ディジタル電子回路

第2回

ブール代数

ブール代数の定義

集合Lが与えられ、その任意の元(要素)A, Bに対し、2種類の演算・、+が定義されているとき、A・B、A+BはLの元であり、次の公理が成立する。ただし、A,B,CはLの元とする。

【公理1】 可換則

$A \cdot B = B \cdot A$
$A + B = B + A$

【公理2】 結合則

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
$A + (B + C) = (A + B) + C$

【公理3】 吸収則

$A \cdot (A + B) = A$
$A + (A \cdot B) = A$

【公理4】 分配則

$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

【公理5】 相補則

最小元φと最大元 I が存在し、任意の元Aに対して

$A \cdot \overline{A} = \varphi$
$A + \overline{A} = I$

$\overline{A}$ を補元と呼ぶ。

以上が成立するとき
Lをブール代数という。

ブール代数の双対性(Duality)

双対性(そうついせい) :Duality 2つのものが対(裏返し)になっていること。

相対(そうたい)という言葉もあるので注意。

ブール代数の各元の補元をとり、演算記号・、+を交換して得られる関係は
ブール代数のすべての公理に反しない。

$A \cdot B = B \cdot A \longrightarrow \overline{A} + \overline{B} = \overline{B} + \overline{A}$

$\overline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{B}}$ を新たにA, Bと書くことで公理1の第2式となる。

ブール代数と論理関数

2つの元 0, 1だけを有する集合L'を考える。
ブール代数の2つの演算・、+をAND、OR、Aの補元 $\overline{\mathrm{A}}$ をAに対するNOTに対応

演算・ ⟶ AND
演算+ ⟶ OR
$\overline{\mathrm{A}}$ ⟶ NOT

最大元 I :1
最小元 φ :0

L'の任意の元A,B,Cは、ブール代数の公理をすべて満たしており、L'はブール代数。

任意の論理関数 $f(A,B,C,\ldots)$ は、0または1の値をとりL'に属し、論理関数の集合はブール代数となる。

ブール代数の諸性質はすべて論理関数に適用できる。

論理関数の諸定理

【定理2】 $A \cdot 1 = A$
$A + 0 = A$

<証明> 第1式 公理5の第2式を用いると

$A \cdot 1 = A \cdot (A + \overline{A})$

よって公理3の第1式より $A \cdot 1 = A$

【定理3】 $A \cdot 0 = 0$
$A + 1 = 1$

<証明> 第1式 公理5の第1式を用いると

$A \cdot 0 = A \cdot (A \cdot \overline{A})$
$= (A \cdot A) \cdot \overline{A} = A \cdot \overline{A}$
$= 0$

論理関数の諸定理

【定理4】 $\overline{(\overline{A})} = A$

<証明>

$$\overline{\left(\overline{A}\right)} \underset{\text{定理2}}{=} \overline{\left(\overline{A}\right)} + 0 \underset{\text{公理5}}{=} \overline{\left(\overline{A}\right)} + A \bullet \overline{A} \underset{\text{公理4}}{=} \left(\overline{\left(\overline{A}\right)} + A\right) \bullet \left(\overline{\left(\overline{A}\right)} + \overline{A}\right)$$

$$\underset{\text{公理5}}{=} \left(\overline{\left(\overline{A}\right)} + A\right) \bullet 1 \underset{\text{公理5}}{=} \left(\overline{\left(\overline{A}\right)} + A\right) \bullet \left(A + \overline{A}\right)$$

$$\underset{\text{公理4}}{=} \overline{\left(\overline{A}\right)} \bullet A + A \bullet A + \overline{\left(\overline{A}\right)} \bullet \overline{A} + A \bullet \overline{A} \underset{\text{公理5}}{=} \overline{\left(\overline{A}\right)} \bullet A + A \underset{\text{公理5/定理2}}{=} A$$

