

第11回

ビット誤り率(2)

2013年12月17日(火)

コヒーレント検波方式のBER

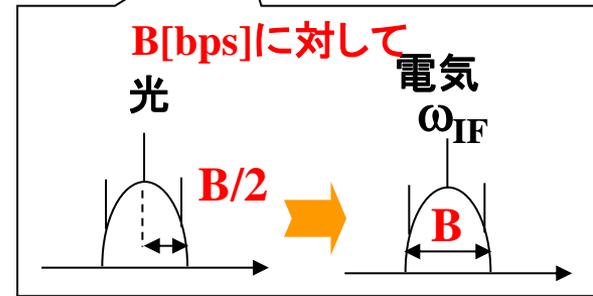
コヒーレント検波のBER特性(1)

中間周波数の受信器帯域が信号帯域の2倍

IM-DD

本章10ページ目より、

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2 = \sigma_{i_s}^2 + \sigma_{i_d}^2 + \sigma_{i_{th}}^2 = 2e \cdot e\eta i \left(\frac{P_s}{\hbar\omega} \right) B + 2e i_d B + \frac{4kTB}{R_L} \\ \sigma_0^2 = \sigma_{i_d}^2 + \sigma_{i_{th}}^2 \\ S_D = e\eta i \left(\frac{P_s}{\hbar\omega} \right) \end{array} \right. \quad (5.10)$$



コヒーレント検波

コヒーレント検波では局部発振光のショット雑音を加算される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{H_1}^2 = \sigma_{i_s}^2 + \sigma_{i_d}^2 + \sigma_{i_{th}}^2 + \sigma_{i_{LO}}^2 \cong \sigma_{i_{th}}^2 + \sigma_{i_{LO}}^2 \\ \sigma_{H_0}^2 = \sigma_{i_d}^2 + \sigma_{i_{th}}^2 + \sigma_{i_{LO}}^2 \cong \sigma_{i_{th}}^2 + \sigma_{i_{LO}}^2 \\ \sigma_{i_{LO}}^2 = 2e \cdot e\eta i \left(\frac{P_{LO}}{\hbar\omega} \right) B \end{array} \right. \quad (5.11)$$

ヘテロダイン検波方式の中間周波電流 S_H を導出する。

$$\begin{cases} E_s(t) = \sqrt{2P_s} \cos \omega_s t \\ E_{LO}(t) = \sqrt{2P_{LO}} \cos \omega_{LO} t \end{cases}$$

とすると、

$$P_{tot}(t) = [E_s(t) + E_{LO}(t)]^{ms}$$

$$i(t) = e\eta i \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right) P_{tot}(t) = e\eta i \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right) [\sqrt{2P_s} \cos \omega_s t + \sqrt{2P_{LO}} \cos \omega_{LO} t]^{ms}$$

$$= e\eta i \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right) [\operatorname{Re}\{\sqrt{2P_s} \exp(j\omega_s t) + \sqrt{2P_{LO}} \exp(j\omega_{LO} t)\}]^{ms}$$

$$= e\eta i \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right) [\operatorname{Re}\{\exp(j\omega_{LO} t)\} \{\sqrt{2P_s} \exp(j(\omega_s - \omega_{LO})t) + \sqrt{2P_{LO}}\}]^{ms}$$

$$= e\eta i \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \left| \sqrt{2P_s} \exp(j\omega_{IF} t) + \sqrt{2P_{LO}} \right|^2 \quad (\omega_{IF} = \omega_s - \omega_{LO})$$

