

問 1

確率モデル

$$X = \theta + \varepsilon$$

において、誤差 ε の分布が平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従うとする。そのとき、独立な観測値 $X_1, X_2, \dots, X_n$ に対して未知の母数 θ のピットマン推定量 $\hat{\theta}^*$ を求めよ。

解答

誤差 ε の分布が平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従うので

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

そして

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n f(X_i - \theta) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\sum_{i=1}^n X_i\theta + \sum_{i=1}^n \theta^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{\theta^2 - 2\theta\left(\sum_{i=1}^n X_i/n\right) + \sum_{i=1}^n X_i^2/n}{2\sigma^2/n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{(\theta - \bar{X})^2 + \left(\sum_{i=1}^n X_i^2/n\right) - \bar{X}^2}{2\sigma^2/n}\right) \end{aligned}$$

問 2

確率モデル

$$X = \theta + \varepsilon$$

において、 n 個の独立な観測値 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が得られるとき、分散の不偏な推定量である不偏分散が

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

になることを証明せよ。ただし誤差 ε の分散が未知として、 $\bar{X}$ が観測値の標本平均とする。

解答

まず誤差 ε の分散を σ^2 と定義する。

$$\sigma^2 = V(\varepsilon) = V(X)$$

標本平均の分散は X_i の独立性より

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2/n}\right) \exp\left(-\frac{(\theta - \bar{X})^2}{2\sigma^2/n}\right)$$

但し

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n \quad \text{そして} \quad \beta = \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 / n\right) - \bar{X}^2$$

定義より θ のピットマン推定量は

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^* &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta \prod_{i=1}^n f(X_i - \theta) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n f(X_i - \theta) d\theta} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2/n}\right) \exp\left(-\frac{(\theta - \bar{X})^2}{2\sigma^2/n}\right) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2/n}\right) \exp\left(-\frac{(\theta - \bar{X})^2}{2\sigma^2/n}\right) d\theta} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/n}} \exp\left(-\frac{(\theta - \bar{X})^2}{2\sigma^2/n}\right) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/n}} \exp\left(-\frac{(\theta - \bar{X})^2}{2\sigma^2/n}\right) d\theta} = \bar{X} \end{aligned}$$

積分の中の式は平均 $\bar{X}$ 分散 σ^2/n の正規分布の形になったから、積分を簡単に求められる。

従って誤差の分布が正規分布だったら、そのピットマン推定量は観測値の標本平均になる。

以上

$$V(\bar{X}) = E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \theta\right)^2\right] = E\left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2\right] = \frac{V(X)}{n}$$

従って

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2) &= E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] \\ &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n [(X_i - \theta) - (\bar{X} - \theta)]^2\right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n \left[E((X_i - \theta)^2) - E((\bar{X} - \theta)^2)\right]\right] \\ &= \frac{1}{n-1} [nV(X) - nV(\bar{X})] = \frac{1}{n-1} [n\sigma^2 - \sigma^2] = \sigma^2 \end{aligned}$$

$\hat{\sigma}^2$ の不偏性は明らかである。

直観的には、分散の最もよい推定量は標本分散のように思えるが、分母が n ではなく $(n-1)$ としないと不偏とならないことに注意する。

以上