【定理5】 Aの補元 $\overline{A}$ はただ一つ存在する。

<証明> A が異なる2つの補元 $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ を持ったとすると、

$$\overline{A}_1 \underset{\text{定理2}}{=} \overline{A}_1 \cdot 1 \underset{\text{公理5}}{=} \overline{A}_1 \cdot (A + \overline{A}_2) \underset{\text{公理4}}{=} \overline{A}_1 \cdot A + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$$

$$\underset{\text{公理5}}{=} 0 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \underset{\text{公理5}}{=} A \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \underset{\text{公理4}}{=} \overline{A}_2 \cdot (A + \overline{A}_1) \underset{\text{公理5}}{=} \overline{A}_2 \cdot 1$$

$$\underset{\text{定理2}}{=} \overline{A}_2$$

論理関数の諸定理

【定理6】 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ **ド・モルガンの定理**

$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

＜証明＞ $\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}}$がA+Bの補元であることを示す。

$$
\begin{aligned}
(A+B)+\overline{A}\bullet\overline{B} &= \left((A+B)\underset{\text{公理4}}{+}\overline{A}\right)\bullet\left((A+B)+\overline{B}\right)\\
&= \left((A+\overline{A})\underset{\text{公理1、2}}{+}B\right)\bullet\left(A+(B+\overline{B})\right)\\
&= (1+B)\underset{\text{公理5}}{\bullet}(A+1)\underset{\text{定理3}}{=}1\bullet 1\\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A+B)\bullet\left(\overline{A}\bullet\overline{B}\right) &= A\bullet\left(\overline{A}\underset{\text{公理4}}{\bullet}\overline{B}\right)+B\bullet\left(\overline{A}\bullet\overline{B}\right)\\
&= \left(A\bullet\overline{A}\right)\underset{\text{公理1、2}}{\bullet}\overline{B}+\overline{A}\bullet\left(B\bullet\overline{B}\right)\\
&= 0\bullet\overline{B}\underset{\text{公理5}}{+}\overline{A}\bullet 0 \underset{\text{定理3}}{=} 0+0\\
&= 0
\end{aligned}
$$

ド・モルガンの定理

$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

重要：必ず覚えておくこと。

一般に論理関数 $f(\mathrm{A,B,C},\ldots,+,\cdot)$が与えられた時、$\overline{f}$ は f の各変数の補元をとり、論理記号＋、・を入れ替えて得られる。

$$\overline{f}(\mathrm{A,B,C},\ldots,+,\cdot)=f(\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{B}},\overline{\mathrm{C}},\ldots,\cdot,+)$$

Aを $\overline{A}$ に

入れ替え

論理関数の諸定理

【定理1】 $A\cdot A=A$ **べキ等則**

$A+A=A$

＜証明＞

第1式　公理3の第2式を用いると

$A\cdot A=A\cdot(A+(A\cdot B))=A\cdot(A+C)$　　$(A\cdot B)$をCとおく

よって公理3の第1式より　$A\cdot A=A$

第2式　公理3の第1式を用いて$(A+B)$をDとおくと

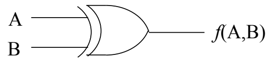
$A+A=A+(A\cdot(A+B))=A+(A\cdot D)$
$=A$

定理1の第1式と第2式は互いに双対の関係にある。
双対性のある公理から導かれる定理にも双対性がある。

論理関数の組み立てと展開

真理値表が与えられた時、どのように論理関数を求めるか？

＜例題1＞ 排他的論理和　(XOR, EXOR: Exclusive OR)



真理値表

A	B	f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

論理式による表現

$f(\mathrm{A,B})=\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}$

$f(\mathrm{A,B})=\overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B}+\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{B}}$

この論理式はどうやって導出するか？

演習でやった通り、複数の表現がある。

XORの論理式

＜例題1＞排他的論理和　(XOR: Exclusive OR)

AまたはBのいずれか一方だけが1の時論理関数$f(\mathrm{A,B})$の値は1となる。

真理値表

A	B	f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$(\mathrm{A,B})=(0,1)$ または $(\mathrm{A,B})=(1,0)$の時に$f(\mathrm{A,B})=1$となる

$f(\mathrm{A,B})=f(0,1)+f(1,0)$

A=0かつB=1の時だけ$f(0,1)=1$であるから

$f(0,1)=\overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B}$

同様に、A=1かつB=0の時だけ$f(0,1)=1$であるから

$f(1,0)=\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{B}}$

よって、 $f(\mathrm{A,B})=\overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{B}+\mathrm{A}\,\overline{\mathrm{B}}$

