2013年後期
応用確率統計

⑨ 平均と分散の不偏推定

河野 行雄
kawano@pe.titech.ac.jp

2013年12月12日

復習

■ 推定量と推定値

推定量: $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$　　推定値: $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$

■ 不偏性

$$E\left(\hat{\theta}\,|\,\theta\right)=E^{X_1,\cdots,X_n}\left(\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\,|\,\theta\right)=\theta$$

■ 標本平均と幾何平均

$$\hat{\theta}=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$$ ⇨ 不偏

$$\hat{\theta}=\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)^{1/n}$$ ⇨ 不偏ではない

平均値の不偏推定

■ 観測データ

例: $X_i=\theta+\varepsilon_i \qquad (i=1,\cdots,n)$

確率変数　未知母数　誤差

誤差の分布: $f(\varepsilon_i)$　平均: $E(\varepsilon_i)=0$　分散: $V(\varepsilon_i)=\sigma^2$

■ 最適な推定量

不偏: $E\left(\hat{\theta}\,|\,\theta\right)=E^{X_1,\cdots,X_n}\left(\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\,|\,\theta\right)=\theta$

分散最小: $\hat{\theta}^*=\arg\min_{\hat{\theta}} V\left(\hat{\theta}\,|\,\theta\right)$

誤差の分布:
- 未知: $\hat{\theta}^*=$ 標本平均
- 既知: $\hat{\theta}^*=$ ピットマン推定量

標本平均

■ 標本平均

誤差の分布未知のときの最小分散推定量

$$\hat{\theta}^*=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

■ 不偏性

$$E\left(\hat{\theta}^*\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\theta$$

■ 最小分散

分散がクラーメル・ラオの下限に一致: $V\left(\hat{\theta}^*\right)=1/nI$

クラメール・ラオの不等式

$$V\left(\hat{\theta}\right)\geq 1/nI \qquad I=E\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X,\theta)\right)^2\right)$$

標本平均の分散

■ 標本平均

$$\hat{\theta}^* = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

■ 標本平均の分散

$$V\left(\hat{\theta}^*\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left(\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)\right)^2\right) = \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

クラメール・ラオの下限

■ クラメール・ラオの不等式

$$V\left(\hat{\theta}\right) \geq 1/nI \qquad I = E\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X,\theta)\right)^2\right)$$

■ 誤差が正規分布のとき

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\log f(x,\theta) = -\frac{1}{2}\log 2\pi\sigma^2 - \frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{nI} = \frac{\sigma^2}{n} = V\left(\hat{\theta}^*\right)$$

$$E\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X,\theta)\right)^2\right) = E\left(\frac{(X-\theta)^2}{\sigma^4}\right) = \frac{1}{\sigma^2}$$

一致性

■ 一致推定量

観測数を増やすと推定量が未知母数に一致（確率収束）

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}^* - \theta\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

■ 標本平均

$$\hat{\theta}^* = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E\left(\hat{\theta}^*\right) = \theta \qquad \lim_{n\to\infty} V\left(\hat{\theta}^*\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n} = 0$$

→ チェビシェフの不等式（大数の法則）から一致推定量

標本分散

■ 標本分散

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \qquad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

■ 不偏性

$$n\left(\overline{X} - \theta\right)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n}\left((X_i - \theta) - \left(\overline{X} - \theta\right)\right)^2\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)^2 - 2\boxed{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)}\left(\overline{X} - \theta\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X} - \theta\right)^2\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)^2 - n\left(\overline{X} - \theta\right)^2\right) = nV(X) - nV\left(\overline{X}\right)$$

$$= n\sigma^2 - \sigma^2 = (n-1)\sigma^2$$ → 不偏ではない

不偏分散

■ 標本分散

$$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

■ 不偏分散

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

$$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{n-1}{n-1}\sigma^2=\sigma^2$$

← 観測値一つ分に相当する情報を平均に使ったため

ピットマン推定量

■ 標本平均

誤差の分布既知のときの最小分散位置共変推定量

$$\hat{\theta}^*=\overline{X}-E_0(\overline{X}\mid Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$$

$$=\int\theta g(\theta;X_1,X_2,\cdots X_n)d\theta$$

■ 尤度関数

観測値の同時確率密度関数

$$g(\theta;X_1,X_2,\cdots X_n)=\frac{\prod_{i=1}^{n}f(X_i-\theta)}{\int\prod_{i=1}^{n}f(X_i-\theta)d\theta}$$

位置共変推定量

■ 位置共変推定量

$$\hat{\theta}(X_1+c,\cdots,X_n+c)=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)+c$$

⟶ 例えば標本平均

■ 変数変換

例： $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad Y_1=X_2-X_1,\cdots,Y_{n-1}=X_n-X_1$

■ 標本平均の補正

$$\hat{\theta}^*=\overline{X}-E_0(\overline{X}\mid Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n-1})$$

⟶ $V(\hat{\theta}^*)\le V(\hat{\theta})$ 誤差の分布が既知であれば分散を削減可能

ピットマン推定量の例

■ 観測データ

$$X=\theta+\varepsilon \qquad f(\varepsilon)=\begin{cases}1, & |\varepsilon|\le 0.5\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

■ 尤度関数

$$\prod_{i=1}^{n}f(X_i-\theta)=\begin{cases}1, & \alpha\le\theta\le\beta\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \qquad \begin{aligned}\alpha&=\max_i X_i-0.5\\ \beta&=\min_i X_i+0.5\end{aligned}$$

■ ピットマン推定量

$$\hat{\theta}^*=\frac{\int_\alpha^\beta\theta d\theta}{\int_\alpha^\beta d\theta}=\frac{1}{2}(\beta+\alpha)=\frac{1}{2}(\max X_i+\min X_i)$$

ピットマン推定量の例

■ 標本平均

$$\hat{\theta} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$V(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{12n} \to \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{36}, \frac{1}{48} \quad \longleftarrow \quad \sigma^2 = \int_{-0.5}^{0.5} x^2 dx = \frac{1}{12}$$

■ ピットマン推定量

$$\hat{\theta}^* = \frac{1}{2}\left(\max_i X_i + \min_i X_i\right) = \frac{1}{2}(a+b) \qquad a = \min_i X_i \qquad b = \max_i X_i$$

$$V(\hat{\theta}^*) = \int_{-0.5}^{0.5}\int_{-0.5}^{b}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \boxed{n(n-1)(b-a)^{n-2}}\, dadb$$

$$= \frac{1}{2(n+2)(n+1)} \to \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{40}, \frac{1}{60}$$

(n-2)個の観測値が区間[a,b]にある確率

まとめ

■ 誤差分布未知のときの最小分散推定量

$$\hat{\theta}^* = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

■ 誤差分布既知のときの最小分散位置共変推定量

$$\hat{\theta}^* = \frac{\int \theta \prod_{i=1}^{n} f(X_i - \theta) d\theta}{\int \prod_{i=1}^{n} f(X_i - \theta) d\theta}$$

■ 不偏分散

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$