４．熱エネルギー移動が生じている物体内の温度分布

4.1　熱伝導が生じている物体内の温度分布

4.1.1　一様材料物体内の定常１次元熱伝導

熱伝導が生じている一様材料（熱伝導率 $k=$ 一定）の物体内の温度分布が時間とともに変化しない定常状態において、温度分布が一つの座標軸の方向だけに変化する１次元問題に対しては、3.2.2 節で述べたとおり、物体内の温度分布は

$$-\frac{k}{A}\frac{\partial}{\partial X}\left(A\frac{\partial T}{dX}\right)=G \qquad ...(4.1.1)$$

なるエネルギー方程式（熱伝導方程式）を解くことで求められる。ここで A は熱通過面積、G は物体内部での単位体積あたりの発熱量である。この方程式の解をいくつか再記しておく。

○一定熱通過面積で内部発熱のない場合（$A=$ 一定、$G=0$）

大きな壁面を通した熱伝導や太さ一定の棒を通した熱伝導のように熱通過面積が一定で、なおかつ物体内部に発熱がない場合の温度分布は、

$$T(X)=C_1X+C_2$$

なる直線的なものとなる。C_1、C_2 は積分定数で、(4.1.1)式を解く際に用いる境界条件から定まる。これは、物体内を移動する熱流束がどこでも一定（温度勾配が一定）であることから、簡単に理解される。

○一定熱通過面積で一定の内部発熱がある場合（$A=$ 一定、$G=$ 一定）

金属製の太さ一定の棒に電流を流し発熱させた場合のように熱通過面積が一定で、一定の内部発熱のある物体内の温度分布は、

$$T(X)=-\frac{G}{2k}X^2+C_1X+C_2$$

なる放物線状になる（発熱量が正なら上に凸な放物線）。

○発熱がなく熱通過面積が X に比例して大きくなる場合（$A=C\,X$、$G=0$）

円筒壁内の半径方向熱伝導に相当する場合で、温度分布は、

$$T(X)=C_1\ln X+C_2$$

となる。温度勾配が X の小さい部分で大きいのは、移動する熱流が一定であるために X が小さいところほど熱流束が大きいからである。

4.1.2　積層物体内の定常１次元熱伝導

工学的には異なる材料の板を重ね合わせた物体内で熱伝導が生じる場合が比較的多くみられる。このような場合には、物体内の位置によって熱伝導率が異なるから、物体内全体の温度分布を(4.1.1)から求めることはできない。このような場合には、材料が一様と見なせる部分についてそれぞれ(4.1.1)式を適用し、接合界面において熱流と温度の連続からこれらの温度分布を連結することで全体の温度分布が評価される。

例えば、図 4.1.1 に示すような最も簡単な２層平板を通過する直線的熱流を考える。積層板は材質Ａ（熱伝導率 k_A、厚さ t_A）と材質Ｂ（熱伝導率 k_B、厚さ t_B）の板からなっており、積層板の１面の温度を T_1、他面の温度を T_2 とする。この積層壁内の熱移動はそれぞれの材質部分の１次元熱伝導である。接合部の温度を T_c とするとそれぞれの材質を通して移動する熱流は、次式で表される。

材質Ａ内：　$$Q_A=k_A\frac{T_1-T_c}{t_A}A$$

材質Ｂ内：　$$Q_B=k_B\frac{T_c-T_2}{t_B}A$$

エネルギー保存の法則から、接合面では材質Ａの部分を通過する熱流と材質Ｂの部分を通過する熱流は等しくならねばならないから、

$$k_A \frac{T_1 - T_c}{t_A} A = k_B \frac{T_c - T_2}{t_B} A \qquad ...(4.1.2)$$

したがって、接合面の温度 T_c は、次式のように求められる。

$$T_c = \left(\frac{k_A}{t_A} T_1 + \frac{k_B}{t_B} T_2 \right) \Big/ \left(\frac{k_A}{t_A} + \frac{k_B}{t_B} \right) \qquad ...(4.1.3)$$