例題2

＜例題2＞多数決回路　(A,B,Cのうち2つ以上が1であると1を出力)

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(\mathrm{A,B,C})$＝1となるA,B,Cの組み合わせに注目

$f(\mathrm{A,B,C})=1$となるのはこれらの組み合わせの**いずれか**の場合。

$f(\mathrm{A,B,C})=f(0,1,1)+f(1,0,1)+f(1,1,0)+f(1,1,1)$

$f(0,1,1)$ はA=0, B=1, C=1が同時に成立するときだけ1となる。

$f(0,1,1)=\overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}$

他項も同様にして

$f(1,0,1)=\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{B}}\cdot\mathrm{C}$　　$f(1,1,0)=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\overline{\mathrm{C}}$　　$f(1,1,1)=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}$

$$f(\mathrm{A,B,C})=\overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}+\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{B}}\cdot\mathrm{C}+\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\overline{\mathrm{C}}+\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}$$

真理値表から論理関数を求める方法（1）

論理関数 f は、f の値が 1 となる入力変数の値 0,1 の組み合わせについて、その変数の値が 1 の時はそのまま、0 の時は補元（¯）をとり、すべての変数についてANDをとった項を、ORで結んで組み立てる。（積和形、AND-OR）

＜問題＞　以下の真理値表から論理関数を導出せよ。

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$f(A,B,C) = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$

$\overline{A}\cdot B\cdot C$ のような、すべての入力変数を1つだけ含む積のことを最小項という。（極小項とも言う）

加法標準形：論理関数を最小項の論理和として表現したもの

例題2

前出のスライド

＜例題2＞多数決回路　（A,B,Cのうち2つ以上が1であると1を出力）

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(A,B,C)=1$ となるA,B,Cの組み合わせに注目

$f(A,B,C)=1$ となるのはこれらの組み合わせのいずれかの場合。

$f(A,B,C) = f(0,1,1) + f(1,0,1) + f(1,1,0) + f(1,1,1)$

$f(0,1,1)$ はA=0, B=1, C=1が同時に成立するときだけ1となる。

$f(0,1,1) = \overline{A}\cdot B\cdot C$

他項も同様にして

$f(1,0,1) = A\cdot\overline{B}\cdot C$　　$f(1,1,0) = A\cdot B\cdot\overline{C}$　　$f(1,1,1) = A\cdot B\cdot C$

$$f(A,B,C) = \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C$$

展開定理（1）

n 変数 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ の論理関数 $f(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n)$

任意の変数 X_i について、次のように展開できる。

$$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n) = X_i\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, \cdots, X_n) + \overline{X_i}\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, \cdots, X_n)$$

＜例題2を例にとると＞　$f(A, B, C) = A\cdot f(1, B, C) + \overline{A}\cdot f(0, B, C)$

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(1, B, C) = \overline{B}\cdot C + B\cdot\overline{C} + B\cdot C$

$f(0, B, C) = B\cdot C$

$$f(A, B, C) = A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot C$$

前の結果と比較してみよ。

＜問＞　Bに関して展開し、同じ論理式が得られることを確認せよ。

展開定理（1）

n 変数 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ の論理関数 $f(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n)$

任意の変数 X_i について、次のように展開できる。

$$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n) = X_i\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, \cdots, X_n) + \overline{X_i}\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, \cdots, X_n)$$

＜例題2を例にとると＞　$f(A, B, C) = B\cdot f(A, 1, C) + \overline{B}\cdot f(A, 0, C)$

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(A, 1, C) = \overline{A}\cdot C + A\cdot\overline{C} + A\cdot C$

$f(A, 0, C) = A\cdot C$

$$f(A, B, C) = A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot C$$

展開定理の証明

任意の変数 X_i について、次のように展開できる。

$$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n) = X_i\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, \cdots, X_n) + \overline{X_i}\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, \cdots, X_n)$$

$$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n) = \underbrace{(X_i + \overline{X_i})}_{=1}\cdot f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n)$$

$$= X_i\cdot f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n) + \overline{X_i}\cdot f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n)$$

