

# 第7回

## 光ファイバモード特性(2)

2013年11月19日(火)

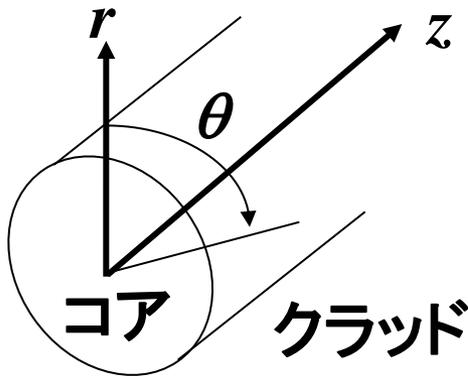
## 第3章

# 光ファイバのモード特性

# 解法(2): 光ファイバ

## 光ファイバの波動方程式

界分布のz方向依存性を $\exp(-j\beta z)$ と仮定して、円筒座標系で以下の式を得る。



$$\text{屈折率分布}n^2(r)= \begin{cases} n_1^2 & (r \leq a) \\ n_2^2 = n_1^2(1 - 2\Delta) & (r > a) \end{cases} \quad (3.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) E_z = 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) H_z = 0 \end{array} \right\} \quad (3.46)$$

## 式(3.46)の変形(1)

いま $E_z$ について $r$ 成分と $\theta$ 成分に変数分離を行い、

$$E_z = R(r)\Theta(\theta)$$

とにおいて式(3.46)に代入する。

$$\frac{d^2 R}{dr^2} \Theta + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \Theta + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} R + (k_0^2 n_i^2 - \beta^2) R \Theta = 0$$

両辺を  $R\Theta$  で割って左辺を $r$ を含む式の辺、右辺を $r$ を含まない式とする。

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} + (k_0^2 n_i^2 - \beta^2) = - \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}$$

$$\frac{1}{R} r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R} r \frac{dR}{dr} + (k_0^2 n_i^2 - \beta^2) r^2 = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}$$

## 式(3.46)の変形(2)

左辺において  $r =$  一定とすると左辺=定数となるので、右辺も定数となる。

この値(分離定数)を  $l^2$  とおくと、右辺から

$$-\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = l^2$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + l^2 \Theta = 0$$

よって

$$\Theta(\theta) = \cos(l\theta + \varphi)$$

とおける(  $\Theta(\theta) = Ae^{jl\theta} + Be^{-jl\theta}$  ともおけるが、ここではわかりやすさを考えて三角関数で表現した)。

一方、左辺については

$$\frac{1}{R} r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R} r \frac{dR}{dr} + (k_0^2 n_i^2 - \beta^2) r^2 = l^2$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[ (k_0^2 n_i^2 - \beta^2) - \frac{l^2}{r^2} \right] R = 0 \quad (\text{A.1})$$

コア内(  $n_i = n_1$ )においては  $k_0 n_1 > \beta$  である。

$k_0^2 n_1^2 - \beta^2 = \kappa^2$  とおき、  $x = \kappa r$  の変数変換を行うと、

式(A.1)は以下のように変形できる。

$$\frac{d}{dr} = \frac{dx}{dr} \frac{d}{dx} = \kappa \frac{d}{dx}, \quad \frac{d^2}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left( \kappa \frac{d}{dx} \right) = \frac{dx}{dr} \frac{d}{dx} \left( \kappa \frac{d}{dx} \right) = \kappa^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

## 式(3.45)の変形(4)

$$\kappa^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{\kappa}{x} \frac{dR}{dx} + \left[ \kappa^2 - \frac{\kappa^2 l^2}{x^2} \right] R = 0$$
$$\therefore \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left[ 1 - \frac{l^2}{x^2} \right] R = 0 \quad (\text{A.2})$$

式(A.2)はベッセルの微分方程式(変数は  $x = \kappa r$  )であり、基本解は第一種ベッセル関数と第二種ベッセル関数であることがわかる。

一方クラッド内では(  $n_i = n_2$  )においては  $k_0 n_2 < \beta$  である。

式(A.2)は

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left[ (\beta^2 - k_0^2 n_2^2) + \frac{l^2}{r^2} \right] R = 0$$

## 式(3.45)の変形(5)

---

$\beta^2 - k_0^2 n_2^2 = \gamma^2$  とおき、 $x = \gamma r$  の変数変換を行うと前述と同様にして、

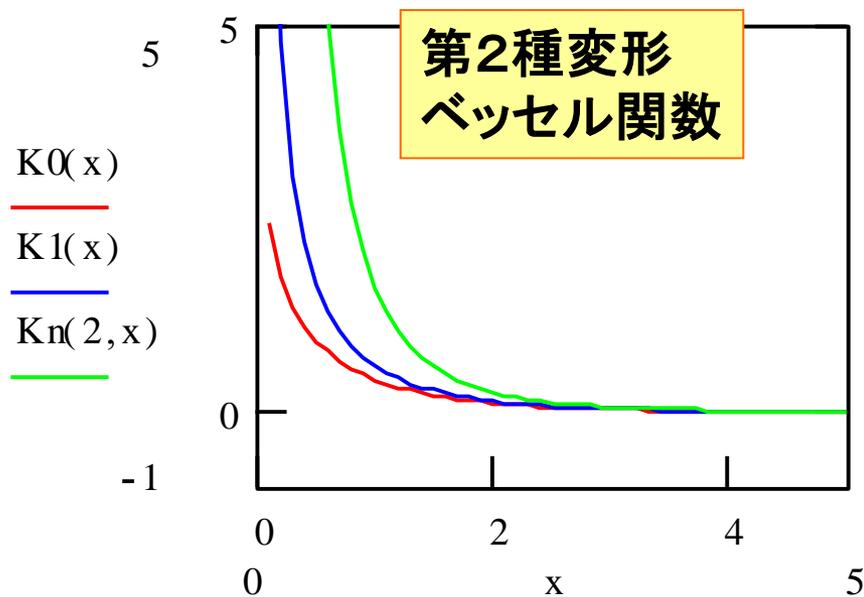
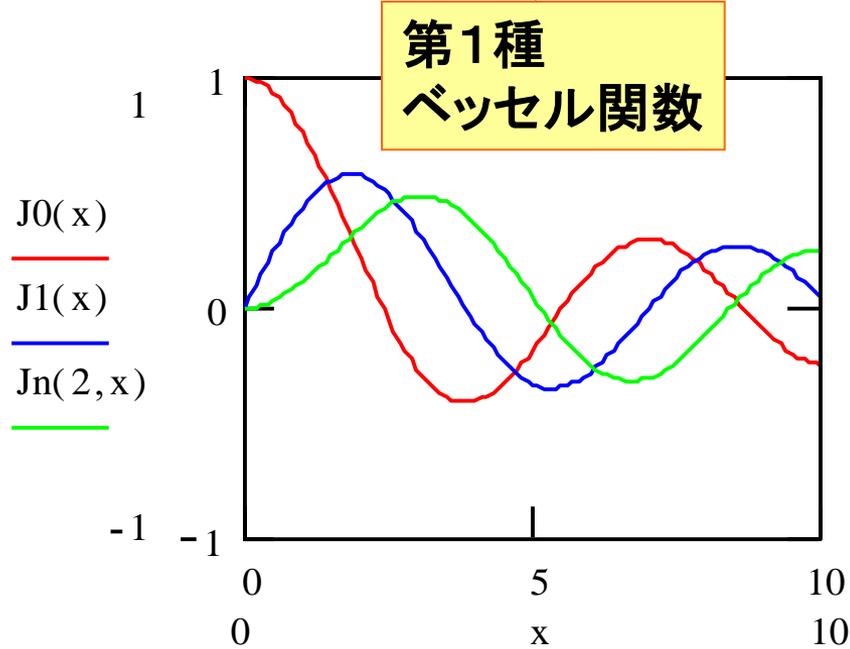
$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left[ 1 + \frac{l^2}{x^2} \right] R = 0 \quad (\text{A.3})$$

よって式(A.3)はベッセルの微分方程式(変数は  $x = \gamma r$ )であり、

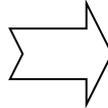
基本解は第一種変形ベッセル関数と第二種変形ベッセル関数であることがわかる。

# 光ファイバのモード(2)

## 第1種ベッセル関数 $J_l(x)$ , 第2種変形ベッセル関数 $K_l(x)$



式(3.45)を(3.46)に代入



変数分離法により角度  $\theta$  依存性は三角関数

半径  $r$  依存性はコア内振動解: 第1種ベッセル関数  $J_\nu(x)$

クラッド内は減衰解:

第2種変形ベッセル関数  $K_\nu(x)$

**コア内** ( $r \leq a$ )

$$E_z = A_l J_l(\kappa r) \cos(l\theta + \phi_l) \quad (3.47)$$

$$H_z = B_l J_l(\kappa r) \cos(l\theta + \psi_l) \quad (3.48)$$

**クラッド内** ( $r > a$ )

$$E_z = A_l \frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)} K_l(\gamma r) \cos(l\theta + \phi_l) \quad (3.49)$$

$$H_z = B_l \frac{J_l(\kappa r)}{K_l(\gamma a)} K_l(\gamma r) \cos(l\theta + \psi_l) \quad (3.50)$$

$E_z, H_z$  がそれぞれ  
 $r=a$  において連続  
となるように係数を  
考慮

$l$ : 角度  $\theta$  方向のモード番号

$\theta$ 方向(接線成分)が $r=a$ で連続となる条件

$$E_{\theta}(r \rightarrow a + 0) = E_{\theta}(r \rightarrow a - 0) \quad (3.51)$$

$$H_{\theta}(r \rightarrow a + 0) = H_{\theta}(r \rightarrow a - 0) \quad (3.52)$$

ここで式(3.7), (3.8)の円筒座標系の表現から以下の式を得る。

$$E_{\theta} = \frac{-j}{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2} \left( \beta \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (3.53)$$

$$H_{\theta} = \frac{-j}{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2} \left( \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \beta \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right) \quad (3.54)$$

