか一方だけが1の時論理関数 $f(A,B)$ の値は1となる。

$(A,B)=(0,1)$ または $(A,B)=(1,0)$ の時に $f(A,B)=1$ となる

$$f(A,B) = f(0,1) + f(1,0)$$

$A=0$ かつ $B=1$ の時だけ $f(0,1)=1$ であるから

$$f(0,1) = \overline{A} \cdot B$$

同様に、 $A=1$ かつ $B=0$ の時だけ $f(1,0)=1$ であるから

$$f(1,0) = A \cdot \overline{B}$$

よって、 $f(A,B) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$

例題2

<例題2> 多数決回路 (A,B,C のうち2つ以上が1であると1を出力)

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(A,B,C)=1$ となる A,B,C の組み合わせに注目

$f(A,B,C)=1$ となるのはこれらの組み合わせのいずれかの場合。

$$f(A,B,C) = f(0,1,1) + f(1,0,1) + f(1,1,0) + f(1,1,1)$$

$f(0,1,1)$ は $A=0, B=1, C=1$ が同時に成立するときだけ1となる。

$$f(0,1,1) = \overline{A} \cdot B \cdot C$$

他項も同様にして

$$f(1,0,1) = A \cdot \overline{B} \cdot C$$

$$f(1,1,0) = A \cdot B \cdot \overline{C}$$

$$f(1,1,1) = A \cdot B \cdot C$$

$$f(A,B,C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$$

真理値表から論理関数を求める方法(1)

論理関数 f は、 f の値が 1 となる入力変数の値 0,1 の組み合わせについて、その変数の値が 1 の時はそのまま、0 の時は補元 (') をとり、すべての変数について AND をとった項を、OR で結んで組み立てる。(積和形、AND-OR)

<問題> 以下の真理値表から論理関数を導出せよ。

A	B	C	$f(A,B,C)$	
0	0	0	1	$f(A,B,C) = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C}$
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	0	$\bar{A} \cdot B \cdot C$ のような、すべての入力変数を 1 つだけ含む積のことを最小項という。(極小項とも言う)
1	1	0	0	
1	1	1	0	
1	0	1	0	
1	1	1	0	

加法標準形: 論理関数を最小項の論理和として表現したもの

例題2

前出のスライド

<例題2> 多数決回路 (A,B,C のうち2つ以上が1であると1を出力)

A	B	C	$f(A,B,C)$	
0	0	0	0	$f(A,B,C)=1$ となる A,B,C の組み合わせに注目
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$f(A,B,C) = f(0,1,1) + f(1,0,1) + f(1,1,0) + f(1,1,1)$
1	1	0	1	
1	1	1	1	
1	0	1	1	
1	1	0	1	

$f(A,B,C)=1$ となるのはこれらの組み合わせのいずれかの場合。

$$f(A,B,C) = f(0,1,1) + f(1,0,1) + f(1,1,0) + f(1,1,1)$$

$f(0,1,1)$ は $A=0, B=1, C=1$ が同時に成立するときだけ1となる。

$$f(0,1,1) = \bar{A} \cdot B \cdot C$$

他項も同様にして

$$f(1,0,1) = A \cdot \bar{B} \cdot C \quad f(1,1,0) = A \cdot B \cdot \bar{C} \quad f(1,1,1) = A \cdot B \cdot C$$

$$f(A,B,C) = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

展開定理(1)

n 変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の論理関数 $f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$

任意の変数 X_i について、次のように展開できる。

$$f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) = X_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, 1, \dots, X_n) + \bar{X}_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, 0, \dots, X_n)$$

<例題2を例にとると> $f(A, B, C) = A \cdot f(1, B, C) + \bar{A} \cdot f(0, B, C)$

A	B	C	$f(A,B,C)$	
0	0	0	0	$f(1, B, C) = \bar{B} \cdot C + B \cdot \bar{C} + B \cdot C$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$f(0, B, C) = B \cdot C$
1	1	0	1	
1	1	1	1	
1	0	1	1	
1	1	1	1	

$$f(A, B, C) = A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$$

前の結果と比較してみよ。

<問> Bに関して展開し、同じ論理式が得られることを確認せよ。

展開定理(1)

n 変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の論理関数 $f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$