第1項は $X_i=1$ のときだけ、$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n)$ に等しい。

第2項は $X_i=0$ $(\overline{X_i}=1)$ のときだけ、$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n)$ に等しい。

よって

$$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \cdots, X_n) = X_i\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, \cdots, X_n) + \overline{X_i}\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, \cdots, X_n)$$

展開定理

展開定理を繰り返し適用すると‥

$$f(X_1, X_2, \cdots, X_i, X_j, \cdots, X_n)$$

$$= X_i\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, X_j, \cdots, X_n) + \overline{X_i}\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, X_j, \cdots, X_n)$$

$$= X_i\cdot X_j\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, 1, \cdots, X_n) + X_i\cdot \overline{X_j}\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 1, 0, \cdots, X_n)$$

$$+ \overline{X_i}\cdot X_j\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, 1, \cdots, X_n) + \overline{X_i}\cdot\overline{X_j}\cdot f(X_1, X_2, \cdots, 0, 0, \cdots, X_n)$$

これをすべての変数に対して行うと・・・

$$f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot\ldots\cdot X_{n-1}\cdot X_n\cdot f(1, 1, 1, \ldots, 1, 1)$$

$$+ X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot\ldots\cdot\overline{X_{n-1}}\cdot X_n\cdot f(1, 1, 1, \ldots, 1, 0)$$

$$+ X_1\cdot X_2\cdot X_3\overline{\cdot\ldots}\cdot X_{n-1}\cdot X_n\cdot f(1, 1, 1, \ldots, 0, 1)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots +$$

$$+ X_1\cdot\overline{X_2}\cdot\overline{X_3}\cdot\ldots\cdot\overline{X_{n-1}}\cdot\overline{X_n}\cdot f(1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$$

$$+ \overline{X_1}\cdot\overline{X_2}\cdot\overline{X_3}\overline{\cdot\ldots}\cdot\overline{X_{n-1}}\cdot X_n\cdot f(0, 0, 0, \ldots, 0, 0)$$

加法標準形

真理値表から論理関数を求める方法（2）

真理値表の0に着目する方法もある。

＜例題1＞ 排他的論理和 (XOR: Exclusive OR)

真理値表

A	B	f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

AとBが一致するとき f(A,B)の値は0となる。

(A,B)=(0,0) , (A,B)=(1,1)の時 f(A,B)=0

この時、$\overline{f(A,B)} = 1$

$$\overline{f(A,B)} = \overline{A}\cdot\overline{B} + A\cdot B$$

$$f(A,B) = \overline{\overline{f(A,B)}} = \overline{\overline{A}\cdot\overline{B} + A\cdot B}$$
$$= \overline{(\overline{A}\cdot\overline{B})}\cdot\overline{(A\cdot B)}$$
$$= (A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})$$
$$= A\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B$$

真理値表から論理関数を求める方法（2） 例題2

＜例題2＞ 今回は f(A,B,C)＝0となるA,B,Cの組み合わせに注目

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

f(A,B,C)=0、すなわち $\overline{f(A,B,C)}$=1となるのは
これらの組み合わせのいずれか。

$$\overline{f(A,B,C)} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$

$$f(A,B,C) = \overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}}$$
$$= (\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}})\cdot(\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C})\cdot(\overline{\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}})\cdot(\overline{A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}})$$
$$= (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)$$

＜問＞
上式が真理値表を満たしていることを確かめよ。

真理値表から論理関数を求める方法（2）

論理関数 f は、f の値が 0 となる入力変数の値 0, 1 の組み合わせについて、その変数の値が 0 の時はそのまま、1 の時は補元（¯）をとり、すべての変数についてORをとった項を、ANDで結んで組み立てる。（和積形 OR-AND）

＜問題＞ 以下の真理値表から論理関数を導出せよ。

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$f(A,B,C) = (\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$\overline{A}+B+\overline{C}$のような、すべての入力変数を1つだけ含む和のことを最大項という。