式(3.51), (3.52)を満たす条件から得られる2元連立同次方程式が恒等的に0でない解を持つことから、次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & \frac{k_0^2 \left[ \frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} \right] \left[ n_1^2 \frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + n_2^2 \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} \right]}{l^2 \beta^2 \left( \frac{1}{(\kappa a)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right)^2} \\
 &= - \frac{\sin(l\theta + \phi_l) \sin(l\theta + \psi_l)}{\cos(l\theta + \phi_l) \cos(l\theta + \psi_l)} \\
 &= \frac{\cos(2l\theta + \phi_l + \psi_l) - \cos(\phi_l - \psi_l)}{\cos(2l\theta + \phi_l + \psi_l) + \cos(\phi_l - \psi_l)} \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

式(3.55)は $r=a$ の至るところで成立しなければいけないので、 $\theta$ に無依存。

$$\cos(\phi_l - \psi_l) = 0 \quad \text{ならば右辺}=1$$

$$\therefore \phi_l - \psi_l = \pm \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad E_z \text{と} H_z \text{の角度依存性は} \pi/2 \text{ずれている} = \text{直交}$$

式(3.55)は次式となる。

$$\left[ \frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} \right] \left[ \frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + (1 - 2\Delta) \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} \right]$$
$$= \left( \frac{l\beta}{k_{0n_1}} \right)^2 \left( \frac{1}{(\kappa a)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right) \quad (3.56)$$

階段屈折率円筒光ファイバの固有値方程式

式(3.56)において

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \cong \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1$$

が成り立つ場合には  $\beta \cong k_0 n_1$  と近似して(弱導波近似)、

$$\left[ \frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} \right] = \chi l \left( \frac{1}{(\kappa a)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right) \quad (3.57)$$

(ただし  $\chi = +1$  または  $-1$ )

ここで以下のベッセル関数の公式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} &= \frac{J_{l-1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} - \frac{l}{(\kappa a)^2} = -\frac{J_{l+1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{l}{(\kappa a)^2} \\ \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} &= -\frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} - \frac{l}{(\gamma a)^2} = -\frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} + \frac{l}{(\gamma a)^2} \end{aligned} \right\} (3.58)$$

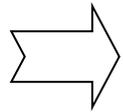
$\chi = -1$  の場合 (HEモード)

$$\frac{J_{l-1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} - \frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \quad (3.59)$$

$\chi = +1$  の場合 (EHモード)

$$\frac{J_{l+1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \quad (3.60)$$

光ファイバの一般解は6つの電磁界 ( $E_r, E_\theta, E_z, H_r, H_\theta, H_z$ ) をすべて持ったモードである。



ハイブリッドモード

## ① HEモード

$\chi = -1$  で  $l \geq 1$  の場合、モード番号を新たに  $\nu = l - 1$  と振ると、式(3.59)は以下に変形できる。

$$\frac{J_{\nu-1}(\sqrt{1-b}V)}{J_\nu(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_\nu(\sqrt{b}V)}{K_{\nu-1}(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}} \quad (3.61)$$

ただし

$$\left\{ \begin{array}{ll} V = k_0 n_1 a \sqrt{2\Delta} & (\text{Vパラメータ or 規格化周波数}) \\ \Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} & (\text{比屈折率差}) \\ b = \frac{\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} & (\text{規格化伝搬定数}) \end{array} \right.$$

解の固有値 $b$ を値の大きいものから順に $m = 1, 2, 3, \dots$ と振り、 $\text{HE}_{l,m}$ モードと呼ぶ。

$l$ : 角度 $\theta$ 方向のモード番号

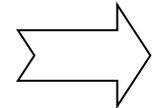
$v$ : 角度 $\theta$ 方向の節の数の半分

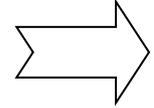
$m$ : 光強度分布が半径方向でとる極大値の数

## ② TEモード、TMモード

$l = 0$ の場合(ファイバの回転方向に一様な界分布)、

$$\frac{J_0(\sqrt{1-b}V) \cdot K_1(\sqrt{b}V)}{J_1(\sqrt{1-b}V) \cdot K_0(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}} \quad (3.62)$$

式(3.47)~(3.50)において  $\phi_l = \frac{\pi}{2}$  とすると  $E_z = 0$   **TEモード**

$\phi_l = 0$  とすると  $H_z = 0$   **TMモード**

## ③ EHモード

$\chi = +1$ で  $l > 1$  の場合、モード番号を新たに  $\nu = l + 1$  と振ると、式(3.60)は以下に変形できる。

$$\frac{J_{\nu-1}(\sqrt{1-b}V)}{J_{\nu}(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_{\nu}(\sqrt{b}V)}{K_{\nu-1}(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}} \quad (3.63)$$

式(3.61)~(3.63)はすべて同じ形である。  
方位角 $\theta$ 方向のモード番号 $l$ を変換して

$$v = \begin{cases} l-1: HE_{l,m} \text{モード} \\ l+1: TE_{0,m}, TM_{0,m}, EH_{l,m} \text{モード} \end{cases}$$

とおくと、同じ $v$ を持つ $HE_{v+1,m}$ モードと $EH_{v-1,m}$ モードは伝搬定数が同じである。

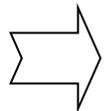


縮退

※弱導波路近似により導出されるものなので、厳密解では若干差あり

Little difference of propagation constant occurs in the actual modes

互いに縮退を起こしている固有関数の線形結合から作った固有モードの組み合わせにより、直線偏光したモードを作ることができる。

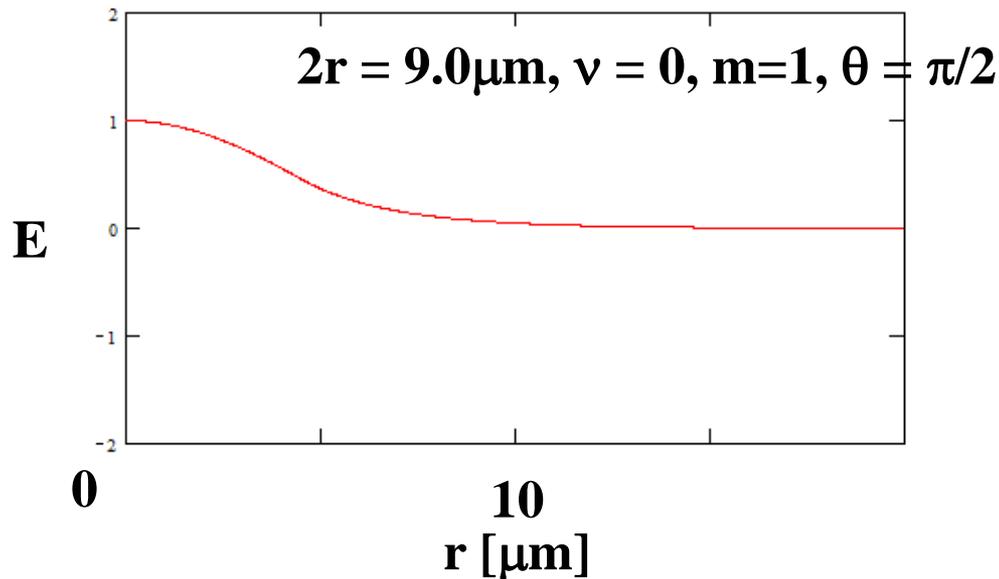
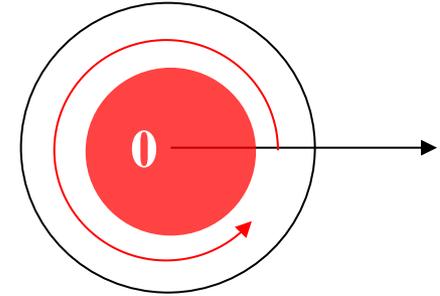
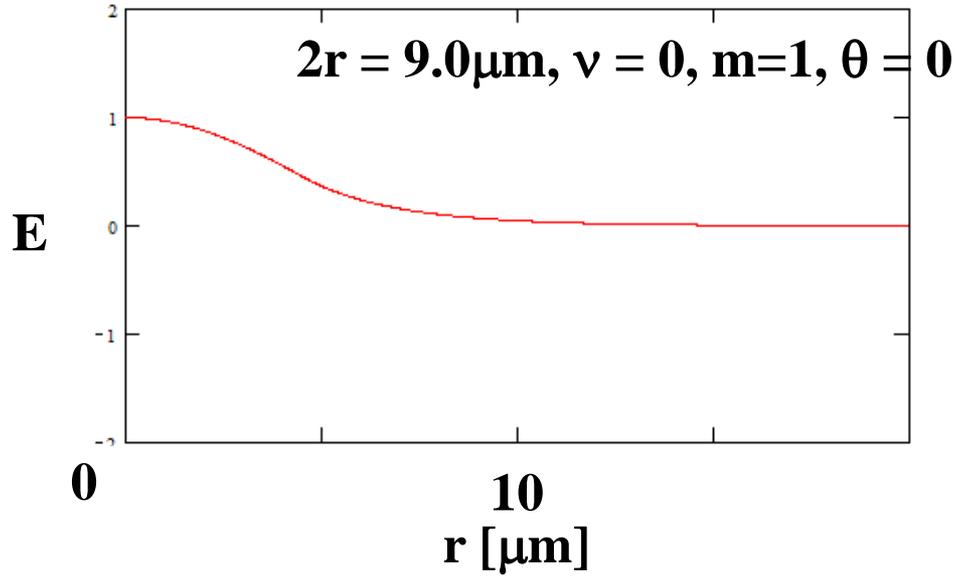