結果として、この壁面を通過する熱流 $Q = Q_A = Q_B$ は、次の式で表される。

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{t_A}{k_A A} + \dfrac{t_B}{k_B A}} \qquad ...(4.1.4)$$

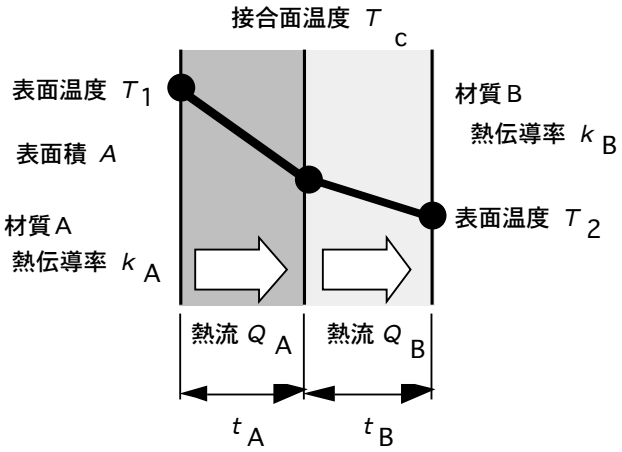


図 4.1.1　積層壁内の定常 1 次元熱伝導

◇　等価回路アナロジー

この結果を熱抵抗の概念を用いて再考してみる。積層板の材質Aの部分の定常熱伝導に対する熱抵抗は $t_A/(k_A\ A)$であり、材質Bの部分の熱抵抗は $t_B/(k_B\ A)$である。積層板を通しての熱伝導では接合部で熱流が保存されるから、これらの熱抵抗が、図 4.1.2 に示されるように直列に接続された系を熱流が通過していると考えることができる。したがってこの系を通過する熱流は上記の熱抵抗の合成抵抗とその両端の温度差$(T_1 - T_2)$から、式(4.1.4)が求められる。

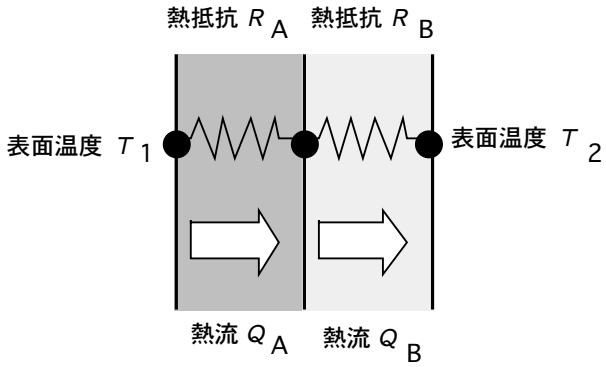


図 4.1.2　積層壁の熱抵抗

この概念を用いれば積層部分の数が増えても通過熱流は、

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\dfrac{t_A}{k_A A} + \dfrac{t_B}{k_B A} + \dfrac{t_C}{k_C A} + \cdots} \qquad ...(4.1.5)$$

のように簡単に求められる。

◇　積層円筒と積層球殻内の半径方向熱伝導

前記の積層平板内の直線的熱流と同じように、積層円筒壁や積層球殻を通した半径方向 1 次元熱伝導による熱流も熱抵抗を用いれば簡単に求めることができる。

積層円筒：　図 4.1.3 のような積層円筒において材質Ａの部分を通過する熱流は、

$$Q_A = \frac{T_A - T_B}{\frac{1}{2\pi l}\frac{1}{k_A}\ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)} \qquad ...(4.1.6)$$

ここで l は円筒の高さである。したがって A 材質の熱抵抗は、次式の様に表される。

$$R_A = \frac{1}{2\pi l}\frac{1}{k_A}\ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right) \qquad ...(4.1.7)$$