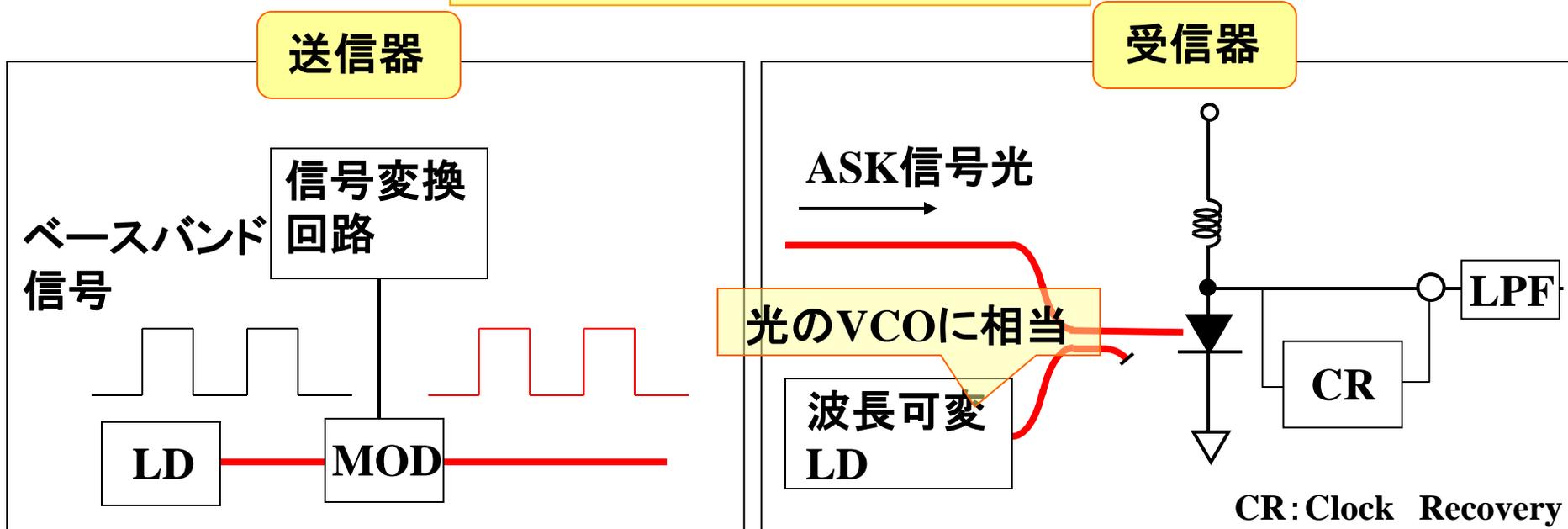
$$= e\eta i \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right) [P_s + P_{LO} + 2\sqrt{P_s P_{LO}} \cos \omega_{IF} t] \quad (5.12)$$

$$S_H = 2\left(\frac{e\eta_i}{\hbar\omega}\right)\sqrt{P_s P_{LO}} \quad (5.13)$$

$$\therefore SNR = \frac{[S_H]}{\sigma_H^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)S_H^2}{\left(\frac{\sigma_{H1} + \sigma_{H0}}{2}\right)^2} \quad (5.14)$$

ASKのBER(1)

ASKヘテロダイン同期検波方式



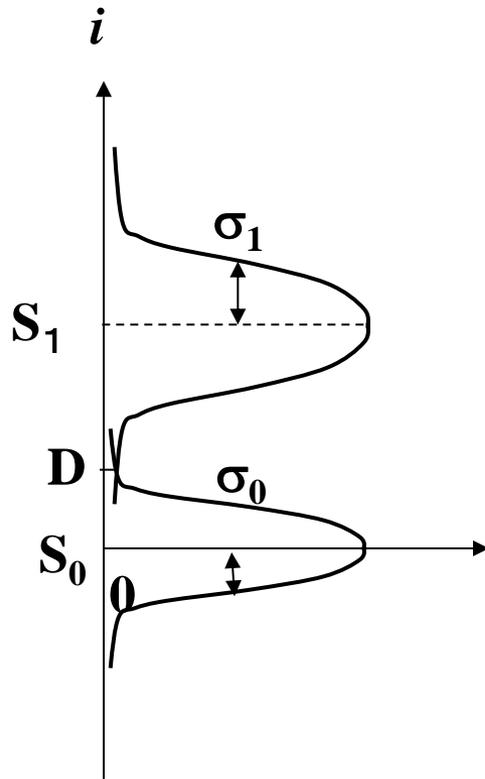
本章式(5.1)、(5.2)になぞらえて、

$$\begin{aligned}
 BER &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{S_H - D_{opt}}{\sqrt{2}\sigma_H} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{D_{opt}}{\sqrt{2}\sigma_H} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{S_H}{2\sqrt{2}\sigma_H} \right) \quad (D_{opt} = S_H/2 : \text{最適閾値レベル}, \sigma_H = \sigma_{H1} = \sigma_{H0}) \\
 &\quad (5.15)
 \end{aligned}$$