**LP (Linearly Polarized) モード:  $LP_{v,m}$**

$E_x$ の分布について考える(数式は $E_z$ に類似)。

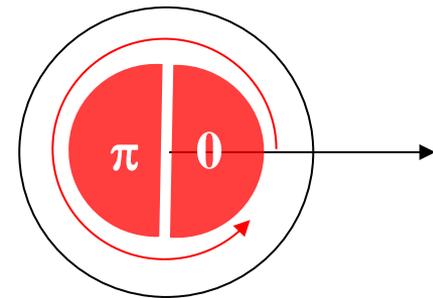
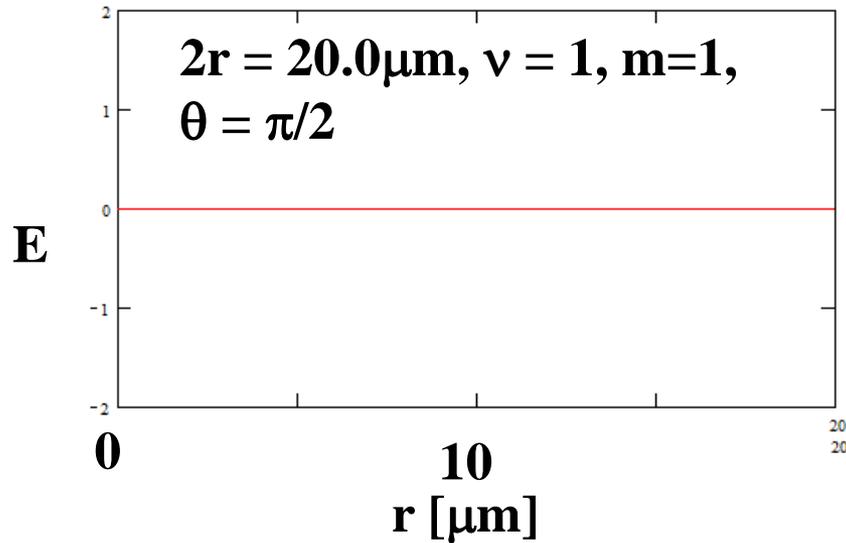
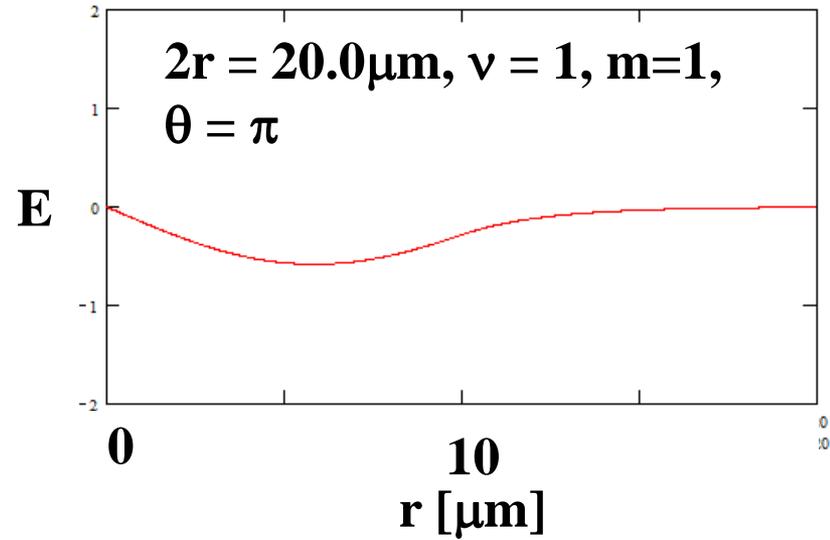
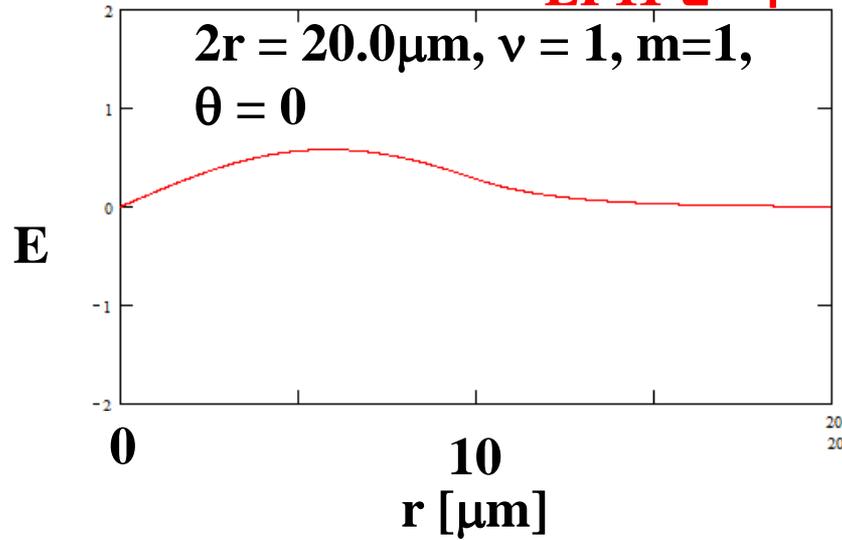
# 光ファイバの電界分布(1)

## LP01モード



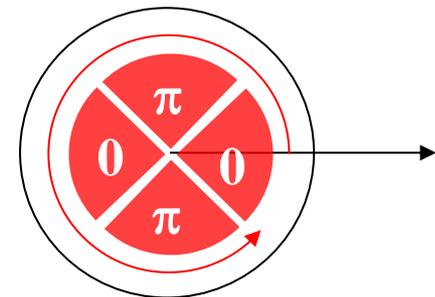
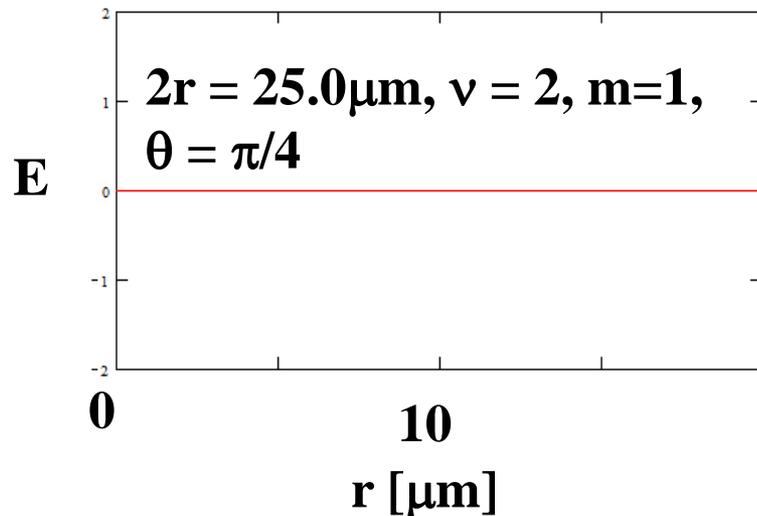
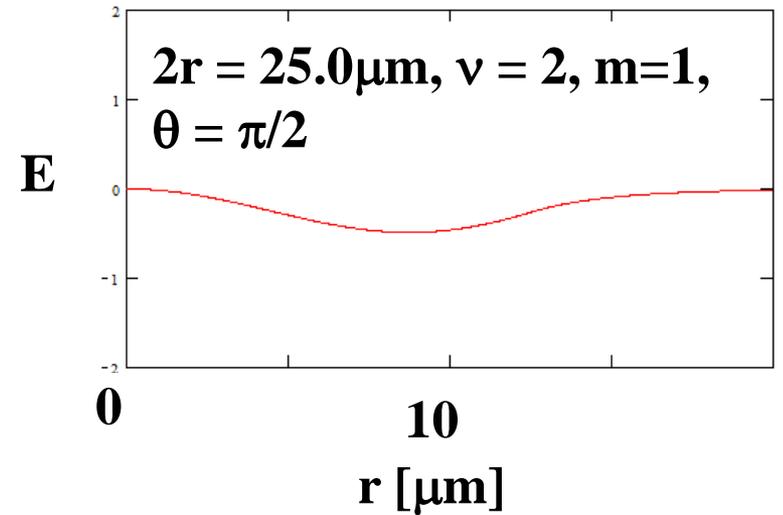
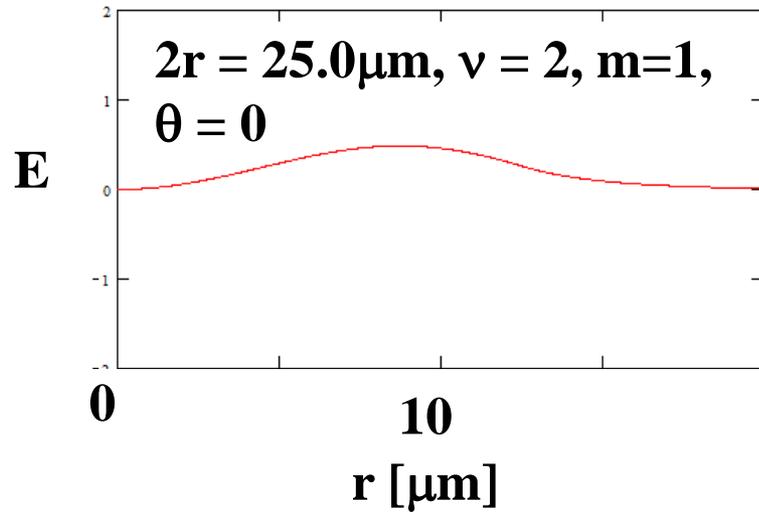
# 光ファイバの電界分布(2)