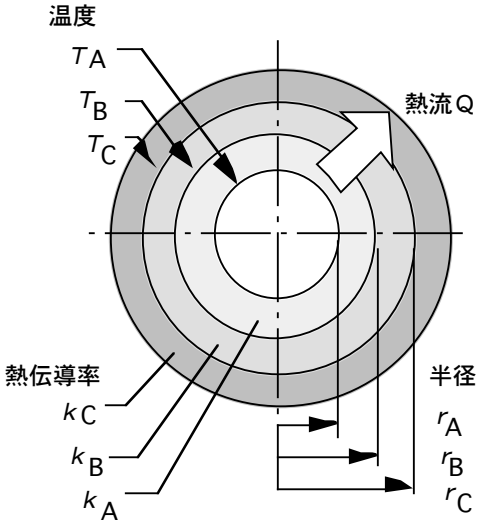


図 4.1.3　積層円筒内の半径方向熱伝導

他の材質の部分でも同様に熱抵抗が求められ、積層円筒を通しての半径方向熱伝導に対する合成熱抵抗はこれらの和であるから、半径方向熱流は、次式で表される。

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi l}\frac{1}{k_A}\ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right) + \frac{1}{2\pi l}\frac{1}{k_B}\ln\left(\frac{r_C}{r_B}\right) + \frac{1}{2\pi l}\frac{1}{k_C}\ln\left(\frac{r_D}{r_C}\right) + \cdots} \qquad ...(4.1.8)$$

積層球殻：同様に積層球殻を通しての半径方向熱流は、次式で示される。

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{4\pi}\frac{1}{k_A}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{k_B}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C}\right) + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{k_C}\left(\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_D}\right) + \cdots} \qquad ...(4.1.9)$$

これらの温度分布からわかるように、定常 1 次元熱伝導が生じている物体内の温度分布は、それぞれの位置における熱流束の大きさに直接関係している（フーリエの法則そのもの）。したがって、物体内の熱通過面積と熱伝導率の大きさが把握できれば、それらに逆比例する形で温度勾配の大きさが決まることに注意することで、物体内の温度分布を推察できる。

4.1.3　非定常１次元熱伝導

熱伝導が生じている物体内の温度分布が時間とともに変化する非定常状態において、温度分布が一つの座標軸の方向だけに変化する１次元問題に対する熱伝導方程式は、材料が一様で、物体内部での発熱を無視すれば、3.2.3 節で述べたとおり、

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \qquad ...(3.2.17)$$

である。この方程式を解析的に解いて温度分布が求められる事例は多くないが、一つの代表例が、はじめ一様温度 T_0 の半無限帯の表面（$X=0$）が時刻 $t=0$ から急に別の温度 T_1 となったときの温度分布である。

$$T(X,t)=(T_1-T_0)erfc\left(\frac{X}{2\sqrt{\alpha t}}\right)+T_0 \qquad ...(4.1.10)$$

この温度分布は半無限帯表面 $X=0$ において温度勾配が最大で、X が大きくなるにつれて温度勾配が小さくなる形状である。これは、物体内部に浸透した熱エネルギーの一部が物体自身の温度を上昇させるために消費されるため、表面から離れるにつれて移動熱流が減少するからである。すなわち、非定常熱伝導が生じる物体内の温度分布もフーリエの法則が理解できていれば推察可能である。

