

デジタル電子回路

第5回

論理関数の簡単化

真理値表から加法標準形、または乗法標準形で論理関数を導出して実現すると、冗長で必要となる論理ゲートも多くなる。

→ 論理関数の簡単化が必要

カルノー図、クワイン・マクラスキー法

<簡単な例>

AND

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$f = A+B$ と簡単な論理式で表現できる(論理ゲートも1つでよい)が、真理値表から加法標準形を求めると...

$$f = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} + A \cdot B$$

と3項の和からなる。

これをそのまま実現すると、2入力ANDゲート3個、3入力ORゲート1個、NOTゲート2個必要。

論理式の変形で簡略化すると見通しの悪いことが多い。

$$f = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} + A \cdot B = \bar{A} \cdot B + A \cdot (\bar{B} + B) = \bar{A} \cdot B + A$$

分配則を使えば... $= (A+\bar{A}) \cdot (A+B) = A+B$

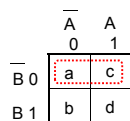
変数が多くなるとたいへん。 → 図式解法

カルノー図

カルノー図 (Karnaugh Map)

論理変数のANDの組み合わせを平面に表す。

隣り合うマス目では変数の状態はただ1箇所だけ異なるように配置。

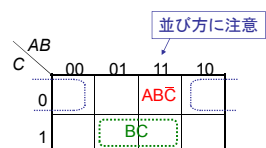


2変数のカルノー図

aは $\bar{A} \cdot \bar{B}$ 、cは $A \cdot \bar{B}$ を表す。

で囲んだところは、 $\bar{B}$ となる。

$$\bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{B} = \bar{B}$$



(a) 3変数

<問題>

1. $A \cdot B \cdot \bar{C}$ はどこになるか?
2. BC はどこになるか?
3. で示した場所は どう表されるか

$\bar{B} \cdot C$

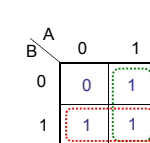
カルノー図による簡単化

<簡単な例>

AND

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$f = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} + A \cdot B$$



カルノー図

1.カルノー図を書き、論理関数の出力を記入する。

2.積項に対応する長方形で、1となるものを大きいものから順次探す。

はB、はAを示す。

3.求めた長方形のなるべく少ない組み合わせですべて1を満たすものを探す。

4.積和形で表す。

$$f = A + B$$

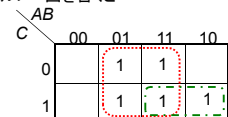
カルノー図による簡単化の例

2週目にやった例題 : 真理値表から論理関数を加法標準形で表すと、

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(A,B,C) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

カルノー図を書く



で示されるところは:B

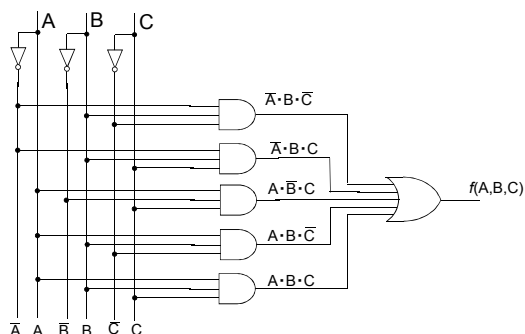
で示されるところは:AC

よって $f = B + A \cdot C$

加法標準形での実現

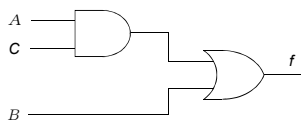
求めた論理関数を直接AND、OR、NOTで実現してみると...

$$\text{加法標準形 } f(A,B,C) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$



簡単化した論理関数の実現

$$f = B + A \cdot C$$



例題

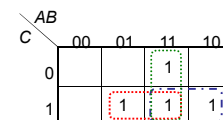
多数決回路 (A,B,Cのうち2つ以上が1であると1を出力)

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- (1) 加法標準形で論理式を求めよ。
 (2) カルノー図を書いて簡単化し、論理式を求めよ。
 (3) (1)と(2)で求めた論理式が等しいことを示せ。

$$(1) f(A,B,C) = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

(2)



- : $B \cdot C$
 : $A \cdot C$
 : $A \cdot B$

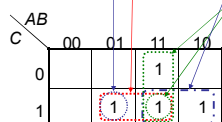
$$\text{よって、} f = A \cdot B + B \cdot C + A \cdot C$$

例題解答のつづき

- (3) (1)と(2)で求めた論理式が等しいことを示せ。

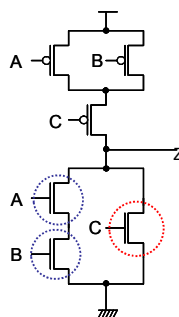
$$\begin{aligned} f(A,B,C) &= \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C \\ &= \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + \underbrace{A \cdot B \cdot C}_{A \cdot B \cdot C} + \underbrace{A \cdot B \cdot C}_{A \cdot B \cdot C} \\ &= (\bar{A} + A) \cdot B \cdot C + A \cdot C \cdot (\bar{B} + B) + \underbrace{A \cdot B \cdot (\bar{C} + C)}_{A \cdot B \cdot C} \\ &= A \cdot B + B \cdot C + A \cdot C \end{aligned}$$

$$f = A \cdot B + B \cdot C + A \cdot C$$



例題をもう一つ

以下のCMOS論理関数の論理式を求めよ。



- (1) CMOS論理回路から直接求めると

$$Z = A \cdot B + \bar{C}$$

- (2) 真理値表から求めると

$$Z = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

- (3) カルノー図を書いて求めると...

