３．熱エネルギー移動（その４）

3.5　ふく射伝熱

3.5.1　ふく射の基礎

○　ふく射とは何か？：　物体から放射される**電磁波**

‖

光、電波など

荷電粒子（電子や陽子など）が運動することによって発生するから、これらの運動がない絶対 0 度の状態以外ではすべての物体が電磁波を放射している。　→　量子論的説明可能

○　Planck の黒体ふく射と Wien の変位則

物体から射出される電磁波の波長（光速/周波数）は 0 から∞まで連続的に分布する。図 3.5.1 は**黒体**（最も良く電磁波を射出する理想的物体、入射したふく射をすべて吸収し「黒く」見えるため黒体と呼ぶ）から射出される電磁波のスペクトル分布である。

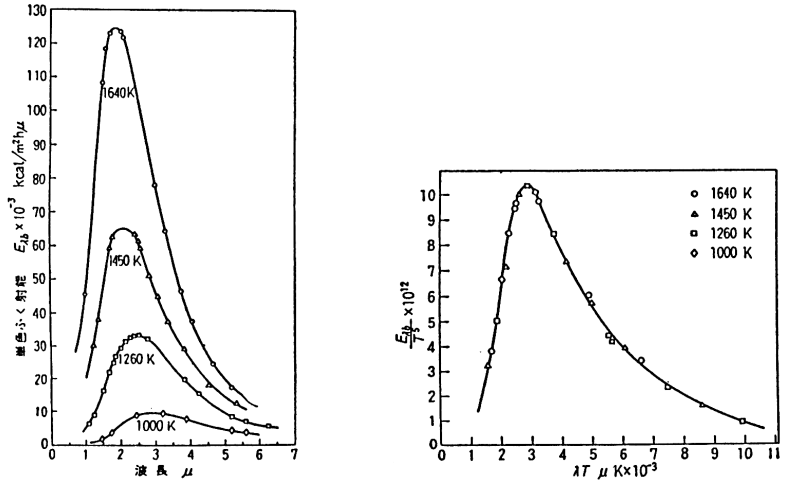


図 3.5.1　黒体ふく射のスペクトル分布（左）とそのλTに対する整理（右）

黒体から射出される電磁波の強度は黒体の温度が高いほど大きくなる。また最大強度を示す電磁波の波長は物体の温度上昇とともに短くなる。この様子を $E_{\lambda b}/T^5$ vs. λT の形に整理すると、すべての温度の結果が同じ曲線上にまとまる。この曲線は

$$E_{\lambda b} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\dfrac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} \quad (\mathrm{W/m^3}) \qquad ...(3.5.1)$$

$$C_1 = 3.743 \times 10^{-16}\ \mathrm{W\ m^2}$$
$$C_2 = 1.439 \times 10^{-2}\ \mathrm{m\ K}$$

この式を **Planck の黒体ふく射の式**という。この式からふく射強度の最大となる波長と黒体の温度の関係が

$$\lambda_{\max} T = 2.8975 \times 10^{-3}\ \mathrm{m\ K} \qquad ...(3.5.2)$$

となる。この関係を **Wien の変位則**という。

Planck の黒体ふく射の式を全波長にわたって積分するとふく射として黒体から射出されるエネ

ルギーが求まる。すなわち、

$$E_b = \int_0^\infty E_{\lambda b}\, d\lambda = \sigma T^4 \quad (\mathrm{W/m^2}) \qquad ...(3.5.3)$$

となって、黒体からのふく射エネルギーの大きさは黒体温度の 4 乗に比例する。これを **Stefan-Boltzmann の法則**という。このときの比例定数σは

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2\,K^4} \qquad ...(3.5.4)$$

であり、これを **Stefan-Boltzmann 定数**という。

○　物体によるふく射の反射、吸収、透過

一般的な物体はふく射を射出するだけでなく、外部からのふく射の一部を吸収し、一部を反射し、残りを透過させる（図 3.5.2 参照）。入射ふく射に対する吸収ふく射量、反射ふく射量、透過ふく射量の比をそれぞれ吸収率α、反射率ρ、透過率τという（黒体の吸収率は 1 である）。