4.1.4　定常多次元熱伝導

一般的な構造物内の熱伝導は上で示した１次元熱伝導のように単純ではないことが多い。この場合には多次元（２次元、３次元）の熱伝導を解析する必要がある。

○定常多次元熱伝導の基礎式

多次元の熱伝導に対する基礎方程式も、１次元熱伝導と同様、コントロールボリューム法で求めることができる。

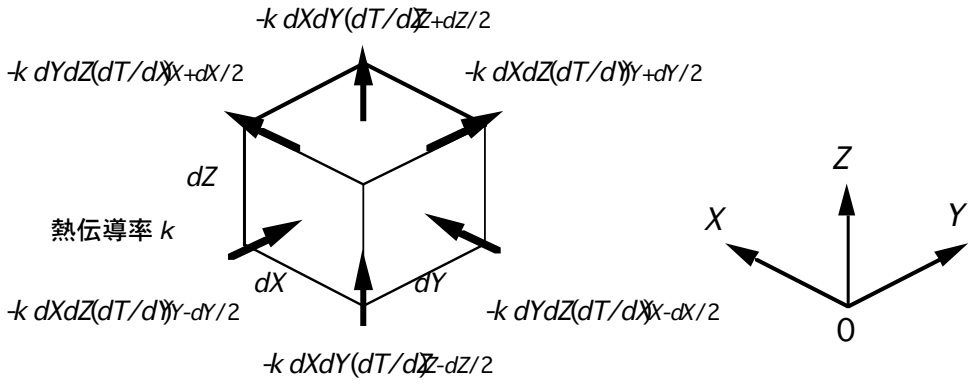


図 4.1.4　３次元熱伝導の試験体積

◆３次元定常熱伝導の基礎方程式

$$-k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=G \qquad ...(4.1.11)$$

しかしこの方程式を解析的に解くことができる場合は稀であり、最近はコントロールボリューム法から導かれる方程式（差分方程式という）を直接コンピュータによって解くことが多い。

いずれにせよ、**多次元の熱伝導でもそれを支配しているのはフーリエの法則である**ことに注意すべきである。

4.2　表面で対流熱伝達・ふく射伝熱の生じている物体内部の温度分布

物体表面で対流熱伝達やふく射伝熱が生じている物体内部の温度分布は、基本的に上述の物体内熱伝導に伴う温度分布と考えてよい。その際、物体表面での対流熱伝達やふく射伝熱の状況は、物体内の熱伝導方程式を解くための境界条件を通して物体内部の温度分布に反映される。すなわち、物体表面で対流熱伝達が生じているときの境界条件は、

$$h\left(T_{n=0}-T_f\right)=k\left(\frac{\partial T}{dn}\right)_{n=0} \qquad ...(4.2.1)$$

ここで T は物体内部の温度、T_{f} は流体温度、n は物体表面から内面に向けて取った法線方向座標、h は物体表面の熱伝達率である。同様にふく射伝熱が生じている場合には、

$$\varepsilon\left(\sigma T_{n=0}{}^{4}-G\right)=k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n=0} \qquad ...(4.2.2)$$

ここでεは物体表面の射出率、G は物体表面における入射ふく射である。

例えば、厚さ t の大きな壁の一方の表面 $X=0$ で対流熱伝達、あるいはふく射伝熱が生じており、他方の表面 $X=t$ の温度が T_1 で一定である場合、4.1.1 節に述べたように定常状態においては壁内部の温度分布は直線的な分布になる。したがって、$X=0$ における壁表面温度 T_0 は、次のように求められる。

○対流熱伝達が生じている場合

(4.2.1）式を書き直すと、

$$h\left(T_0-T_f\right)=k\left(\frac{T_1-T_0}{t}\right)$$

よって、表面温度 T_0 は

$$T_0=\left(hT_f+\frac{k}{t}T_1\right)\Big/\left(h+\frac{k}{t}\right)$$

○ふく射伝熱が生じている場合

(4.2.2)式を書き直して

$$\varepsilon\left(\sigma T_0{}^{4}-G\right)=k\left(\frac{T_1-T_0}{t}\right)$$

表面温度はこの T_0 に対する 4 次方程式の解として求められる。

これらの境界条件を用いて物体内部の温度分布を求める際には、物体表面における熱抵抗を考慮して、積層壁の場合と同様に計算を単純化することが可能である。ただし、ふく射伝熱については熱移動量が温度差に比例しない（線形でない）ため、その取り扱いには多少の工夫を要する。

4.3　熱移動が生じている流体内の温度分布

熱移動が生じている物体が流体である場合、物体内部の温度分布は流体の流動状況によって影響される。この影響、すなわち流体による熱エネルギーの輸送の効果を含めたエネルギー方程式は、流体の物性が一様で、流れが層流の場合、