乗法標準形：論理関数を最大項の論理積として表現したもの

展開定理（2） 乗法標準系

$$f(X_1,X_2,\cdots X_i,\cdots X_n) = (X_i + f(X_1,X_2,\cdots 0,\cdots X_n))(\overline{X_i} + f(X_1,X_2,\cdots 1,\cdots X_n))$$

$$f(X_1,X_2,\cdots X_i,\cdots X_n) = X_i\cdot\overline{X_i} + f(X_1,X_2,\cdots X_i,\cdots X_n)$$
$$= (X_i + f(X_1,X_2,\cdots X_i,\cdots X_n))(\overline{X_i} + f(X_1,X_2,\cdots X_i,\cdots X_n))$$
$$= (X_i + f(X_1,X_2,\cdots 0,\cdots X_n))(\overline{X_i} + f(X_1,X_2,\cdots 1,\cdots X_n))$$

＜再び例題2を例にとってみよう＞

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(A, B, C) = (A+f(0, B, C))\cdot(\overline{A}+f(1, B, C))$$

$$f(0, B, C) = (B+C)\cdot(B+\overline{C})\cdot(\overline{B}+C)$$

$$f(1, B, C) = B+C$$

$$f(A, B, C) = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)$$

分配則 $A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$

前の結果と比較してみよ。

真理値表から論理関数を求める方法（2） 例題2

＜例題2＞ 今回は f(A,B,C)＝0となるA,B,Cの組み合わせに注目

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

f(A,B,C)=0、すなわち $\overline{f(A,B,C)}$=1となるのは
これらの組み合わせのいずれか。

$$\overline{f(A,B,C)} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$$

$$f(A,B,C) = \overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}}$$
$$= (\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}})\cdot(\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C})\cdot(\overline{\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}})\cdot(\overline{A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}})$$
$$= (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)$$

前出のスライド

＜問＞
上式が真理値表を満たしていることを確かめよ。

展開定理（2）を繰り返し適用すると・・・

$$f(X_1, X_2, \cdot\cdot, X_i, X_j, \cdot\cdot, X_n)$$
$$= (X_i+f(X_1, X_2,\cdot\cdot, 0, X_j, \cdot\cdot, X_n))\cdot(\overline{X_i}+f(X_1, X_2, \cdot\cdot, 1, X_j, \cdot\cdot, X_n))$$

第1項 $= X_i+(X_j+f(X_1, X_2,\cdot\cdot, 0, 0, \cdot\cdot, X_n))\cdot(\overline{X_j}+f(X_1, X_2, \cdot\cdot, 0, 1, \cdot\cdot, X_n))$

$$= (X_i+X_j+f(X_1, X_2,\cdot\cdot, 0, 0, \cdot\cdot, X_n))\cdot(X_i+\overline{X_j}+f(X_1, X_2, \cdot\cdot, 0, 1, \cdot\cdot, X_n))$$

第2項 $= (\overline{X_i}+X_j+f(X_1, X_2,\cdot\cdot, 1, 0, \cdot\cdot, X_n))\cdot(\overline{X_i}+\overline{X_j}+f(X_1, X_2, \cdot\cdot, 1, 1, \cdot\cdot, X_n)))$

これをすべての変数に対して行うと・・・

$$f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = (X_1+X_2+X_3+\ldots+X_{n-1}+X_n+f(0, 0, 0, \ldots, 0, 0))$$
$$\cdot\ (X_1+X_2+X_3+\ldots+X_{n-1}+\overline{X_n}+f(0, 0, 0, \ldots, 0, 1))$$
$$\cdot\ (X_1+X_2+X_3+\ldots+\overline{X_{n-1}}+X_n+f(0, 0, 0, \ldots, 1, 0))$$
$$\cdot\ \ldots\ldots\ldots\ \cdot$$
$$\cdot\ (\overline{X_1}+\overline{X_2}+\overline{X_3}+\ldots+\overline{X_{n-1}}+X_n+f(0, 1, 1, \ldots, 1, 1))$$
$$\cdot\ (\overline{X_1}+\overline{X_2}+\overline{X_3}+\ldots+\overline{X_{n-1}}+\overline{X_n}+f(1, 1, 1, \ldots, 1, 1))$$