## LP11モード



# 光ファイバの電界分布(3)

## LP21モード



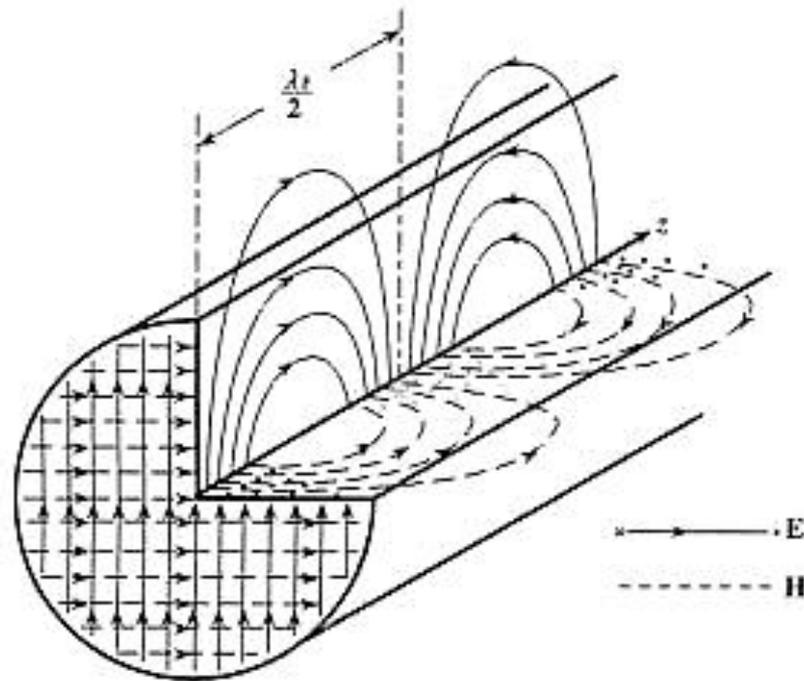
## LPモードと厳密モードの対応

LPモード近似	厳密モード	カットオフV値
$LP_{0,m}$	$HE_{1,m}$	$V_c=0$ ( $m=1$ ) $J_1(V_c)=0$ の $m-1$ 番目の根 ( $m>2$ ) 2偏波モードを合わせた2重に縮退
$LP_{1,m}$	$HE_{2,m}$ $TE_{0,m}$ $TM_{0,m}$	$V_c=2.4048$ ( $m=1$ ) $J_0(V_c)=0$ の $m$ 番目の根 ( $m>2$ ) 2偏波モードを合わせた4重に縮退 (TE、TMは軸対称のため偏波縮退なし)
$LP_{\nu,m}$ ( $\nu > 2$ )	$HE_{\nu+1,m}$ $EH_{\nu-1,m}$	$J_{\nu-1}(V_c)=0$ の $m$ 番目の根 2偏波モードを合わせた4重に縮退

# 光ファイバの電磁界(1)

國分泰雄著 『光波工学』 共立出版 pp. 174図6.6より

基本モード( $LP_{0,1}$  or  $HE_{1,1}$ モード)



実線が電界  
破線が磁界

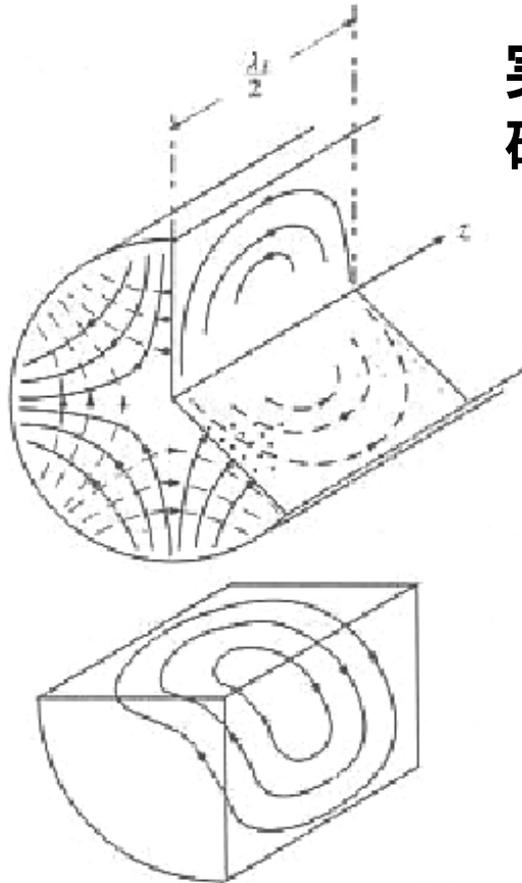
# 光ファイバの電磁界(2)

國分泰雄著 『光波工学』 共立出版 pp. 176図6.7より

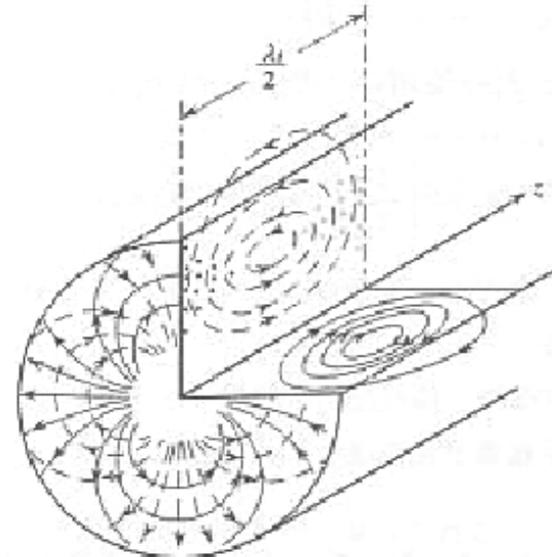
HE<sub>2,1</sub>モード

EH<sub>1,1</sub>モード

実線が電界  
破線が磁界



(c) HE<sub>2,1</sub>モード



(d) EH<sub>1,1</sub>モード

# 光ファイバの電磁界(3)

岡本勝就著『光導波路の基礎』pp.63 図3.2

LPモード 命名法	従来の命名法	電界分布	$E_z$ の強度分布
$LP_{0,1}$	$HE_{1,1}$		
$LP_{1,1}$	$TE_{0,1}$		
	$TM_{0,1}$		
	$HE_{2,1}$		
$LP_{2,1}$	$EH_{1,1}$		
	$HE_{3,1}$		

基本モード $v=0$ について考える。式(3.61)に $v=0$ を代入して

$$\frac{J_0(\sqrt{1-b}V)}{J_1(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_1(\sqrt{b}V)}{K_0(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}}$$

カットオフ条件は、 $b=0$ とにおいて $J_0(V_c)=0$ の第一番目の解なので、

$$V \leq 2.405$$

$$V = k_0 n_1 a \sqrt{2\Delta} \text{ より}$$

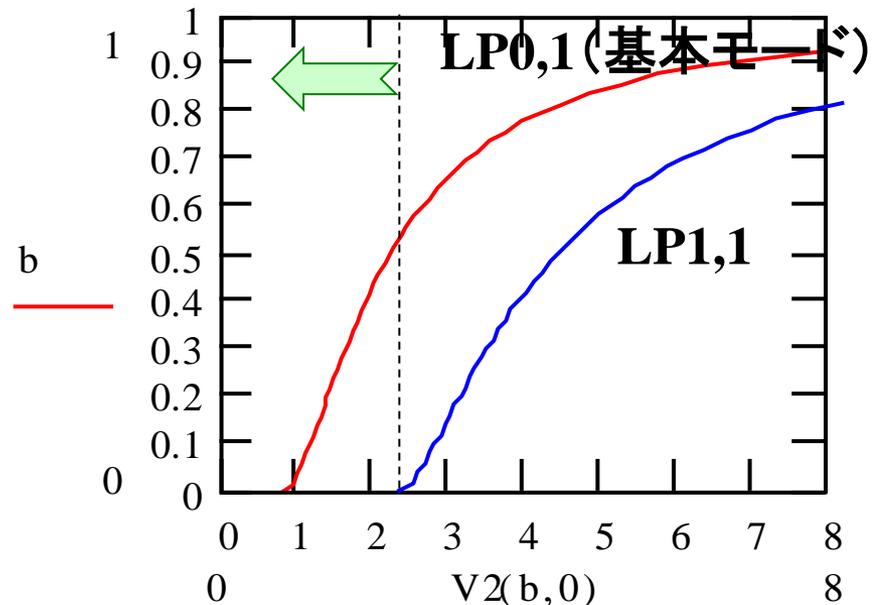
$$a < \frac{2.405}{k_0 n_1 \sqrt{2\Delta}}$$

$\Delta = 0.003$ ,  $n_1 = 1.46$ のとき、

$$a < \frac{2.405 \times 1.55}{2\pi \times 1.46 \times \sqrt{2 \times 0.003}} = 5.25 \mu\text{m}$$

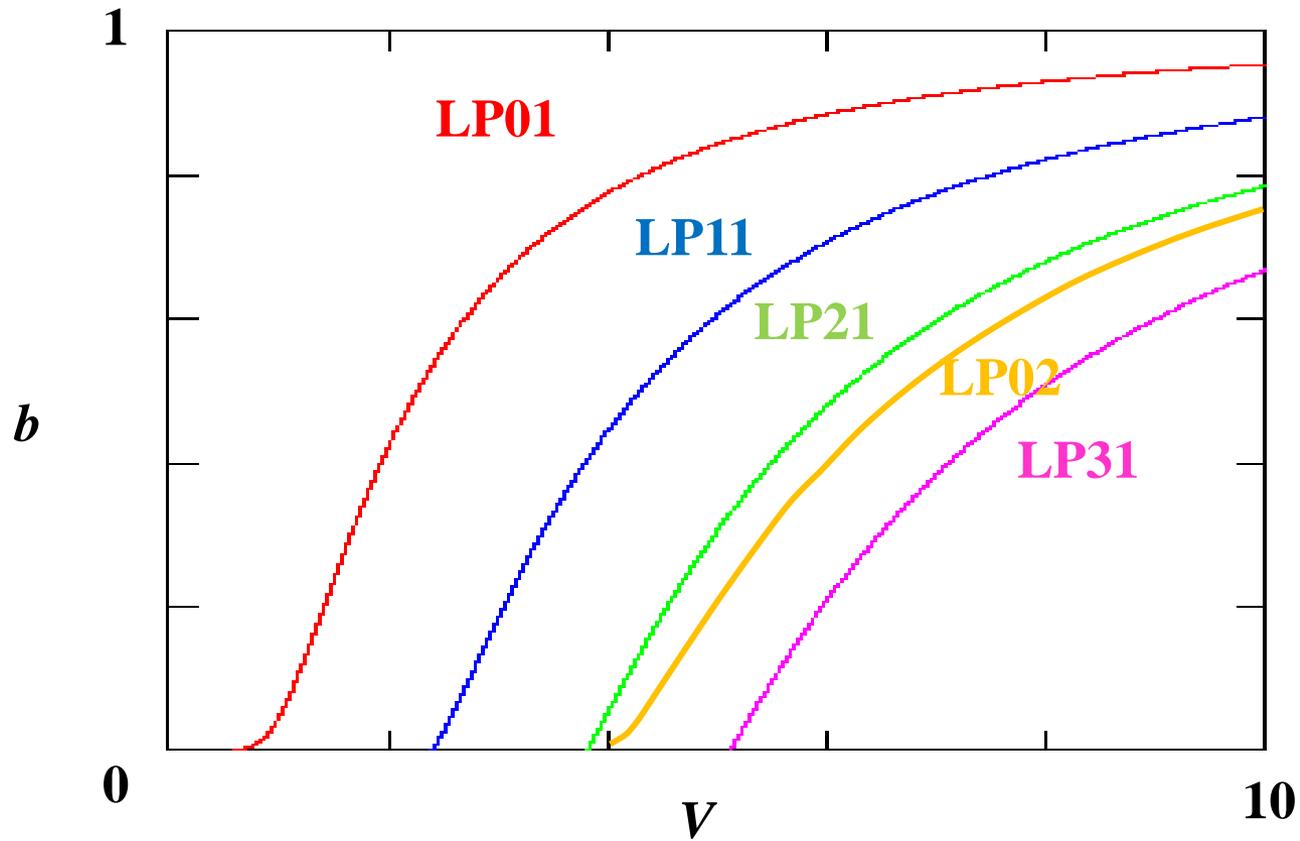
(直径 $10.5 \mu\text{m}$ 以下)