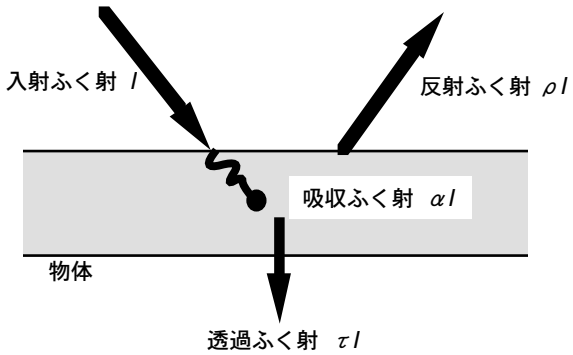


図 3.5.2　物体上のふく射の反射、吸収、透過

これらの間には以下の関係がある。

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \qquad ...(3.5.5)$$

ふく射を透過しない不透明材料では$\tau = 0$ であるから、

$$\alpha + \rho = 1 \qquad ...(3.5.5')$$

となることは当然である。

○　物体からのふく射の射出と射出率

理想的物体である黒体からのふく射射出量E_bが Stefan-Boltzmann の法則によって求められることは既に述べた。実在する物体からのふく射射出量 E はこれより必ず小さく、両者の比

$$\varepsilon = \frac{E}{E_b} \qquad ...(3.5.6)$$

をその物体の**射出率**という。実在物体の射出率は 0～1 の間にある。

いま、黒体壁を持つ大きな容器内に表面積 A の試料を考える。試料表面における容器壁からのふく射熱流束を q_i とすると、試料が熱平衡に達したとき、試料表面の吸収率をαとすれば次の関係が成り立つ。

$$E\,A \quad = \quad q_i A\alpha$$

（ふく射射出）　　（ふく射吸収）

試料が黒体であるときには、同様に

$$E_b\,A \quad = \quad q_i A$$

であるから、

$$\frac{E}{E_b} = \alpha$$

すなわち、物体の射出率と吸収率は等しい。

$$\varepsilon = \alpha \qquad ...(3.5.7)$$

この関係を **Kirchhoff の法則**という。

○　黒体、実在物体と灰色体

実在物体が射出するふく射は同じ温度の黒体ふく射より小さいことは既に述べた。実在物体からのふく射強度の波長分布は、図 3.5.3 に示すように黒体ふく射のスペクトル分布と大きく異なっている。したがって実在物体の射出率は全波長平均のふく射強度の黒体ふく射に対する比を表しているにすぎない。

ふく射伝熱では全強度のみが重要で波長分布は重要でない場合が多いので実在物体のふく射のスペクトルを黒体ふく射のそれの射出率倍とする近似を良く用いる。このような仮想物体を**灰色体**と呼ぶ。

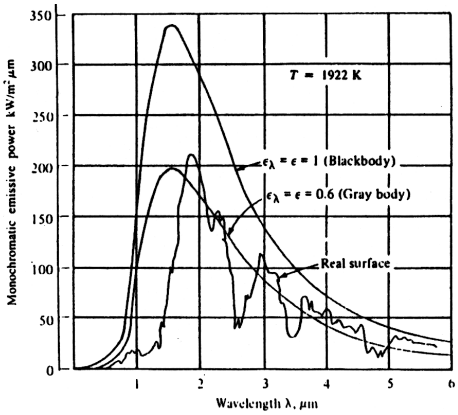


図 3.5.3　実在表面と灰色体からのふく射のスペクトル

3.5.2　ふく射伝熱の概念

○　平行平板間のふく射伝熱

物体から射出されるふく射量は物体の温度のみで決まり、相手の温度には無関係である。したがってふく射伝熱はこのように決まる物体間のふく射の「差し引き」として求めることができる。