任意の変数 X_i について、次のように展開できる。

$$f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) = X_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, 1, \dots, X_n) + \bar{X}_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, 0, \dots, X_n)$$

<例題2を例にとると> $f(A, B, C) = B \cdot f(A, 1, C) + \bar{B} \cdot f(A, 0, C)$

A	B	C	$f(A,B,C)$	
0	0	0	0	$f(A, 1, C) = \bar{A} \cdot C + A \cdot \bar{C} + A \cdot C$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$f(A, 0, C) = A \cdot C$
1	1	0	1	
1	1	1	1	
1	0	1	1	
1	1	1	1	

$$f(A, B, C) = A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$$

展開定理の証明

任意の変数 X_i について、次のように展開できる。

$$f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) = X_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, 1, \dots, X_n) + \bar{X}_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, 0, \dots, X_n)$$

$$f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) = (X_i + \bar{X}_i) \cdot f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)$$

$$= X_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) + \bar{X}_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)$$

第1項は $X_i=1$ のときだけ、 $f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)$ に等しい。

第2項は $X_i=0$ ($\bar{X}_i=1$) のときだけ、 $f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)$ に等しい。

よって

$$f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) = X_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, 1, \dots, X_n) + \bar{X}_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, 0, \dots, X_n)$$

展開定理

展開定理を繰り返し適用すると・

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) &= X_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, 1, X_j, \dots, X_n) + \bar{X}_i \cdot f(X_1, X_2, \dots, 0, X_j, \dots, X_n) \\ &= X_i \cdot X_j \cdot f(X_1, X_2, \dots, 1, 1, \dots, X_n) + X_i \cdot \bar{X}_j \cdot f(X_1, X_2, \dots, 1, 0, \dots, X_n) \\ &\quad + \bar{X}_i \cdot X_j \cdot f(X_1, X_2, \dots, 0, 1, \dots, X_n) + \bar{X}_i \cdot \bar{X}_j \cdot f(X_1, X_2, \dots, 0, 0, \dots, X_n) \end{aligned}$$

これをすべての変数に対して行うと...

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) &= X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_{n-1} \cdot X_n \cdot f(1, 1, 1, \dots, 1, 1) \\ &\quad + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_{n-1} \cdot \bar{X}_n \cdot f(1, 1, 1, \dots, 1, 0) \\ &\quad + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_{n-1} \cdot X_n \cdot f(1, 1, 1, \dots, 0, 1) \\ &\quad + \dots \dots \dots + \\ &\quad + X_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 \cdot \dots \cdot \bar{X}_{n-1} \cdot \bar{X}_n \cdot f(1, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ &\quad + \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 \cdot \dots \cdot \bar{X}_{n-1} \cdot \bar{X}_n \cdot f(0, 0, 0, \dots, 0, 0) \end{aligned}$$

加法標準形

真理値表から論理関数を求める方法(2)

真理値表の0に着目する方法もある。

<例題1> 排他的論理和 (XOR: Exclusive OR)

真理値表			$f(A,B)$	A と B が一致するとき $f(A,B)$ の値は0となる。 ($A,B)=(0,0)$, ($A,B)=(1,1)$ の時 $f(A,B)=0$ この時、 $f(A,B)=1$ $f(A,B) = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$ $f(A,B) = \overline{f(A,B)} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B}$ $= \overline{(\overline{A} \cdot \overline{B})} \cdot \overline{(A \cdot B)}$ $= (A+B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$ $= A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$
A	B			
0	0		0	
0	1		1	
1	0		1	
1	1		0	

真理値表から論理関数を求める方法(2)

例題2

<例題2>

今回は $f(A,B,C)=0$ となる A,B,C の組み合わせに注目

A	B	C	$f(A,B,C)$	$f(A,B,C)=0$, すなわち $\overline{f(A,B,C)}=1$ となるのは これらの組み合わせのいずれか。 $\overline{f(A,B,C)} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$ $f(A,B,C) = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C}$ $= \overline{(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C})} \cdot \overline{(\overline{A} \cdot B \cdot C)} \cdot \overline{(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C})} \cdot \overline{(A \cdot B \cdot C)}$ $= (A+B+C) \cdot (A+B+\overline{C}) \cdot (A+\overline{B}+C) \cdot (\overline{A}+B+C)$
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