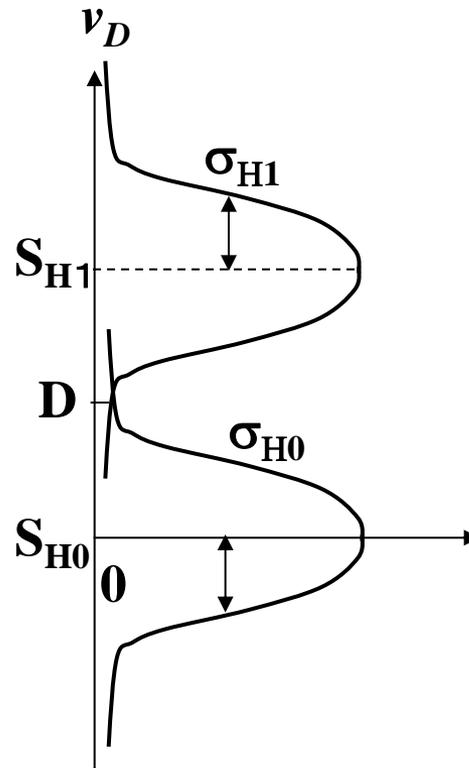
ASKのBER (2)

ASKヘテロダイン包絡線検波方式

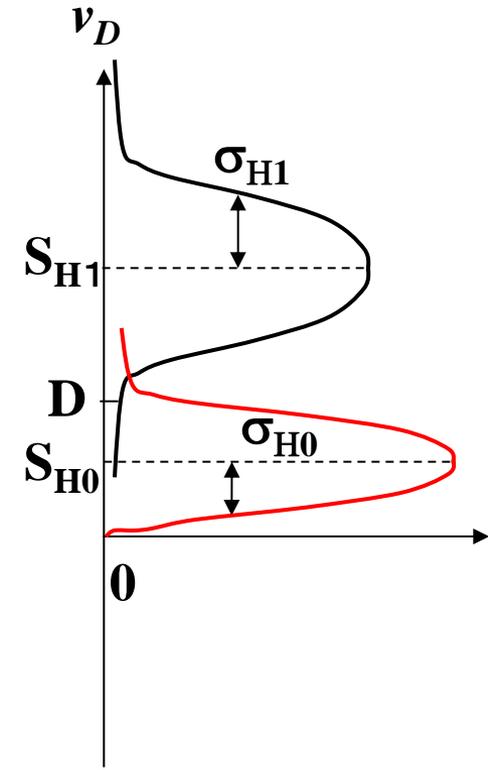
IM-DD方式



ASKヘテロダイン 同期検波方式



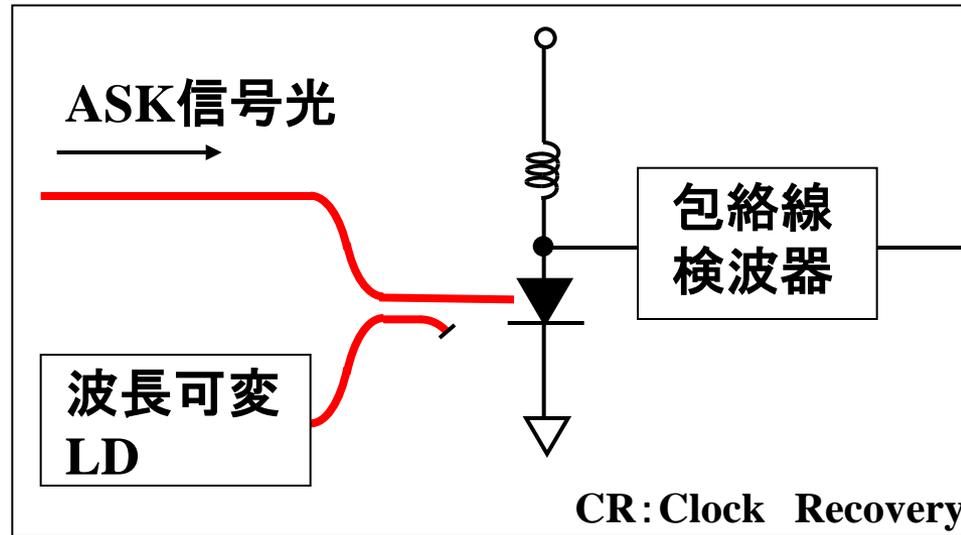
ASKヘテロダイン 包絡線検波方式



ASKのBER (3)