さて、図 3.5.4 のように狭い隙間を隔てて向き合う２枚の平行平板間のふく射伝熱を考える。平板１の温度を T_1、平板２の温度を T_2 とし、両者とも黒体であるとすると、平板１から射出されるふく射は単位面積あたり、σT_1^4 である。これはすべて平板２へ至り、すべて吸収される。一方、平板２から射出されるふく射は同様に σT_2^4 であって、これはすべて平板１で吸収される。したがって平板１から２へ向かうふく射による熱流束 $q_{1\text{-}2}$ は、

$$q_{1\text{-}2} = \sigma T_1^4 - \sigma T_2^4 \qquad ...(3.5.8)$$

平板が黒体でなく灰色体である場合には平板表面での部分的な吸収、反射を考慮する必要がある。すなわち、平板１から射出されるふく射は表面の射出率を ε_1 として $\varepsilon_1 \sigma T_1^4$ である。このふく射は平板２へ至り一部吸収され残りが反射される。平板２で反射されるふく射は平板２の射出率を ε_2 とし

て、$(1 - \varepsilon_2)\varepsilon_1\sigma T_1^4$ である（(3.5.5')、(3.5.7)式参照）。この反射ふく射は再び平板１へ至りその一部が吸収される（吸収量 $= (1 - \varepsilon_2)\varepsilon_1^2\sigma T_1^4$）。このような反射を繰り返し、平板１からのふく射は最終的には両壁に吸収される。平板２から射出されるふく射に関しても同様である。このようなふく射のやりとりから、平板１から２へ向かうふく射による熱流束 $q_{1\text{-}2}$ は次の無限級数和で表される。

$$q_{1-2} = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\sigma T_1^4 - \left(\frac{\varepsilon_1^2}{1-\varepsilon_1}\sigma T_1^4 + \varepsilon_1\varepsilon_2\sigma T_2^4\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\right\}^n$$

これを整理すると、

$$q_{1-2} = \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1}\left(\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4\right) \qquad \text{...(3.5.9)}$$

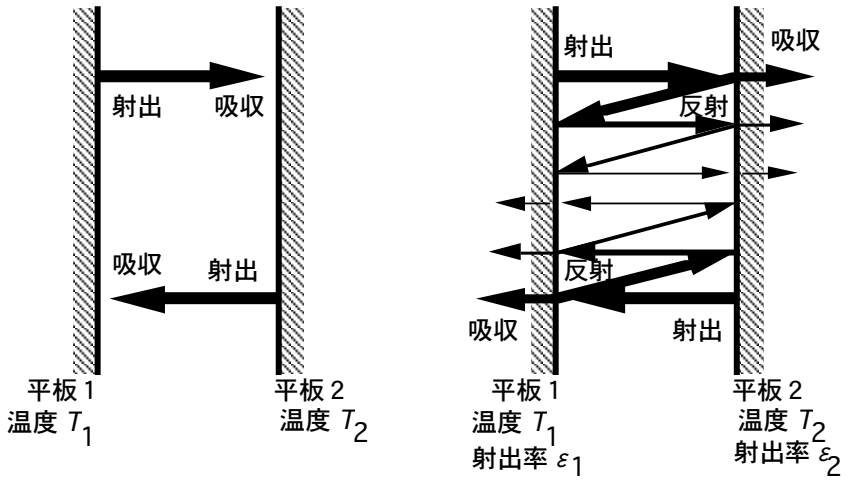


図 3.5.4　相対する２平面間のふく射交換（左：黒体面、右：灰色面）

○　立体角と形態係数

ふく射交換を行う物体の大きさが有限である場合、一方の物体表面の１点から射出されたふく射の一部のみが他方の物体へ至る。この程度を表すために最適な尺度に**立体角**がある。

立体角は図 3.5.5 のように半径 r の球面上の面積 A を球中心から見込む角の大きさを $\omega = A/r^2$ として定義された尺度である。したがって平板上の１点から見た立体角は 0 ～ 2π、空間中の１点から見た立体角は 0 ～ 4π の範囲の値をとる。