単一モード条件



# 光ファイバの分散曲線(2)

(参考例)岡本勝就著『光導波路の基礎』pp.66 図3.4

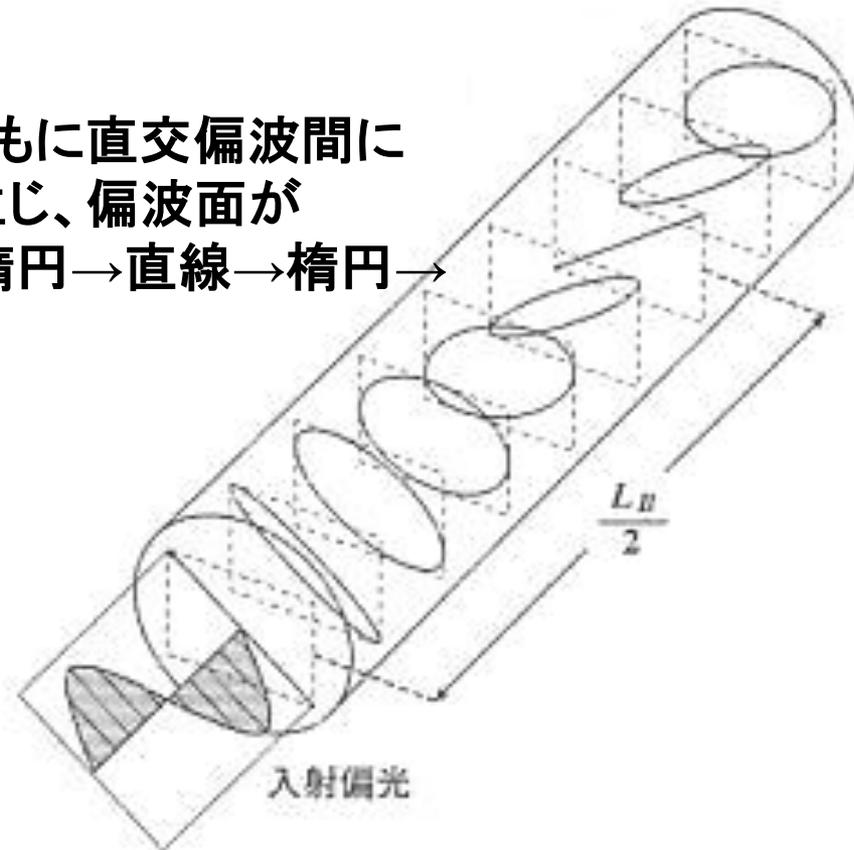


# 偏波

## 光ファイバ中の偏波状態の変化

- 基本モード( $HE_{1,1}$ )は真円コアに対しては中心対称であり偏波状態は縮退する(伝搬定数が等しい)。
- 実際は製造上の非対称性、外部応力により直交偏波間に屈折率差を生ずる(複屈折性)。

⇒ 伝搬とともに直交偏波間に遅延を生じ、偏波面が直線→楕円→直線→楕円→と変化

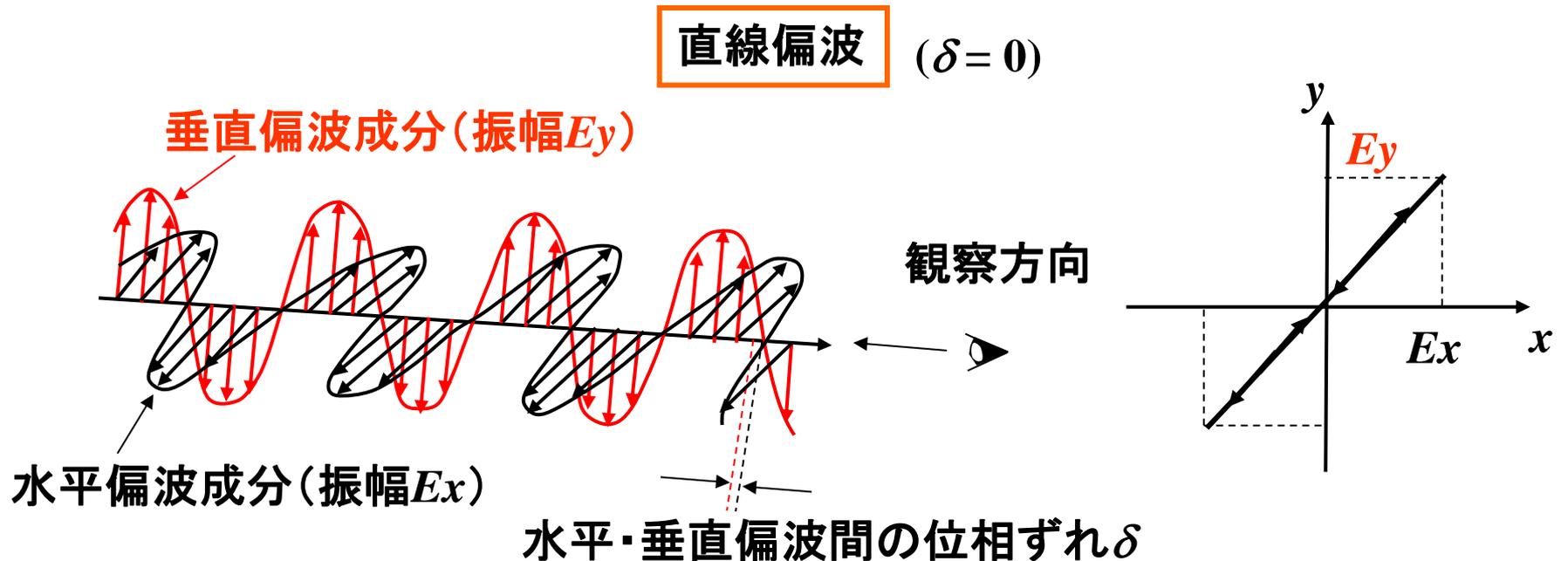


# 偏波の状態の表現方法(1)

- 直線偏波、円偏波、楕円偏波
- 右回り偏波、左回り偏波

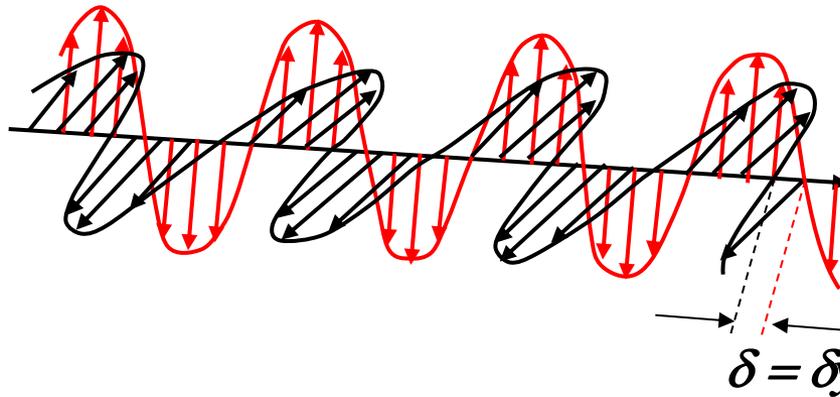
光が進む方向から逆に観察したときに  
電界の描く軌跡の形状、変化の方向

⇒ 水平偏波・垂直偏波に分解したときの各偏波成分の振幅と位相ずれにより偏波状態が決定される。

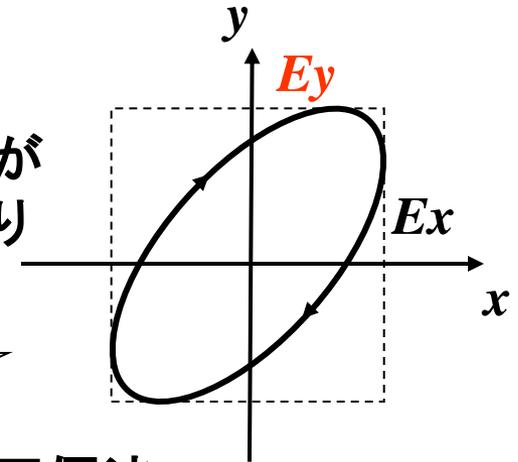
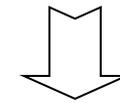