ASKヘテロダイン包絡線検波方式

受信器



包絡線検波方式の出力の確立密度関数はライス分布に従う
(I_0 は0次の第1種変形ベッセル関数)。

$$BER = \frac{1}{2} \left[1 - \int_D^\infty \frac{r_1}{\sigma_{H1}^2} I_0 \left(\frac{S_H r_1}{\sigma_{H1}^2} \right) \exp \left(-\frac{r_1^2 + S_H^2}{2\sigma_{H1}^2} \right) dr_1 \right] + \frac{1}{2} \left[\int_D^\infty \frac{r_0}{\sigma_{H0}^2} \exp \left(-\frac{r_0^2}{2\sigma_{H0}^2} \right) dr_0 \right]$$

ASKヘテロダイン包絡線検波方式

ただし、 x_1, x_0, y_1, y_0 はそれぞれマーク時、スペース時の両直交雑音成分であり、添字1, 0はそれぞれマーク、スペースを表す。

$$r_1 = \sqrt{(x_1 + S_H)^2 + y_1^2}$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$\overline{x_1^2} = \overline{y_1^2} = \sigma_{H1}^2$$

$$\overline{x_0^2} = \overline{y_0^2} = \sigma_{H0}^2$$

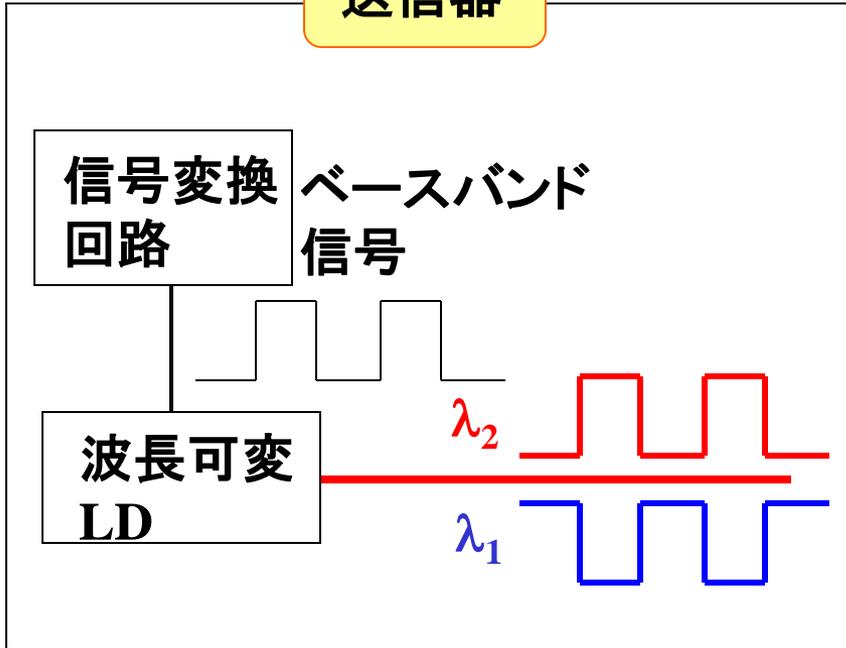
以下の変形は参考書(『コヒーレント光通信工学』(大越, 菊池著, オーム社))に任せるが、BERは以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} BER &= \frac{1}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{S_H}{2\sqrt{2}\sigma_H}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{S_H^2}{8\sigma_H^2}\right) \\ &\cong \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{S_H^2}{8\sigma_H^2}\right) \end{aligned}$$