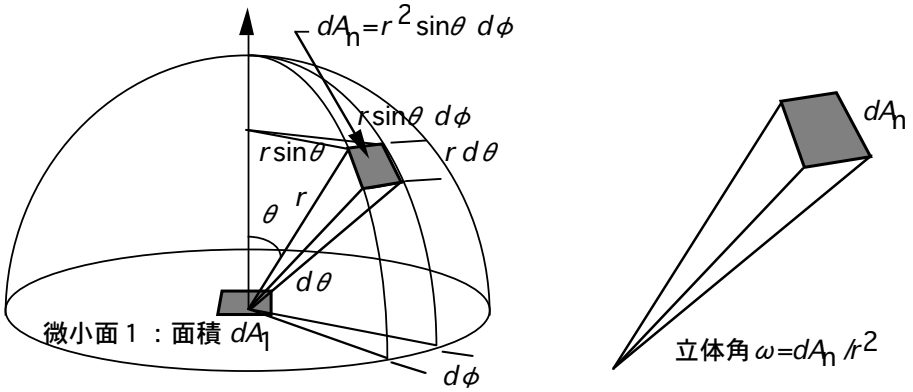


図 3.5.5　立体角の定義

さらに、有限な大きさの２面間のふく射交換の計算には次の値を用いると便利である。

$F_{1\text{-}2}$ = １面から射出されるふく射エネルギーのうち２面へ至るものの割合
$F_{2\text{-}1}$ = ２面から射出されるふく射エネルギーのうち１面へ至るものの割合

この値を**形態係数**と呼ぶ。形態係数は面上に微小要素 dA_1、dA_2 を考え、両者の間の立体角を面全体にわたって積分して求める。すなわち $F_{1\text{-}2}$ は次のような手順で導出される。図 3.5.6 のように面１と面２が空間内で任意の位置関係で向き合っているとする。それぞれの面内に微小要素 dA_1 と dA_2 を考えると、

(1) dA_1 中心から dA_2 を見込む立体角 $d\omega = \cos\phi_2\, dA_2/r^2$
(2) dA_1 から dA_2 方向に射出されるふく射エネルギー$dQ_{1\text{-}2} = I_1\, dA_1\, d\omega$

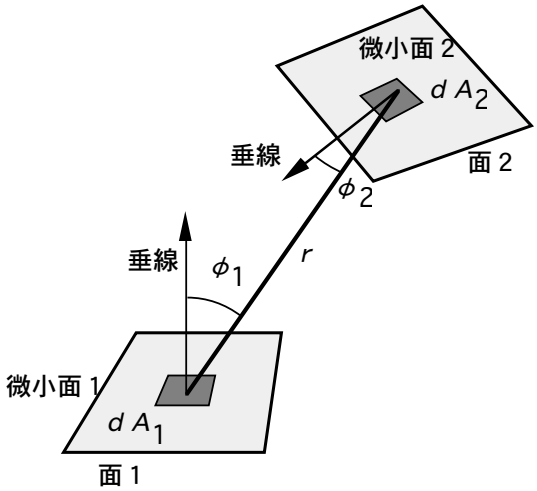


図 3.5.6　相対する２平面

ここで I_1 は１面のふく射強度（単位面積あたり、単位立体角あたり射出されるふく射エネルギー）$= E_1/\pi$である。故に dA_1 から dA_2 へ至るふく射エネルギー$dQ_{1\text{-}2}$ は、

$$dQ_{1-2} = \frac{E_1 \cos\phi_1 \cos\phi_2\, dA_1 dA_2}{\pi r^2}$$

１面全体から２面全体へ至るふく射エネルギーはこれを積分して、

$$Q_{1-2} = E_1 \iint \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2\, dA_1 dA_2}{\pi r^2}$$

１面から射出される全ふく射エネルギーが E_1A_1 であることに注意すれば、形態係数 $F_{1\text{-}2}$ は

$$F_{1-2} = \iint \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2\, dA_1 dA_2}{A_1 \pi r^2} \qquad ...(3.5.10)$$

同様に $F_{2\text{-}1}$ は

$$F_{2-1} = \iint \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2\, dA_1 dA_2}{A_2 \pi r^2} \qquad ...(3.5.10')$$