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \qquad ...(4.3.1)$$

であることは 3.3.4 節で述べたとおりである。このエネルギー方程式を解くためには、流体の速度

分布 $u(x, y, z)$、$v(x, y, z)$、$w(x, y, z)$をあらかじめ知る必要があり、解析的に解が得られる場合はきわめて稀である（解析事例については 4.3.4 節を参照のこと）。したがって、最近では(4.3.1)式と流れを支配する方程式を同時にコンピュータによって数値解析することが多いので、ここではこれ以上ふれない。

4.4　より一般的な物体内の温度分布

工学的には機械などの複雑な構造をもった物体内の温度分布を評価する必要に迫られることが少なくない。機械は多くの構成要素が複雑に関連して配置されており、その一部は発熱をし、それらの周囲には空気などの流体が存在する。このようなきわめて複雑な構造を有する物体内の温度分布の評価には、最近では構成要素や流体内の熱移動を支配する方程式を数値的に解析する大規模数値シミュレーションも用いられるようになっているが、より簡便に構成要素を代表する温度を考え、それぞれの構成要素と隣り合う要素あるいは流体の間の熱伝導・対流熱伝達・ふく射伝熱による熱移動量に関する方程式を連立させてこれらの温度を求める方法（熱回路網あるいは節点法）が採られることがある。図 4.4.1 はその一例である。

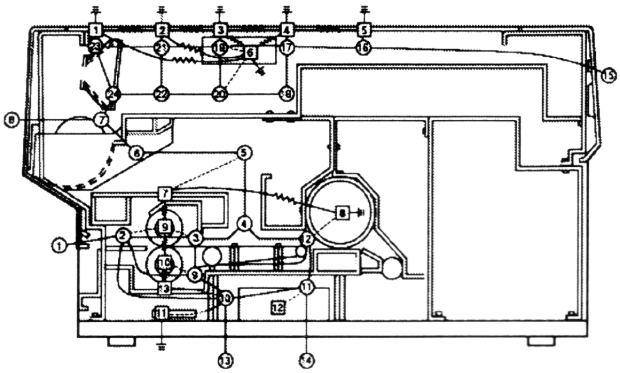


図 4.4.1　複写機内熱流の節点法によるモデル化
（Ishizuka, M. and Hayama, S.: *Proc. IMechE*, ASME, 214 A (2000) pp. 513-522 による）

この例では、複写機内の熱移動を、それぞれの構成要素間の熱移動のネットワークとして表している。構成要素間の熱移動を支配しているものはそれぞれの間の熱抵抗（図 4.4.1 中の抵抗の記号）であり、熱移動の形態によって

・熱伝導：　$R_t = \dfrac{\delta}{k\,A}$

・対流熱伝達：　$R_t = \dfrac{1}{h\,A}$

・ふく射伝熱：　$R_t = \dfrac{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1}{\sigma\left(T_1^2 + T_2^2\right)\left(T_1 + T_2\right)A}$

（ふく射のやりとりが要素間で閉じていると近似できる場合）

等を使い分けることになる。こうして個々の構成要素間の熱移動が見積もれれば、それらが並列・直列に連なって全体としての熱移動を構成しているかにあわせてこれらを組み合わせることで、連立方程式が得られ、それを解くことでそれぞれの構成要素の代表温度が求められる。

このような概念は、簡単化した節点法だけでなく、より大規模かつ精密な数値シミュレーションにおいても同様に用いられている。

演習問題

［４－１］　煉瓦（k = 1.0 W/m K）の外面をグラスウール（k = 0.03 W/m K）で保温した炉壁がある。炉壁の内面が 700℃、外面が 40℃で、煉瓦の厚さが 0.15 m、グラスウールが 0.30 m のとき、