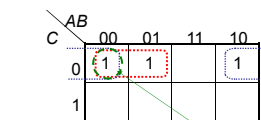
A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

例題をもう一つ (つづき)

- (1) CMOS論理回路から直接求めると $Z = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{C}$

- (2) 真理値表から求めると $Z = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$

- (3) カルノー図を書いて求めると...



$$\text{よって } Z = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{C}$$

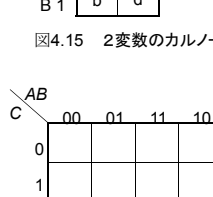
$$\begin{aligned} Z &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C \\ &= (\bar{B} + B) \cdot \bar{A} \cdot \bar{C} + (A + \bar{A}) \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \\ &= \bar{A} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \\ &= (\bar{A} + \bar{B}) \cdot \bar{C} = (\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C} \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{C} \end{aligned}$$

カルノー図 (2~4変数)

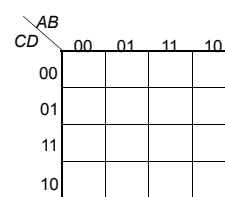
	$\bar{A}$	A
$\bar{B}$	0	1
B	0	1

図4.15 2変数のカルノー図

隣り合うマス目間では、1個の変数の状態だけ異なる。(左端と右端、上端と下端も隣合わせ)



(a) 3変数



(b) 4変数

図4.16 3,4変数のカルノー図

カルノー図 (4変数)

問題 (1) $A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D}$ 、
 (2) $A \cdot \bar{B} \cdot D$ 、
 (3) $\bar{C} \cdot D$ 、
 (4) $\bar{D}$ はどこになるか？

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

カルノー図 (4変数)

問題 (1) $A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D}$ 、
 (2) $A \cdot \bar{B} \cdot D$ 、
 (3) $\bar{C} \cdot D$ 、
 (4) $\bar{D}$ はどこになるか？

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

- (1) 図中緑のマス (面積1:最小)
 (2) 面積2
 (3) 面積4
 (4) 面積8
 最上段と最下段も隣同士

$A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D}$

カルノー図の1マスは**最小項**を表す。

カルノー図(5変数)

E	0	1
AB \ CD	00 01 11 10	00 01 11 10
00		
01		
11		
10		

5変数の時はちょっと複雑。特に隣り合うマス目の見立てが難しくなる。

aと隣合うマスはbだけでなく、b'も含まれる。
 $a: A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D \cdot E$ $b': A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D \cdot \bar{E}$

<問題> cと隣り合うマス目はどこか？

カルノー図(5変数)

E	0	1
AB \ CD	00 01 11 10	00 01 11 10
00		
01		
11		
10		

5変数の時はちょっと複雑。特に隣り合うマス目の見立てが難しくなる。

aと隣合うマスはbだけでなく、b'も含まれる。
 $a: A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D \cdot E$ $b': A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D \cdot \bar{E}$

<問題> cと隣り合うマス目はどこか？

カルノー図(6変数)(正直、4変数まで……)

E	0	1
AB \ CD	00 01 11 10	00 01 11 10
00		
01		
11		
10		

隣接するマス目の性質

すでにやっていますが、もう一度まとめると……

隣接するマス目のORをとると、変数を少なくできる。

<例> aの場合>

$$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$$

$$= \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot (D + \bar{D})$$

$$= \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$$

(つまりDは0でも1でもいい)

<問題>

図中の b, c の領域はどのような論理式で表されるか？

$$b: \bar{C} \cdot D$$

$$c: A \cdot C$$

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

図4.19 隣接するマス目

カルノー図による論理関数の簡単化 (教科書バージョン)

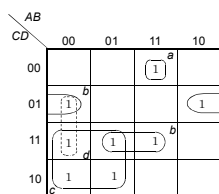
教科書は小さいものからリストアップしている...

【ステップ1】カルノー図中で他の1と隣接しない孤立した1をループ□で囲む。

【ステップ2】隣接する2個の1の組で2ⁿ個 (n≥2) の隣接する1の組に含まれてしまわない1をループで囲む。(図中のbに相当、dは含まれない。)【ステップ3】隣接する4個の1の組で2ⁿ個 (n≥3) の隣接する1の組に含まれてしまわない1をループで囲む。【ステップ4】隣接する2ⁱ (i≥3) 個の1の組で2ⁿ個 (n≥i+1) の隣接する1の組に含まれてしまわない1を順次ループで囲む。

【ステップ5】すべての1がいくつかのループで囲まれるまで続ける。

【ステップ6】ループで囲まれたそれぞれの最小項についてORをとり、非共通の変数を消去してそのループが表す積項(主項)を作り、すべてのループについてORで結ぶ。(ただし、ループdのようにいずれの1も他の組に属する項は不要)