まとめ―加法標準形―

$$
\begin{aligned}
f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = {} & X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \ldots \cdot X_{n-1} \cdot X_n \cdot f(1, 1, 1, \ldots, 1, 1) \\
& + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \ldots \cdot \overline{X_{n-1}} \cdot X_n \cdot f(1, 1, 1, \ldots, 1, 0) \\
& + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \overline{\cdot \ldots} \cdot X_{n-1} \cdot X_n \cdot f(1, 1, 1, \ldots, 0, 1) \\
& + \ldots\ldots\ldots + \\
& + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot \ldots \cdot \overline{X_{n-1}} \cdot \overline{X_n} \cdot f(1, 0, 0, \ldots, 0, 0) \\
& + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \overline{\cdot \ldots} \cdot \overline{X_{n-1}} \cdot X_n \cdot f(0, 0, 0, \ldots, 0, 0)
\end{aligned}
$$

変数の値 0.1 のすべての組み合わせにおける論理関数の値 と
その変数の値の組み合わせの時だけ値が1となるようなAND
から構成されている。
真理値表の1の項と各最小項が1対1対応している。

任意の論理関数は、・、+、‾ を用いて書くことができる。
（AND回路、OR回路、NOT回路の組み合わせで実現できる。）

まとめ―乗法標準形―

$$
\begin{aligned}
f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = {} & (X_1+X_2+X_3+\ldots+X_{n-1}+X_n+f(0, 0, 0, \ldots, 0, 0)) \\
& \cdot (X_1+X_2+X_3+\ldots+X_{n-1}+\overline{X_n}+f(0, 0, 0, \ldots, 0, 1)) \\
& \cdot (X_1+X_2+X_3+\ldots+\overline{X_{n-1}}+X_n+f(0, 0, 0, \ldots, 1, 0)) \\
& \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot \\
& \cdot (\overline{X_1}+\overline{X_2}+X_3\overline{+\ldots}+\overline{X_{n-1}}+X_n+f(0, 1, 1, \ldots, 1, 1)) \\
& \cdot (\overline{X_1}+\overline{X_2}+\overline{X_3}+\ldots+\overline{X_{n-1}}+\overline{X_n}+f(1, 1, 1, \ldots, 1, 1))
\end{aligned}
$$

変数の値 0.1 のすべての組み合わせにおける論理関数の値 と
その変数の値の組み合わせの時だけ値が0となるようなOR
から構成されている。
真理値表の0の項と各最大項が1対1対応している。

任意の論理関数は、・、+、‾ を用いて書くことができる。
（AND回路、OR回路、NOT回路の組み合わせで実現できる。）

用語について

・リテラル：ある論理変数 X が与えられたとき、$\overline{X}$ または X を
リテラルという。
リテラルの論理積を「積項」、論理和を「和項」と呼ぶ。

・最小項（極小項）：すべての入力変数を1回だけ含む積項
ABC、A$\overline{B}$C など

・最大項（極大項）：すべての入力変数を1回だけ含む和項
A+B+C, A+B+$\overline{C}$ など

・加法標準形：論理関数を最小項の論理和で表現したもの。
（主加法標準形/選言標準形/最小項表現/極小項表現とも呼ぶ）

・乗法標準形：論理関数を最大項の論理積で表現したもの。
（主乗法標準形/連言標準形/最大項表現/極大項表現とも呼ぶ）

・リード・マラー展開 （EX-ORだけで表す）でも標準形がある

真理値表より求めた標準形

ちょっとしつこいですが・・・
例によって排他的論理和を考える。真理値表は以下。

A	B	f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

まず加法標準形で考えよう。f(A,B)を展開すると、

$$
f(A,B) = A \cdot B \cdot f(1,1) + A \cdot \overline{B} \cdot f(1,0) + \overline{A} \cdot B \cdot f(0,1) + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot f(0,0)
$$