形態係数はさまざまな面形状、２面間の位置関係に対して求められている。そのいくつかを図 3.5.7 に示す。

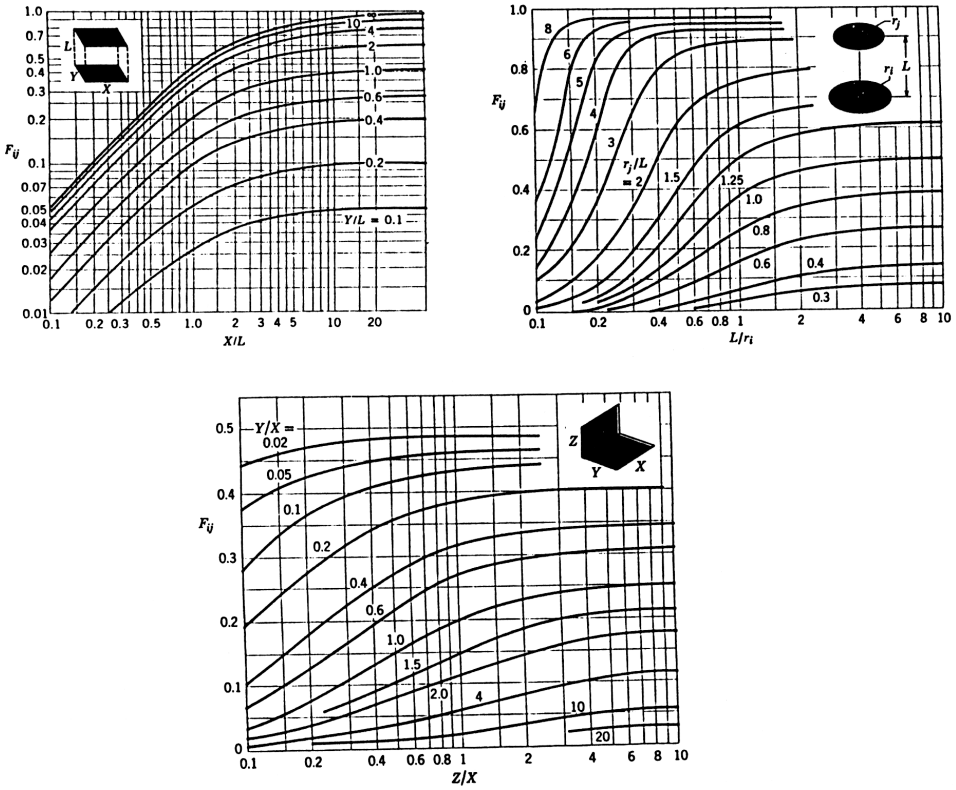


図 3.5.7　線図として表わされた形態係数の例

式(3.5.10)、(3.5.10')から、形態係数間には次の関係があることがわかる。

$$A_1F_{1\text{-}2} = A_2F_{2\text{-}1} \qquad ...(3.5.11)$$

この関係は面の数が増えた場合にも同様に成立し、**形態係数の交換法則**という。また、形態係数の物理的定義から、いくつかの面で囲まれた空間が閉じているとき、

$$\sum_m F_{n-m} = 1 \qquad ...(3.5.12)$$

が成立する。これらの関係は形態係数の計算を容易にする上で重要である。

○　有限の大きさの黒体面間のふく射伝熱

上記の形態係数を用いると、有限の大きさの２黒体面間のふく射伝熱は次のように求められる（ただし周囲空間が絶対 0 度の場合）。

・１面のふく射熱流束（黒体）

$$q_{1\text{-}2} = (\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4)F_{1\text{-}2}$$