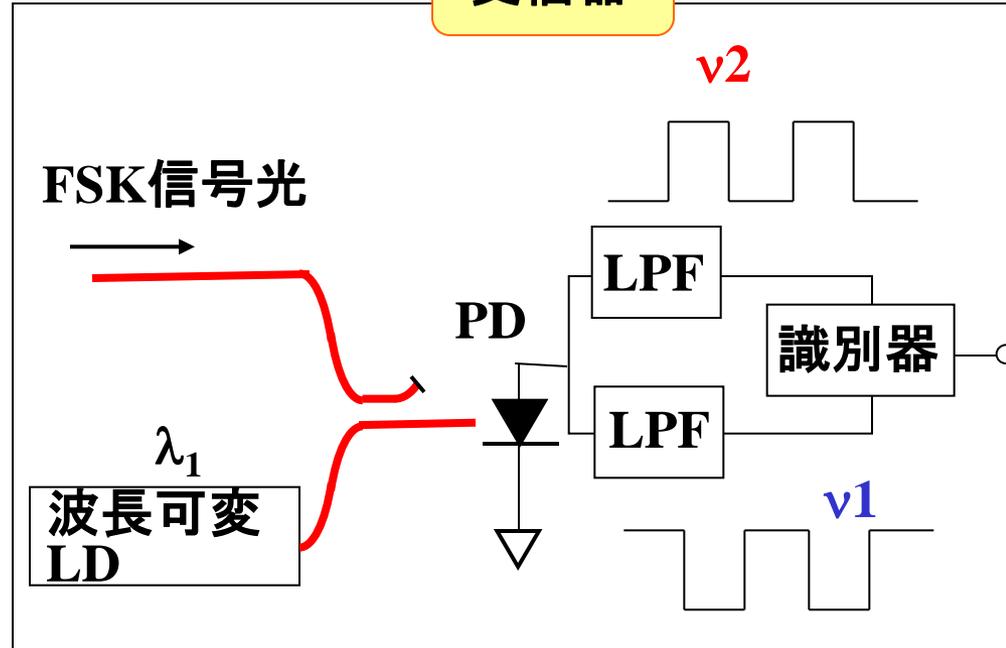
FSKのBER(1)

FSKヘテロダイン同期検波方式

送信器



受信器



受信器1の出力v1の確率密度関数は、

$$p(v_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{H1}} \exp\left(-\frac{(S_H - v_1)^2}{2\sigma_{H1}^2}\right)$$

受信器2の出力v2の確率密度関数は、

$$p(v_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{H0}} \exp\left(-\frac{v_2^2}{2\sigma_{H0}^2}\right)$$

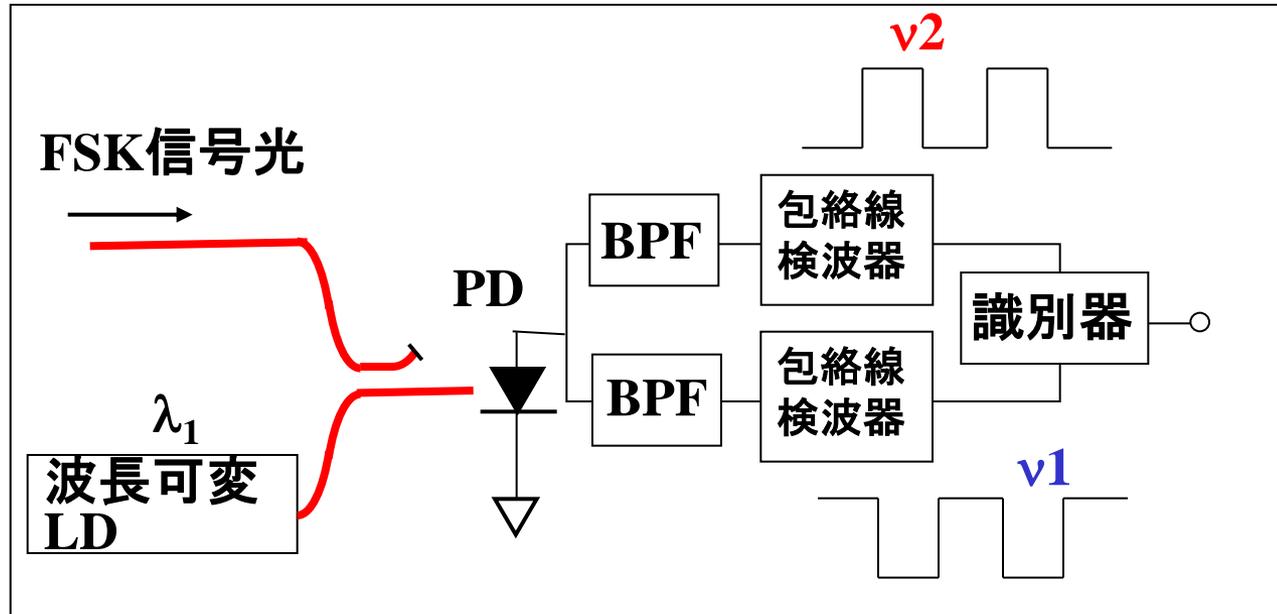
$$BER = Prob(v_1 - v_2 < 0)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{S_H}{2\sigma_H}\right) \quad (5.16)$$