(例)cの項 $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} = \bar{A} \cdot C$ 

カルノー図による論理関数の簡単化

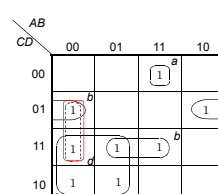
1. カルノー図中に真値表、または加法標準形から1を記入する。
2. 図中で隣接した1を探し、ループで囲む。(ループの面積は2のべき乗の大きさ。)
3. ループの大きさはなるべく大きく。(積項の変数を少なく、数はなるべく少なく。(OR演算を少なく))
4. 積和形で論理関数を表す。

dの組 □ は他のループ中に含まれているので、論理関数の項として含めなくて良い。

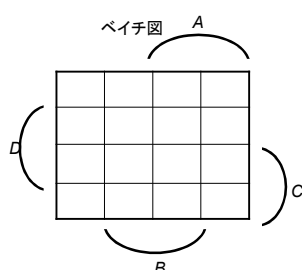
これ以上大きくできないループで表される積項を「主項」という。

$$f = A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D$$

$$f = \bar{A} \cdot C + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$$



カルノー(Karnaugh)図とベイチ(Veitch)図



実は、カルノー図よりベイチ図が古い。1952対1953年でもカルノー図の方が名前として一般的！

禁止項を利用した簡単化

論理変数のすべての値に対して、論理関数の値が定まっていなくて、またその組み合わせが起こらない場合。

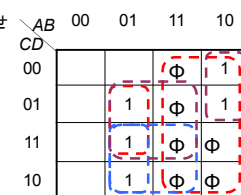
禁止項、ドント・ケア

要は論理変数のこれらの組に対する論理関数の値は0でも1でも良い。たとえば入力が0-9までとして、5以上の場合に動く回路を考えよう。0101以上で1001までがtrue

$$f = \bar{A} \bar{B} D + \bar{A} B \bar{C} + \bar{A} \bar{B} \bar{C}$$

ドントケアを考えよう

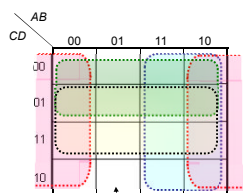
$$f = A + BC + BD$$



カルノー図と最小項、最大項

カルノー図の1マスは**最小項**を表す。

加法標準形で表現 ←→ カルノー図に1を記入。

最大項はどのようになるか？
例えば $A + \bar{B} + \bar{C} + D$ はどこになるか？

- A: 8マス分
- $\bar{B}$: 8マス分
- $\bar{C}$: 8マス分
- D: 8マス分

ここだけ除外した15マス分

これは $A + \bar{B} + \bar{C} + D = \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D}$ から明らか。

最大項からの簡単化

1の数によっては、最大項からの簡単化(和積形)の方が簡単？
考え方は今までと全く一緒(真値表で0を拾ったようにする)

まず最大項で取り除かれるマスに1を記入。

カルノーマップで簡単化する

積和形で簡単化する

和と積を入れ替え、かつ全ての否定を取る

5-9が入力された時に動く回路

0101から1001までがtrue
0000から0100と
1010から1111までがfalse

$$f = \overline{AB} + \overline{ACD} + AB + AC$$

和と積を入れ替え、かつ全ての否定を取る

$$f = (A+B)(A+C+D)(\overline{A+B})(\overline{A+C})$$

NOT 3つ、OR 4つ、AND 1つ合わせて8つのゲート

最小項からのカルノーマップでの答え

$$f = \overline{ABD} + \overline{ABC} + \overline{ABC}$$

NOT 3つ、AND 3つ、OR 1つ合わせて7つのゲート

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	
01	1		1	
11	1		1	1
10	1		1	1

5-9が入力された時に動く回路(10以降はドントケア)

0101から1001までがtrue
0000から0100と
1010から1111までがdon't care

$$f = \overline{AB} + \overline{ACD}$$

和と積を入れ替え、かつ全ての否定を取る

$$f = (A+B)(A+C+D)$$

OR 2つ、AND 1つ合わせて3つのゲート

最小項からのカルノーマップでの答え

$$f = A + BC + BD$$

AND 3つ、OR 1つ合わせて4つのゲート

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	Φ	
01	1		Φ	
11	1		Φ	Φ
10	1		Φ	Φ

最大項からの簡単化

0に注目して、そこを1に置き換える
積和形の簡単化を行う。

$$\overline{f(x_1, x_2, \dots, +, \bullet)}$$

それから、全て補元を取る。

$$\overline{\overline{f(x_1, x_2, \dots, +, \bullet)}}$$

+を・に、・を+に置き換える。

$$\overline{\overline{f(x_1, x_2, \dots, \bullet, +)}}$$

最終の答えはドモルガンの定理を使うと

$$f(x_1, x_2, \dots, +, \bullet)$$

に戻る。一色らの参考書では $\overline{f(x_1, x_2, \dots, +, \bullet)}$ の段階
(双対関数と呼ぶ)のレベルで簡単化するが、これだと
真理値表を作り直すのが面倒なので、出力反転側
で簡単化した。