真理値表より $f(1,1) = f(0,0) = 0$
$f(1,0) = f(0,1) = 1$

$$
f(A,B) = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B
$$

加法標準形では、ORで結ばれる各項は、
変数と論理関数 f の値とのANDで表される。

f の値が１となる項だけが残る。

この時の f の係数は、その f の値が1となる各変数の値0,1について、1 の場合はそのまま、0の場合は補元（ ）をとり、すべての変数のANDをとった形をしており、f=1の時、その係数の値も1となる

真理値表より求めた標準形

ちょっとしつこいですが・・・
例によって排他的論理和を考える。真理値表は以下。

A	B	f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

まず加法標準形で考えよう。f(A,B)を展開すると、

$$
f(A,B) = A \cdot B \cdot f(1,1) + A \cdot \overline{B} \cdot f(1,0) + \overline{A} \cdot B \cdot f(0,1) + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot f(0,0)
$$

真理値表より $f(1,1) = f(0,0) = 0$
$f(1,0) = f(0,1) = 1$

$$
f(A,B) = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B
$$

論理関数 f は、f の値が 1 となる入力変数の値 0,1 の組み合わせについて、その変数の値が 1 の時はそのまま、0 の時は補元（‾）をとり、すべての変数についてANDをとった項を、ORで結んで求めることができる。

真理値表よりもとめた標準形

A	B	f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

次は乗法標準形で、f(A,B)を展開すると、

$$
\begin{aligned}
f(A,B) &= (A+B+f(0,0)) \cdot (A+\overline{B}+f(0,1)) \cdot (\overline{A}+B+f(1,0)) \cdot (\overline{A}+\overline{B}+f(1,1)) \\
&= (A+B+0) \cdot (A+\overline{B}+1) \cdot (\overline{A}+B+1) \cdot (\overline{A}+\overline{B}+0) \\
&= (A+B) \cdot (\overline{A}+\overline{B})
\end{aligned}
$$

乗法標準形では、ANDで結ばれる各項は、
変数と論理関数 f の値とのORで表される。

f の値が1の時は、その項は他の変数の値によらず1となるため、f の値が0である項だけのANDが残る。

残った項の変数より作られるORの値は、その f の値が0の時に0となる

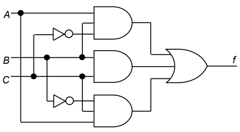
論理関数 f は、f の値が 0 となる入力変数の値 0, 1 の組み合わせについて、その変数の値が 0 の時はそのまま、1 の時は補元（‾）をとり、すべての変数についてORをとった項を、ANDで結んで求めることができる。

組み合わせ論理回路の実現

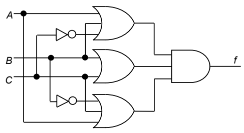
積和形：論理変数のANDをとったいくつかの項のORで表現
（最小項の論理和なら加法標準形）

和積形：論理変数のORをとったいくつかの項のANDで表現
（最大項の論理積なら乗法標準形）

＜例＞

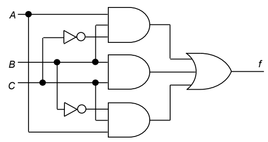


積和形　($f=AB\bar{C}+BC+A\bar{B}C$)
加法標準形ではない



和積形　($f=(A+B+\bar{C})\cdot(B+C)\cdot(A+\bar{B}+C)$)
乗法標準形ではない

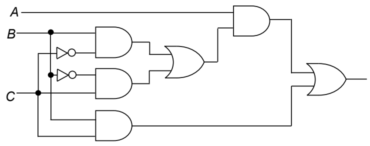
組み合わせ論理回路の実現（2）



$f = A\cdot B\cdot \overline{C} + B\cdot C + A\cdot \overline{B}\cdot C$

- 論理ゲートの段数が少なく、信号の遅延が小さい。
- 各ゲートの入力数は多い。

$f = A\cdot(B\cdot\overline{C} + \overline{B}\cdot C) + B\cdot C$ と変形すると、以下のような回路となる。



4段構成
各ゲートは2入力
（NOTをゲートと
見なければ・・・）

積和形と和積形

積和形：出力側から数えて奇数段目がOR、偶数段目がAND

和積形：出力側から数えて奇数段目がAND、偶数段目がOR

＜積和形の例＞