

◎本日の出席点の問題と次回演習問題を確実に解けるようにすること.

慣性モーメントの定義式を理解し, 簡単な形の対象物について計算できるようにすること.

慣性モーメントの導出

剛体内の微小質量 dm に注目し, 瞬間的な並進の運動量 dP を求めると

$$dP = (\omega r) dm \quad (1)$$

と表せる.

対応する角運動量 dL は

$$dL = dP r = (\omega r) dm r = \omega r^2 dm \quad (2)$$

と表せる. 剛体全体について角運動量 dL を積分すると

$$L = \int_V dL = \int_V \omega r^2 dm \quad (3)$$

となる. ここで ω は剛体中では一定なので積分の外に出すことができ,

$$L = \omega \int_V r^2 dm = \omega I \quad (4)$$

となる. ここで I は

$$I = \int_V r^2 dm \quad (5)$$

であり, 慣性モーメントと呼ぶ. 慣性モーメントは, 微小な慣性モーメント dI を積分したものである. dI が具体的に表現できれば次式でも計算できる.

$$I = \int_V dI \quad (6)$$

慣性モーメントの性質

x, y, z 軸まわりの慣性モーメント I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} を求める式は以下のようにになる.

$$I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) dm \quad (7)$$

$$I_{yy} = \int_V (z^2 + x^2) dm \quad (8)$$

$$I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) dm \quad (9)$$

xy 平面に置かれた十分薄い板状の剛体の場合, z 方向が 0 なので

$$I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) dm = \int_V x^2 dm + \int_V y^2 dm = I_{yy} + I_{xx} \quad (10)$$

となり, x 軸と y 軸まわりの慣性モーメントの和は z 軸まわりの慣性モーメントに等しい.

また重心まわりのモーメントを I_G とすれば, 距離 h 離れた軸まわりの慣性モーメント I' は以下の式で求まる. ただし, M は剛体の質量である.

$$I' = I_G + h^2 M \quad (11)$$