## 楕円偏波

$0 < \delta < \pi$  (垂直偏波の位相が進む)



軌跡が  
右回り

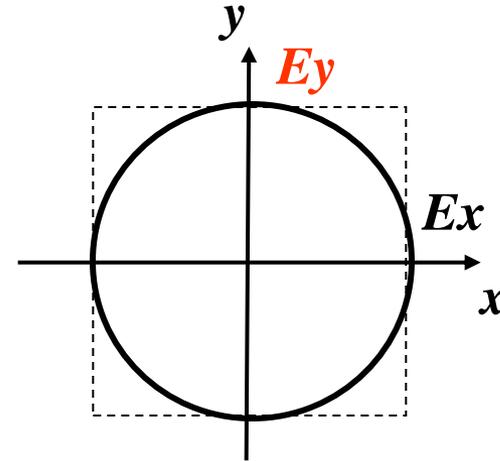
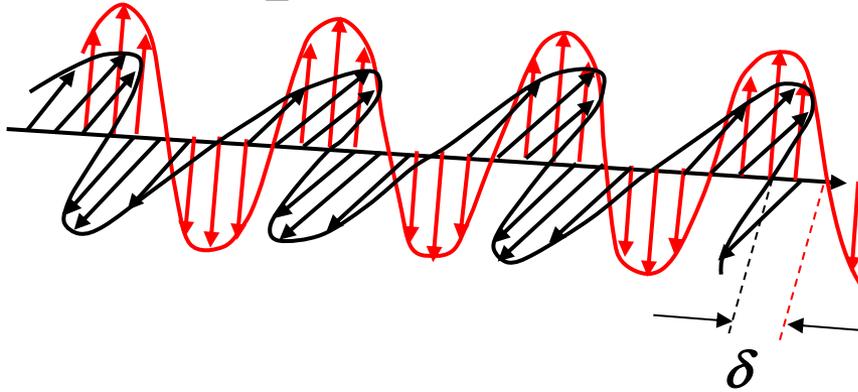


右回り楕円偏波

$-\pi < \delta < 0$  (垂直偏波の位相が遅れる) : 左回り楕円偏波

## 円偏波

$$\delta = \pm \frac{\pi}{2} \text{ かつ } E_x = E_y$$



$$\delta = \frac{\pi}{2} \quad : \text{右回り円偏波}$$

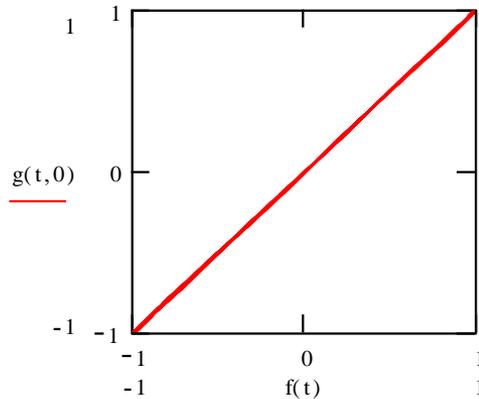
$$\delta = -\frac{\pi}{2} \quad : \text{左回り円偏波}$$

# 偏波間の位相ずれと偏波状態

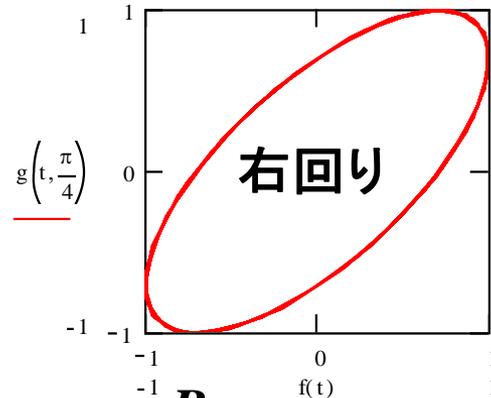
$$\left. \begin{aligned} f(t) &= A \cos \omega t \\ g(t) &= B \cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \right\}$$

とおき、 $t$  を変化させたときの  $f(t) - g(t)$  の軌跡を計算

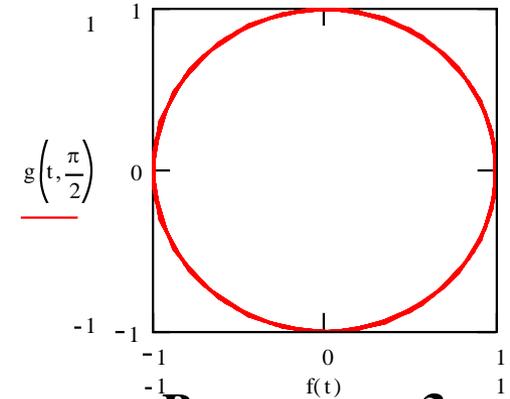
$$\frac{B}{A} = 1, \delta = 0$$



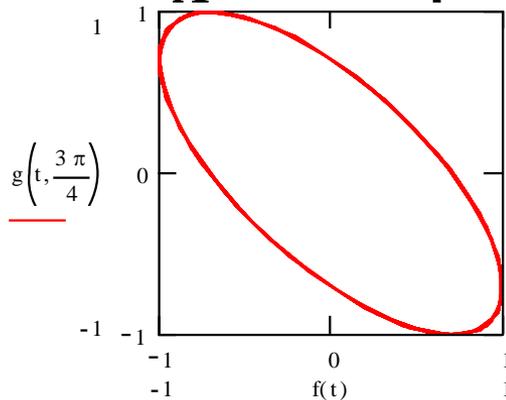
$$\frac{B}{A} = 1, \delta = \frac{\pi}{4}$$



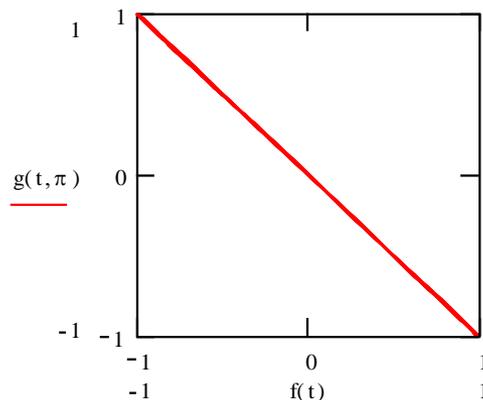
$$\frac{B}{A} = 1, \delta = \frac{\pi}{2}$$



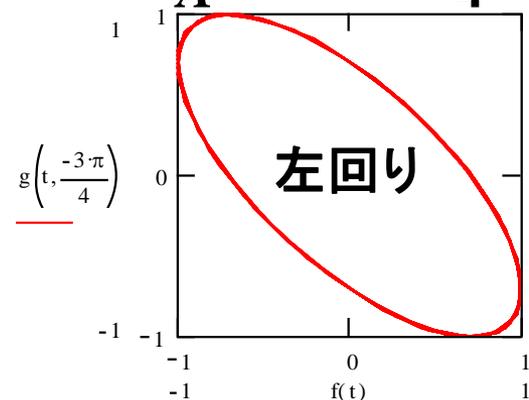
$$\frac{B}{A} = 1, \delta = \frac{3\pi}{4}$$



$$\frac{B}{A} = 1, \delta = \pi$$



$$\frac{B}{A} = 1, \delta = -\frac{3\pi}{4}$$



$$\left. \begin{aligned} Ex &= Ax \cos(\omega t - \beta z) & (3.64) \\ Ey &= Ay \cos(\omega t - \beta z + \delta) & (3.65) \end{aligned} \right\} \text{とおく。}$$

式(3.64)より、

$$\cos(\omega t - \beta z) = \frac{Ex}{Ax} \quad (3.66)$$

式(3.65)より、

$$\begin{aligned} Ey &= Ay \{ \cos(\omega t - \beta z) \cos \delta - \sin(\omega t - \beta z) \sin \delta \} \\ \sin(\omega t - \beta z) &= \frac{-\frac{Ey}{Ay} + \cos(\omega t - \beta z) \cos \delta}{\sin \delta} = \frac{-\frac{Ey}{Ay} + \frac{Ex}{Ax} \cos \delta}{\sin \delta} \end{aligned} \quad (3.67)$$

$\cos^2(\omega t - \beta z) + \sin^2(\omega t - \beta z) = 1$  に式(3.66)、(3.67)を代入

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{E_y}{A_y} + \frac{E_x}{A_x} \cos \delta}{\sin \delta}\right)^2 = 1$$

よって、

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{A_x}\right)\left(\frac{E_y}{A_y}\right)\cos \delta = \sin^2 \delta \quad (3.68)$$

楕円の式

$\delta = 0$  のとき、  $\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{A_x}\right)\left(\frac{E_y}{A_y}\right) = 0$

$$\therefore E_y = \frac{A_y}{A_x} E_x \quad \text{直線偏波}$$

$\delta = \pi$  のとき、  $\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 + 2\left(\frac{E_x}{A_x}\right)\left(\frac{E_y}{A_y}\right) = 0$

$$\therefore E_y = -\frac{A_y}{A_x} E_x \quad \text{直線偏波}$$

## 偏波状態の数式表現(3)

---

$\delta = \frac{\pi}{2}$  のとき、  $\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 = 1$       軸が水平・垂直方向を向いた楕円