<問>

上式が真理値表を満たしていることを確かめよ。

真理値表から論理関数を求める方法(2)

論理関数 f は、 f の値が 0 となる入力変数の値 0, 1 の組み合わせについて、その変数の値が 0 の時はそのまま、1 の時は補元(′)をとり、すべての変数についてORをとった項を、ANDで結んで組み立てる。(和積形 OR-AND)

<問題> 以下の真理値表から論理関数を導出せよ。

A	B	C	$f(A,B,C)$	$f(A,B,C) = (\overline{A}+B+\overline{C}) \cdot (\overline{A}+\overline{B}+C) \cdot (\overline{A}+B+C)$ $\overline{A}+B+\overline{C}$ のような、すべての入力変数を 1つだけ含む和のことを最大項という。 乗法標準形: 論理関数を最大項の論理積として 表現したもの
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

展開定理(2) 乗法標準系

$$f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) = (X_i + f(X_1, X_2, \dots, 0, \dots, X_n))(\overline{X_i} + f(X_1, X_2, \dots, 1, \dots, X_n))$$

$$f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) = X_i \cdot \overline{X_i} + f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)$$

$$= (X_i + f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n))(\overline{X_i} + f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n))$$

$$= (X_i + f(X_1, X_2, \dots, 0, \dots, X_n))(\overline{X_i} + f(X_1, X_2, \dots, 1, \dots, X_n))$$

<再び例題2を例にとってみよう>

A	B	C	$f(A,B,C)$	$f(A,B,C) = (A+f(0,B,C)) \cdot (\overline{A}+f(1,B,C))$ $f(0,B,C) = (B+C) \cdot (B+\overline{C}) \cdot (\overline{B}+C)$ $f(1,B,C) = B+C$ $f(A,B,C) = (A+B+C) \cdot (A+B+\overline{C}) \cdot (A+\overline{B}+C) \cdot (\overline{A}+B+C)$ 分配則 $A+(B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$ 前の結果と比較してみよ。
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

真理値表から論理関数を求める方法(2)

例題2

<例題2> 今回は $f(A,B,C)=0$ となる A,B,C の組み合わせに注目

A	B	C	$f(A,B,C)$	$f(A,B,C)=0$, すなわち $\overline{f(A,B,C)}=1$ となるのは これらの組み合わせのいずれか。 $\overline{f(A,B,C)} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$ $f(A,B,C) = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C}$ $= \overline{(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C})} \cdot \overline{(\overline{A} \cdot B \cdot C)} \cdot \overline{(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C})} \cdot \overline{(A \cdot B \cdot C)}$ $= (A+B+C) \cdot (A+B+\overline{C}) \cdot (A+\overline{B}+C) \cdot (\overline{A}+B+C)$
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

前出のスライド

<問>

上式が真理値表を満たしていることを確かめよ。

展開定理(2)を繰り返し適用すると...

$$f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) = (X_i + f(X_1, X_2, \dots, 0, \dots, X_n))(\overline{X_i} + f(X_1, X_2, \dots, 1, \dots, X_n))$$

第1項 = $X_i + f(X_1, X_2, \dots, 0, \dots, X_n) \cdot (\overline{X_i} + f(X_1, X_2, \dots, 0, 1, \dots, X_n))$
 $= (X_i + f(X_1, X_2, \dots, 0, \dots, X_n)) \cdot (X_i + \overline{X_i} + f(X_1, X_2, \dots, 0, 1, \dots, X_n))$

第2項 = $(\overline{X_i} + f(X_1, X_2, \dots, 1, \dots, X_n)) \cdot (\overline{X_i} + \overline{X_i} + f(X_1, X_2, \dots, 1, 1, \dots, X_n))$

これをすべての変数に対して行くと...