・２面のふく射熱流束（黒体）

$$q_{2\text{-}1} = (\sigma T_2^4 - \sigma T_1^4)F_{2\text{-}1}$$

3.5.3　物体表面間のふく射伝熱

○　入射ふく射と射度

黒体でない有限の大きさを持つ物体表面間のふく射伝熱を求める際には次の２つの値を考えると便利である（いずれも方向性は考えない）。

・入射ふく射 G：　他の壁面からの射出ふく射や反射によって、いま考えている面に至るふく射の総和

・射　度　　J：　自己射出と入射ふく射の反射分の和

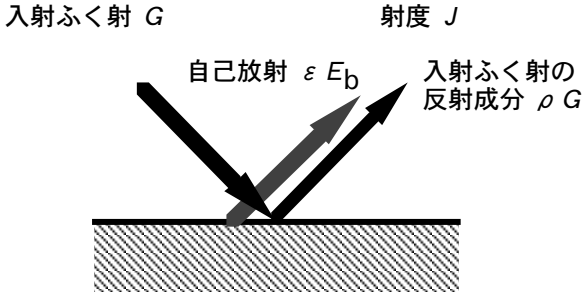


図 3.5.8　入射ふく者と射度

この２つの値と表面の自己射出との間には次の関係が成り立つ。

$$J = \varepsilon E_b + \rho G$$
$$= \varepsilon E_b + (1 - \varepsilon)G \qquad ...(3.5.13)$$

ある物体表面から流出するふく射熱流束 q は、

$$q = J - G \qquad ...(3.5.14)$$

これらの関係から入射ふく射を消去すると、

$$q = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(E_b - J\right) \qquad ...(3.5.15)$$

となる。

○　非黒体面間のふく射伝熱

射度を用いると、非黒体２面間のふく射伝熱は次のように表される。

・１面を出て２面に至るふく射エネルギー $= J_1A_1F_{1\text{-}2}$

・２面を出て１面に至るふく射エネルギー $= J_2A_2F_{2\text{-}1}$

ふく射熱交換量（差し引き）$Q_{1\text{-}2}$ は、

$$Q_{1\text{-}2} = J_1A_1F_{1\text{-}2} - J_2A_2F_{2\text{-}1}$$
$$= (J_1 - J_2)A_1F_{1\text{-}2}$$

あるいは熱流束で

$$q_{1\text{-}2} = (J_1 - J_2)F_{1\text{-}2} \qquad ...(3.5.16)$$
$$q_{2\text{-}1} = (J_2 - J_1)F_{2\text{-}1} \qquad ...(3.5.16')$$

ふく射伝熱の計算には(3.5.15)、(3.5.16)式を連立させて解けば良い。例えば、面積 A_1、温度 T_1、射出率ε_1の１面と面積 A_2、温度 T_2、射出率ε_2の２面が１面から見た形態係数 $F_{1\text{-}2}$ で向き合っている（ふく射はこの二つの面の間で閉じている）ときのふく射伝熱量は、１面上の熱流束の形で、

$$q_{1-2} = \frac{\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4}{\left(1-\varepsilon_1\right)/\varepsilon_1 + 1/F_{1-2} + \left(1-\varepsilon_2\right)A_1/\varepsilon_2 A_2} \qquad ...(3.5.17)$$

である。ただしこの結果は周囲境界を考慮していないから空間内に相対する２面間のふく射交換の計算には適用できない。周囲境界を含めふく射交換に関与する面が増えた場合には、

$$q_1 = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\left(E_{b1} - J_1\right) = q_{1-2} + q_{1-3} + \cdots$$

であることに注意して(3.5.15)式と(3.5.16)式から求められる

$$\frac{E_{bi} - J_i}{\left(1-\varepsilon_i\right)/\varepsilon_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{J_i - J_j}{1/F_{ij}} \qquad ...(3.5.18)$$

なる J_i に関する連立方程式を解いて、各面に対する(3.5.16)式からふく射熱交換量を求める必要がある。

演習問題

［３−２８］　電球のフィラメントが 2000 K に加熱されている。フィラメントを黒体としてふく射エネルギーが最大となる波長を求めよ。フィラメント温度が 600 K のときはどうか。