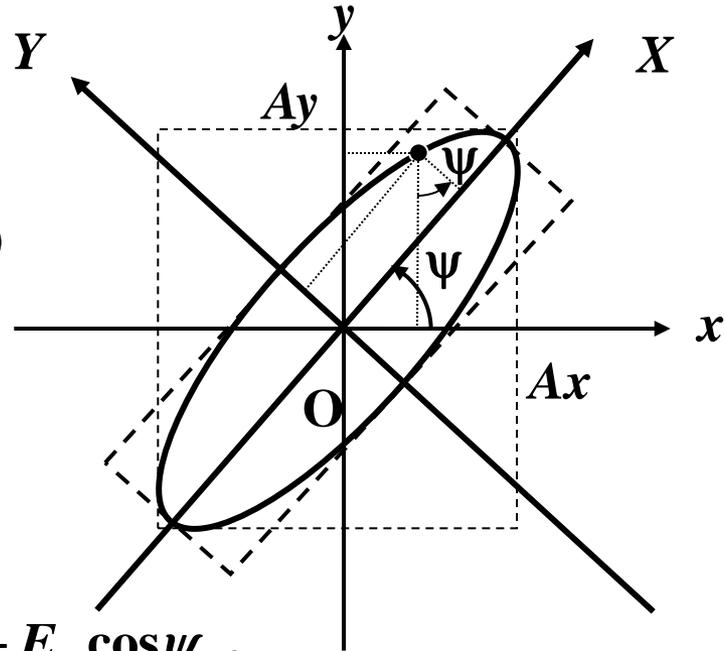
$\delta = \frac{\pi}{2}, A_x = A_y$  のとき、  $E_x^2 + E_y^2 = A_x^2$       円

## 偏波状態の数式表現(4)

楕円が水平・垂直軸方向を向くように座標軸を回転させる。

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_x \cos \psi - E_y \sin \psi \\ E_y &= E_x \sin \psi + E_y \cos \psi \end{aligned} \right\} (3.69)$$

を式(3.68)に代入する。



$$\left( \frac{E_x \cos \psi - E_y \sin \psi}{Ax} \right)^2 + \left( \frac{E_x \sin \psi + E_y \cos \psi}{Ay} \right)^2 - 2 \left( \frac{E_x \cos \psi - E_y \sin \psi}{Ax} \right) \left( \frac{E_x \sin \psi + E_y \cos \psi}{Ay} \right) \cos \delta = \sin^2 \delta$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\cos^2 \psi}{Ax^2} + \frac{\sin^2 \psi}{Ay^2} - 2 \frac{\sin \psi \cos \psi \cos \delta}{Ax Ay} \right) E_x^2 + \left( \frac{\sin^2 \psi}{Ax^2} + \frac{\cos^2 \psi}{Ay^2} + 2 \frac{\sin \psi \cos \psi \cos \delta}{Ax Ay} \right) E_y^2 \\ & + 2 \left\{ \left( \frac{-1}{Ax^2} + \frac{1}{Ay^2} \right) \sin \psi \cos \psi + \frac{-\cos^2 \psi + \sin^2 \psi}{Ax Ay} \cos \delta \right\} E_x E_y = \sin^2 \delta \quad (3.70) \end{aligned}$$

座標変換後、 $E_x E_y$ 成分は0になるので、

$$\left(\frac{-1}{Ax^2} + \frac{1}{Ay^2}\right) \sin \psi \cos \psi + \frac{-\cos^2 \psi + \sin^2 \psi}{Ax Ay} \cos \delta = 0 \quad (3.71)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{Ax^2 - Ay^2}{Ax^2 Ay^2}\right) \sin 2\psi - \frac{\cos 2\psi}{Ax Ay} \cos \delta = 0$$

$$\tan 2\psi = \frac{\sin 2\psi}{\cos 2\psi} = \frac{2Ax Ay \cos \delta}{Ax^2 - Ay^2}$$

$$\therefore \psi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2Ax Ay \cos \delta}{Ax^2 - Ay^2} \right) \quad (3.72)$$

主に $Ax, Ay$ の比率の影響を表す。

$$\left. \begin{aligned} \text{一方、 } E_X &= a \cos(\omega t - \beta z + \delta_0) \\ E_Y &= \pm b \sin(\omega t - \beta z + \delta_0) \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

とおく(X-Y軸が楕円の長軸・短軸に平行のため、式(3.68)の $\delta=\pi/2$ に相当し、 $\cos, \sin$ で表現した $\delta$ は同じとなる)。

式(3.69)より

$$\left. \begin{aligned} E_X &= E_x \cos \psi + E_y \sin \psi \\ E_Y &= -E_x \sin \psi + E_y \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

なので、式(3.64)、(3.65)、(3.73)、(3.74)より

$$\begin{aligned} a \cos(\omega t - \beta z + \delta_0) &= \{A_x \cos(\omega t - \beta z)\} \cos \psi + A_y \cos(\omega t - \beta z + \delta) \sin \psi \\ a \cos(\omega t - \beta z) \cos \delta_0 - a \sin(\omega t - \beta z) \sin \delta_0 &= A_x \cos(\omega t - \beta z) \cos \psi + A_y \cos(\omega t - \beta z + \delta) \sin \psi \\ &= A_x \cos(\omega t - \beta z) \cos \psi + A_y \{\cos(\omega t - \beta z) \cos \delta - \sin(\omega t - \beta z) \sin \delta\} \sin \psi \\ &= (A_x \cos \psi + A_y \sin \psi \cos \delta) \cos(\omega t - \beta z) - A_y \sin \psi \sin \delta \sin(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

任意の $\omega t - \beta z$ に対して成立するために、 $\cos(\omega t - \beta z), \sin(\omega t - \beta z)$ の係数が等しいと考える。

## 偏波状態の数式表現(7)

$$a \cos \delta_0 = A_x \cos \psi + A_y \sin \psi \cos \delta \quad (3.75)$$

$$a \sin \delta_0 = A_y \sin \psi \cos \delta \quad (3.76)$$

また

$$\pm b \sin(\omega t - \beta z + \delta_0) = -A_x \cos(\omega t - \beta z) \sin \psi + A_y \cos(\omega t - \beta z + \delta) \cos \psi$$

$$\begin{aligned} \pm (b \sin(\omega t - \beta z) \cos \delta_0 + b \cos(\omega t - \beta z) \sin \delta_0) &= -A_x \sin \psi \cos(\omega t - \beta z) + A_y \{ \cos \delta \cos(\omega t - \beta z) - \sin \delta \sin(\omega t - \beta z) \} \cos \psi \\ &= (-A_x \sin \psi + A_y \cos \psi \cos \delta) \cos(\omega t - \beta z) - A_y \sin \delta \cos \psi \sin(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

$\cos(\omega t - \beta z)$ ,  $\sin(\omega t - \beta z)$ の係数が等しいと考えると、

$$\pm b \cos \delta_0 = -A_y \sin \delta \cos \psi \quad (3.77)$$

$$\pm b \sin \delta_0 = -A_x \sin \psi + A_y \cos \psi \cos \delta \quad (3.78)$$

$(3.75)^2 + (3.76)^2$

$$\begin{aligned} a^2 (\cos^2 \delta_0 + \sin^2 \delta_0) &= (A_x \cos \psi + A_y \sin \psi \cos \delta)^2 + (A_y \sin \psi \sin \delta)^2 \\ a^2 &= A_x^2 \cos^2 \psi + A_y^2 \sin^2 \psi + 2A_x A_y \sin \psi \cos \psi \cos \delta \quad (3.79) \end{aligned}$$

$(3.77)^2 + (3.78)^2$

$$\begin{aligned} b^2 (\cos^2 \delta_0 + \sin^2 \delta_0) &= (-A_y \cos \psi \sin \delta)^2 + (-A_x \sin \psi + A_y \cos \psi \cos \delta)^2 \\ b^2 &= A_x^2 \sin^2 \psi + A_y^2 \cos^2 \psi - 2A_x A_y \sin \psi \cos \psi \cos \delta \quad (3.80) \end{aligned}$$

(3.79)<sup>2</sup>+(3.80)<sup>2</sup>より、

$$a^2 + b^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad (3.81)$$

(3.75) × (3.77) + (3.76) × (3.78)

$$\begin{aligned} & \pm ab(\cos^2 \delta_0 + \sin^2 \delta_0) \\ &= (A_x \cos \psi + A_y \sin \psi \cos \delta)(-A_y \sin \delta \cos \psi) + (A_y \sin \delta \sin \psi)(-A_x \sin \psi + A_y \cos \psi \cos \delta) \\ &= -A_x A_y \sin \delta (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) \end{aligned}$$

$$\therefore \pm ab = -A_x A_y \sin \delta \quad (3.82)$$

$$(3.81) \div (3.82) \quad \therefore \frac{\pm ab}{a^2 + b^2} = -\frac{A_x A_y}{A_x^2 + A_y^2} \sin \delta$$

$\tan \chi = \mp \frac{b}{a}$  とおくと、

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\mp ab}{a^2 + b^2} &= \mp \frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\tan \chi}{1 + \tan^2 \chi} = \frac{\sin \chi \tan \chi}{\cos \chi} \cos^2 \chi \\ &= \sin \chi \cos \chi \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\chi = \frac{A_x A_y}{A_x^2 + A_y^2} \sin \delta$$

$$\chi = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{2A_x A_y \sin \delta}{A_x^2 + A_y^2} \right)$$

よって、式(3.68)は以下のようにできる。

$$\frac{E_x^2}{A^2} + \frac{E_y^2}{B^2} = 1$$

ただし

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cos \chi$$

$$B = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \sin \chi$$

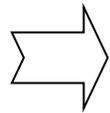
$$\chi = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{2A_x A_y \sin \delta}{A_x^2 + A_y^2} \right)$$

主に $\delta$ の影響を表す。

(3.83)

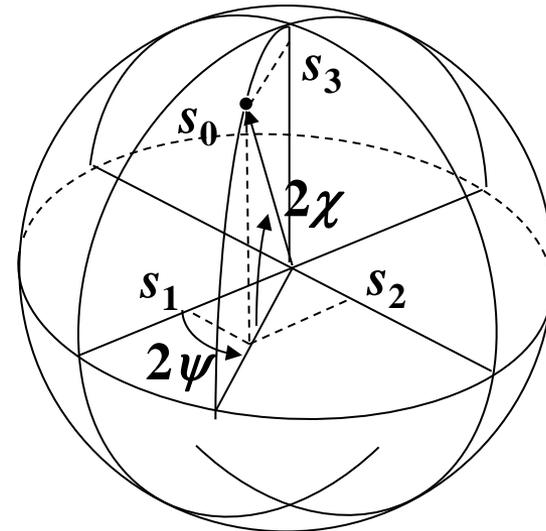
(参考)『光波工学』 栖原 敏明著 コロナ社

偏光状態は3つのパラメータ  $A_x, A_y, \delta$  で表現されるが  $\delta$  の直接的な観測が困難。



偏光子、波長板などで測定可能な値を用いた間接的な測定

$$\begin{aligned}
 s_0 &= A_x^2 + A_y^2 \\
 s_1 &= A_x^2 - A_y^2 \\
 s_2 &= 2A_x A_y \cos \delta \\
 s_3 &= 2A_x A_y \sin \delta \\
 \text{ただし } s_0^2 &= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2
 \end{aligned}
 \tag{3.84}$$