$$f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{n-1} + X_n + f(0, 0, 0, \dots, 0, 0))$$

$$\cdot (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{n-1} + X_n + f(0, 0, 0, \dots, 0, 1))$$

$$\cdot (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{n-1} + X_n + f(0, 0, 0, \dots, 1, 0))$$

$$\cdot \dots$$

$$\cdot (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{n-1} + X_n + f(0, 1, 1, \dots, 1, 1))$$

$$\cdot (\overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3} + \dots + \overline{X_{n-1}} + \overline{X_n} + f(1, 1, 1, \dots, 1, 1))$$

まとめ—加法標準形—

$$\begin{aligned}
 f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = & X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot \overline{X_{n-1}} \cdot \overline{X_n} \cdot f(1, 1, 1, \dots, 1, 1) \\
 & + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot \overline{X_{n-1}} \cdot X_n \cdot f(1, 1, 1, \dots, 1, 0) \\
 & + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_{n-1} \cdot \overline{X_n} \cdot f(1, 1, 1, \dots, 0, 1) \\
 & + \dots \dots \dots + \\
 & + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot \dots \cdot \overline{X_{n-1}} \cdot \overline{X_n} \cdot f(1, 0, 0, \dots, 0, 0) \\
 & + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot \dots \cdot \overline{X_{n-1}} \cdot \overline{X_n} \cdot f(0, 0, 0, \dots, 0, 0)
 \end{aligned}$$

変数の値 0.1 のすべての組み合わせにおける論理関数の値 と
その変数の値の組み合わせの時だけ値が1となるようなAND
から構成されている。

真理値表の1の項と各最小項が1対1対応している。

任意の論理関数は、 $\cdot, +, \neg$ を用いて書くことができる。
(AND回路、OR回路、NOT回路の組み合わせで実現できる。)

まとめ—乗法標準形—

$$\begin{aligned}
 f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = & (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + \overline{X_{n-1}} + \overline{X_n} + f(0, 0, 0, \dots, 0, 0)) \\
 & \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + \overline{X_{n-1}} + \overline{X_n} + f(0, 0, 0, \dots, 0, 1)) \\
 & \cdot (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + \overline{X_{n-1}} + \overline{X_n} + f(0, 0, 0, \dots, 1, 0)) \\
 & \cdot \dots \dots \dots \cdot \\
 & \cdot (X_1 + \overline{X_2} + \overline{X_3} + \dots + \overline{X_{n-1}} + \overline{X_n} + f(0, 1, 1, \dots, 1, 1)) \\
 & \cdot (\overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3} + \dots + \overline{X_{n-1}} + \overline{X_n} + f(1, 1, 1, \dots, 1, 1))
 \end{aligned}$$

変数の値 0.1 のすべての組み合わせにおける論理関数の値 と
その変数の値の組み合わせの時だけ値が0となるようなOR
から構成されている。

真理値表の0の項と各最大項が1対1対応している。

任意の論理関数は、 $\cdot, +, \neg$ を用いて書くことができる。
(AND回路、OR回路、NOT回路の組み合わせで実現できる。)

用語について

- リテラル: ある論理変数 X が与えられたとき、 $\overline{X}$ または X をリテラルという。
リテラルの論理積を「積項」、論理和を「和項」と呼ぶ。
- 最小項(極小項): すべての入力変数を1回だけ含む積項
 $ABC, A\overline{B}C$ など
- 最大項(極大項): すべての入力変数を1回だけ含む和項
 $A+B+C, A+B+\overline{C}$ など
- 加法標準形: 論理関数を最小項の論理和で表現したもの。
(主加法標準形/選言標準形/最小項表現/極小項表現とも呼ぶ)
- 乗法標準形: 論理関数を最大項の論理積で表現したもの。
(主乗法標準形/連言標準形/最大項表現/極大項表現とも呼ぶ)
- リード・マラー展開 (EX-ORだけで表す)でも標準形がある