ヒント： Wien の変位則から最大ふく射強さの波長を計算せよ。

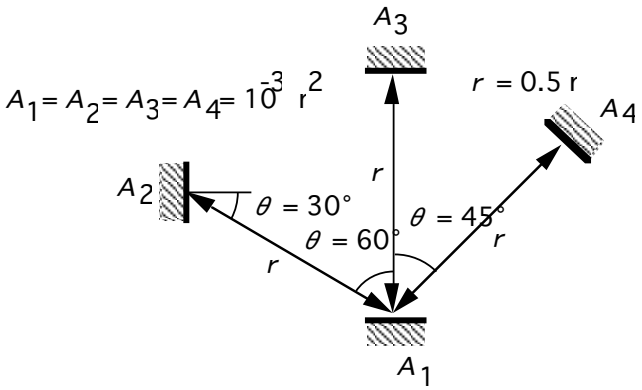
［３−２９］　温度 1000 K、射出率 0.8 の壁面１と 温度 400 K、射出率 0.6 の壁面２が向き合っている。両壁は十分大きく、両者の間は真空に保たれておりふく射以外の伝熱が無視できるとき、次の問に答えよ。

(1) 高温壁から低温壁へ伝えられる熱流束はいくらか。
(2) 両壁の間に射出率 0.1 の薄いアルミニウム箔を入れたとき、伝熱量はもとに比べてどれだけ減少するか。

ヒント： 非黒体２平行平板間のふく射伝熱の式（(3.5.9)式）を用いて計算する。アルミニウム箔のある場合には箔温度 T_f を未知数とし、壁面１とアルミニウム箔、アルミニウム箔と壁面２間の熱流束が等しくなるよう T_f を決定する。

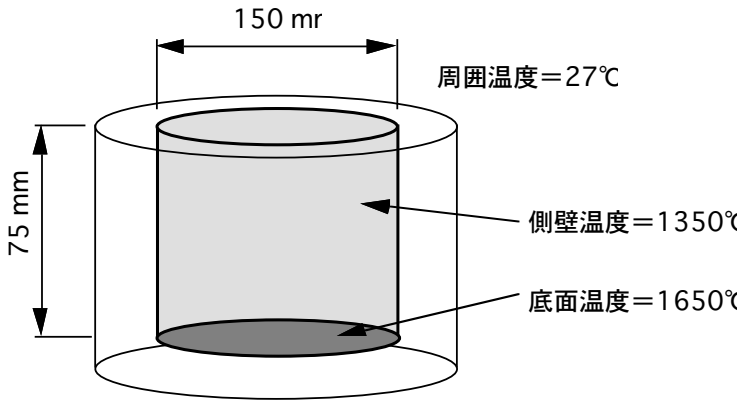
［３−３０］　800 K の黒体面（面積 $A_1 = 10^{-3}$ m^2）があり、その周囲に下図のような位置関係で３つの面がある。３つの面の面積をすべて 10^{-3} m^2 であるとするとき、以下の問に答えよ。

(1) 黒体面からそれぞれの面の方向へ射出されるふく射のふく射強度を求めよ。
(2) 黒体面からそれぞれの面を見たときの立体角を計算せよ。
(3) 黒体面から見た各面の形態係数と、それぞれの面に到達するふく射エネルギーを計算せよ。



ヒント： ふく射能 E とふく射強度 I の関係は、$E = \pi I$ である。黒体面は散乱性射出面であることに注意せよ。また、立体角と形態係数の計算にあたっては、それぞれの面を微小面として扱って良い。

［３−３１］　下図に示すような円筒状の電気炉（内径 150 mm、高さ 75 mm）があり、その端面が 27℃の大気中に開放されている。電気炉の側壁温度を 1350℃、底面の温度を 1650℃に保つためには必要とされる電力はいくらか。ただし電気炉の周囲は十分断熱されており、炉内および開口部からの熱伝導、対流伝熱による熱損失は無視して良い。また炉の壁面は黒体とせよ。



ヒント： 炉から大気（周囲）へのふく射伝熱は、周囲を気温に等しい温度の黒体壁と考えて計算すれば良い。この場合周囲の大きさは無限であるから、開口部に気温と等しい温度の黒体壁を考え、これと炉壁（側壁および底面）との間のふく射伝熱を計算せよ。底面と開口部の間の形態係数は図表から求めるが、側壁と開口部の間の形態係数はふく射が炉内で閉じていること（形態係数の総和が 1）と形態係数の相対定理から計算する。