式(3.72)、(3.83)、(3.84)より

$$\begin{aligned}
 s_1 &= s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \\
 s_2 &= s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \\
 s_3 &= s_0 \sin 2\chi
 \end{aligned}
 \tag{3.85}$$

$s_0$  : 光パワーに比例  
 $2\psi$  : 電界の長短軸の傾き (= 偏光子透過光パワー最大の角度)  
 $2\chi$  : 楕円率 (= 偏光子透過光パワー最大と最小の比の正接)

観測可能

# ポアンカレ球

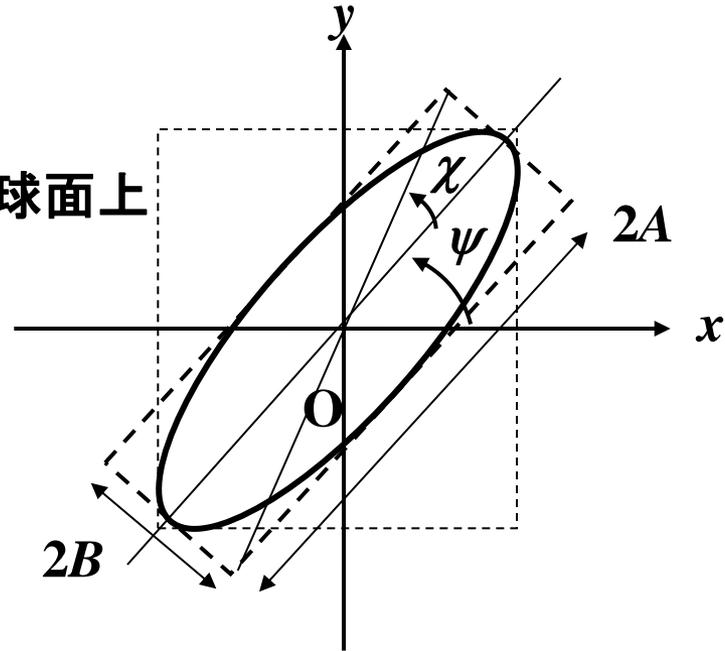
楕円の主軸が水平軸となす角  $\psi$  と

$|\chi| = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$  をパラメータとして球面上

に偏波状態を表す。

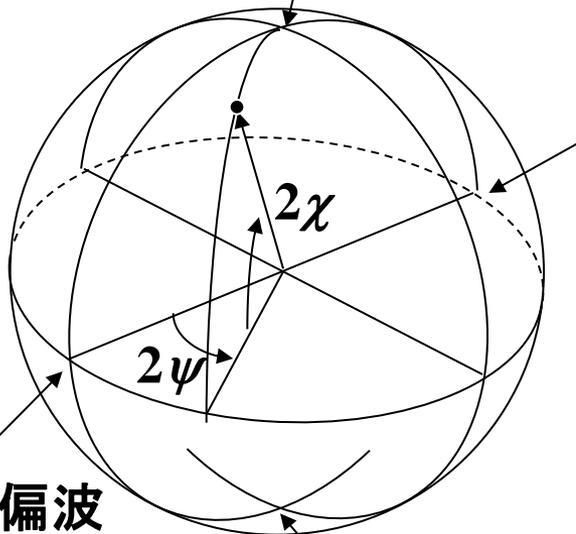
右回り円偏波

$$\chi = 45^\circ, \psi = \text{arb.}$$



垂直直線偏波

$$\chi = 90^\circ, \psi = 0^\circ$$



水平直線偏波

$$\chi = 0^\circ, \psi = 0^\circ$$

左回り円偏波  $\chi = -45^\circ, \psi = \text{arb.}$

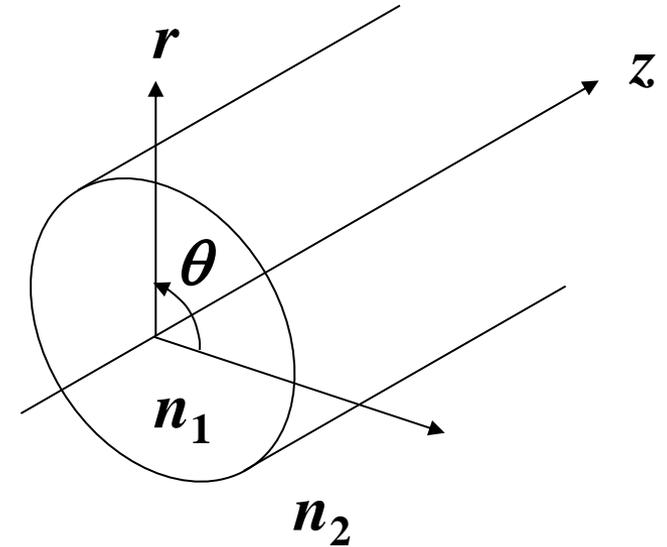
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

である。

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$



逆行列を求めると、

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \cos\theta \cdot \det \begin{bmatrix} r\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \sin\theta \cdot \det \begin{bmatrix} -r\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -r\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \end{aligned}$$

よって

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ z = z \end{cases}$$

またベクトルについては、

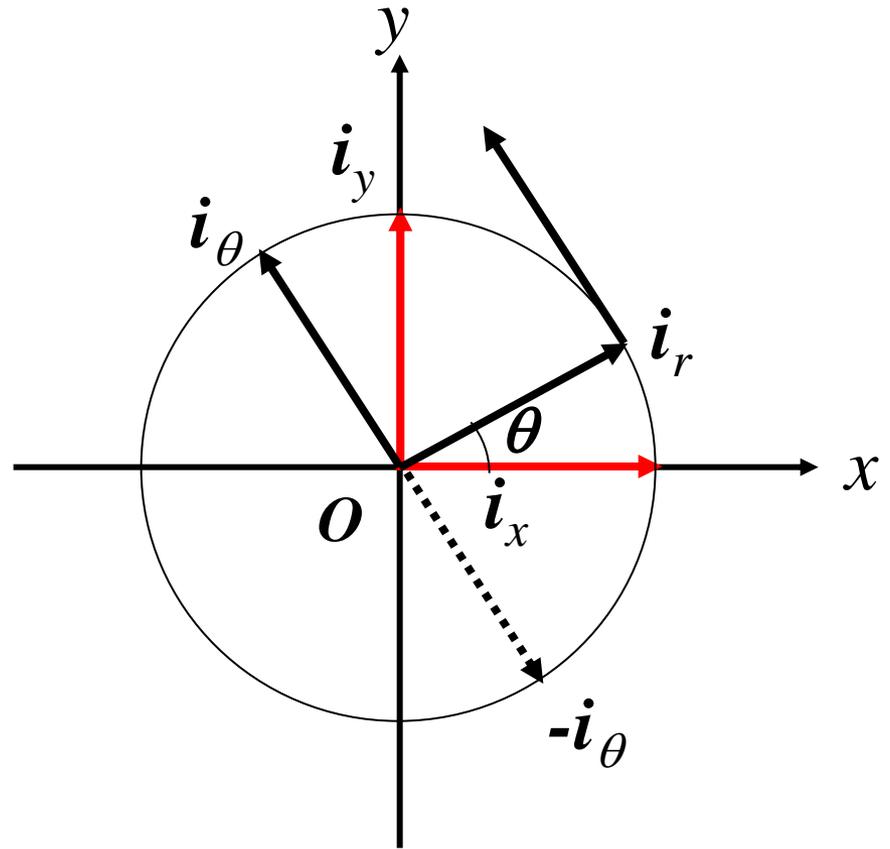
$$i_x = i_r \cos\theta - i_\theta \sin\theta$$

$$i_y = i_r \sin\theta + i_\theta \cos\theta$$

$$i_z = i_z$$

よって勾配 $\nabla$ の座標変換は以下の通りになる。

$$\begin{aligned}\nabla &= \frac{\partial}{\partial x} i_x + \frac{\partial}{\partial y} i_y + \frac{\partial}{\partial z} i_z \\ &= \left( \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (i_r \cos\theta - i_\theta \sin\theta) + \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (i_r \sin\theta + i_\theta \cos\theta) + \frac{\partial}{\partial z} i_z \\ &= \frac{\partial}{\partial r} i_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} i_\theta + \frac{\partial}{\partial z} i_z\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \nabla^2 &= \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \\
 &= \left( \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot \left( \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\
 &\quad + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
 &= \cos^2\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \cos\theta \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \sin^2\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\
 &\quad + \sin^2\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sin\theta \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cos^2\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \sin^2\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos^2\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

コアとクラッドの境界条件はそれぞれの領域での電界成分・磁界成分の接線成分が等しいことで立てる。

接線成分は $\theta$ ,  $z$ 成分の2成分存在するが、まず $z$ 方向について求めていく。

式(3.11)(3.12)をそれぞれ電界・磁界の $z$ 方向成分で記述すると以下のようになる。

$$\frac{\partial E_z^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial E_z^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial E_z^2}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 E_z = 0$$

$$\frac{\partial H_z^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial H_z^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial H_z^2}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 H_z = 0$$

界分布のz方向依存性を  $e^{-j\beta z}$  と仮定して、

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\beta^2$$

また

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

だから、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + (k_0^2 n_i^2 - \beta^2) E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + (k_0^2 n_i^2 - \beta^2) H_z = 0$$

よって式(3.45)が導出された。