真理値表より求めた標準形

ちょっとしつこいですが・・・

例によって排他的論理和を考える。真理値表は以下。

A	B	$f(A,B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

まず加法標準形で考えよう。 $f(A,B)$ を展開すると、

$$f(A,B) = A \cdot B \cdot f(1,1) + A \cdot \overline{B} \cdot f(1,0) + \overline{A} \cdot B \cdot f(0,1) + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot f(0,0)$$

$$\text{真理値表より } f(1,1) = f(0,0) = 0 \\ f(1,0) = f(0,1) = 1$$

$$f(A,B) = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

加法標準形では、ORで結ばれる各項は、
変数と論理関数 f の値とのANDで表される。

f の値が1となる項だけが残る。

この時の f の係数は、その f の値が1となる各変数の値0,1について、1の場合はそのまま、0の場合は補元() をとり、すべての変数のANDをとった形をしており、 $f=1$ の時、その係数の値も1となる

真理値表より求めた標準形

ちょっとしつこいですが・・・

例によって排他的論理和を考える。真理値表は以下。

A	B	$f(A,B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

まず加法標準形で考えよう。 $f(A,B)$ を展開すると、

$$f(A,B) = A \cdot B \cdot f(1,1) + A \cdot \overline{B} \cdot f(1,0) + \overline{A} \cdot B \cdot f(0,1) + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot f(0,0)$$

$$\text{真理値表より } f(1,1) = f(0,0) = 0 \\ f(1,0) = f(0,1) = 1$$

$$f(A,B) = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

論理関数 f は、 f の値が1となる入力変数の値 0,1 の組み合わせについて、
その変数の値が1の時はそのまま、0の時は補元() をとり、すべての変数についてANDをとった項を、ORで結んで求めることができる。

真理値表よりもとめた標準形

次は乗法標準形で、 $f(A,B)$ を展開すると、

$$\begin{aligned}
 f(A,B) = & (A+B+f(0,0)) \cdot (A+B+f(0,1)) \cdot (\overline{A}+B+f(1,0)) \\
 & \cdot (\overline{A}+B+f(1,1)) \\
 = & (A+B+0) \cdot (A+B+1) \cdot (\overline{A}+B+1) \cdot (\overline{A}+B+0) \\
 = & (A+B) \cdot (\overline{A}+B)
 \end{aligned}$$

乗法標準形では、ANDで結ばれる各項は、
変数と論理関数 f の値とのORで表される。

f の値が1の時は、その項は他の変数の値によらず1となるため、
 f の値が0である項だけのANDが残る。

残った項の変数より作られるORの値は、その f の値が0の時に0となる

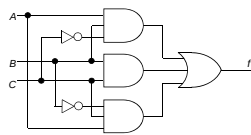
論理関数 f は、 f の値が0となる入力変数の値 0,1 の組み合わせについて、
その変数の値が0の時はそのまま、1の時は補元() をとり、すべての変数についてORをとった項を、ANDで結んで求めることができる。

組み合わせ論理回路の実現

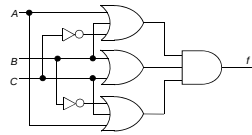
積和形: 論理変数のANDをとったいくつかの項のORで表現
(最小項の論理和なら加法標準形)

和積形: 論理変数のORをとったいくつかの項のANDで表現
(最大項の論理積なら乗法標準形)

<例>

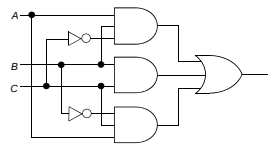


積和形 ($f = ABC̄ + BC + ĀBC$)
加法標準形ではない



和積形 ($f = (A+B+C̄) · (B+C) · (A+B̄+C)$)
乗法標準形ではない

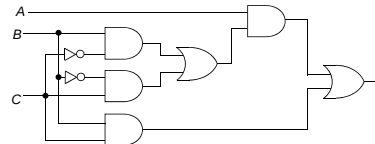
組み合わせ論理回路の実現(2)



$$f = A \cdot B \cdot \bar{C} + B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C$$

- ・論理ゲートの段数が少なく、信号の遅延が小さい。
- ・各ゲートの入力数は多い。

$f = A \cdot (B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C) + B \cdot C$ と変形すると、以下のような回路となる。



4段構成
各ゲートは2入力
(NOTをゲートと見なければ...)

積和形と和積形

積和形: 出力側から数えて奇数段目がOR、偶数段目がAND

和積形: 出力側から数えて奇数段目がAND、偶数段目がOR

<積和形の例>