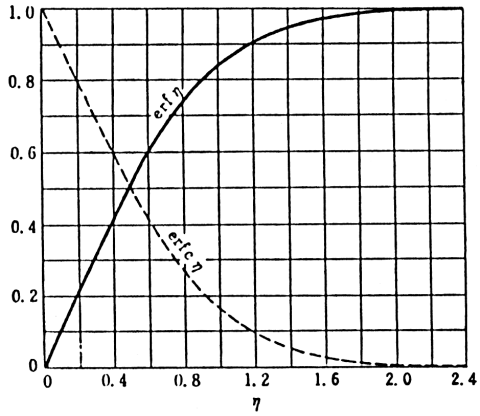
(1)　煉瓦とグラスウールの接合面の温度を求めよ。

(2)　炉壁を透過する熱流束を求めよ。

ヒント：定常１次元熱伝導を考える。このとき煉瓦の中でもグラスウールの中でも透過する熱流束が同一であることを利用すれば、煉瓦とグラスウールの中の熱伝導の基礎式から接合面温度が計算される。

［４－２］　鋼（炭素量１ %）製の半無限体がある。この半無限体がはじめ 20℃に保たれていて、その表面が急に 720℃の燃焼ガスに曝されたとする。このときの鋼内の温度分布の時間変化を図示せよ。

ヒント：物性値（温度伝導率α）は配布資料を見よ。初期温度が 20℃であるが、これを基準（0）とおいて、それからの相対値で考えれば良い（これを温度場の線形性あるいは重ね合わせの原理という）。誤差関数の値は下のグラフから求めよ。

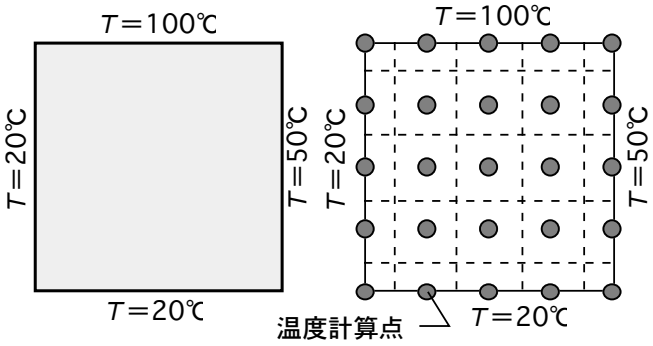


［４－３］　厚さ 200 mm の鋼（炭素量１ %）板の片面が 700 Kの燃焼ガスに曝されており、他面は 300 Kの空気で冷却している。燃焼ガス側の表面の熱伝達率を 30 W/m^{2}K、空気側の熱伝達率を 50 W/m^{2}K とするとき、鋼板両表面の温度と外部へ伝えられる熱流束を求めよ。

ヒント：物性値（k）は配付資料の熱物性値表を見よ。鋼板の両面の熱伝達と板内部の熱伝導で伝えられる熱流束が等しいとして両表面の温度を決める。

［４－４］　外径 40 mm のパイプ内を 310℃の加圧水が流れている。いま、パイプの補強と断熱のためにパイプ外面を厚さ３ mmのモルタル（熱伝導率k = 1.16 W/m K）で同心円状に覆ったところ、熱損失はかえって増えた。その理由を述べよ。またパイプ表面の熱伝達率を 50 W/m^{2}K とするとき、熱損失はモルタルを塗布しない場合に比べて何%増加したか。ただし気温を 15℃とし、パイプ表面の温度は加圧水温度（310℃）として良い。

ヒント：モルタル内の半径方向１次元熱伝導を考える。ただし表面温度は表面の伝導による熱流束と対流熱流束が等しいとして決定する。放熱面積はモルタル厚さが増加すると大きくなることに注意せよ。

［4−5］　1辺1 mの正方形の鉄板のそれぞれの辺の温度を下図のようにしたとき、鉄板内部の温度分布を求めよ。ただし、鉄板表面と裏面は完全に断熱されているとする。

ヒント：解析的に解くことはきわめて煩雑であるから、鉄板表面に格子点をおき、そのまわりでコントロールボリューム法によって差分式を作る。これらは連立1次方程式となるので、これを解けば良い（下図参照）。計算機による熱伝導解析の多くはこの方法によっている。