FSKのBER(2)

FSKヘテロダイン包絡線検波方式

受信器



波長 λ_1, λ_2 の受信器出力の確率密度関数は、ASKヘテロダイン包絡線検波方式と同様に以下のライス分布で表される。

$$p(r_1) = \frac{r_1}{\sigma_{H1}^2} I_0 \left(\frac{S_H r_1}{\sigma_{H1}^2} \right) \exp \left(-\frac{r_1^2 + S_H^2}{2\sigma_{H1}^2} \right)$$

$$p(r_2) = \frac{r_0}{\sigma_{H0}^2} \exp \left(-\frac{r_0^2}{2\sigma_{H0}^2} \right)$$

FSKのBER(3)

FSKヘテロダイン包絡線検波方式

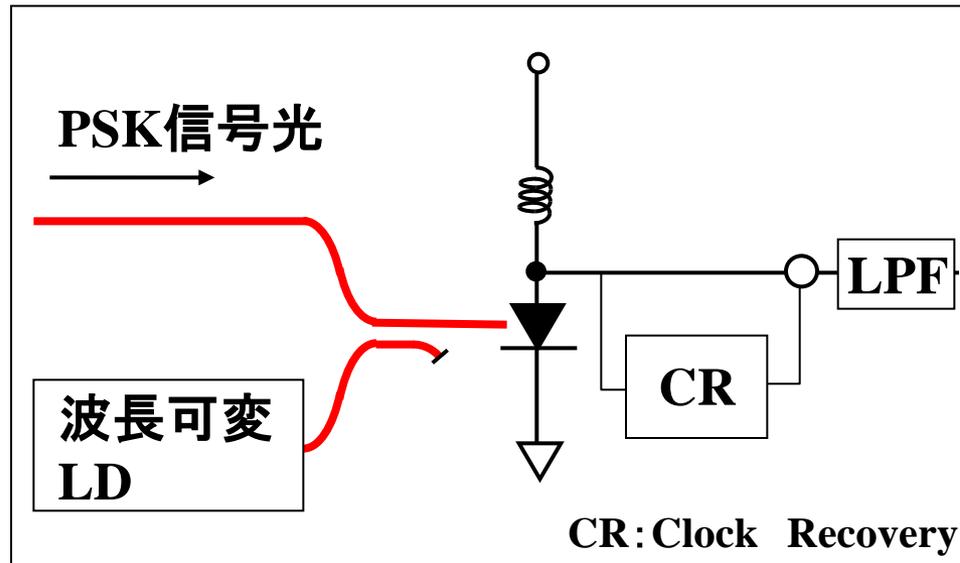
よって、

$$\begin{aligned} \text{BER} &= \text{Prob}(r_2 > r_1) \\ &= \int_{r_1=0}^{\infty} p(r_1) \left[\int_{r_2=r_1}^{\infty} p(r_2) dr_2 \right] dr_1 \\ &\cong \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{S_H^2}{4\sigma_H^2}\right) \end{aligned}$$

PSKのBER(1)

PSKヘテロダイン同期検波方式

受信器

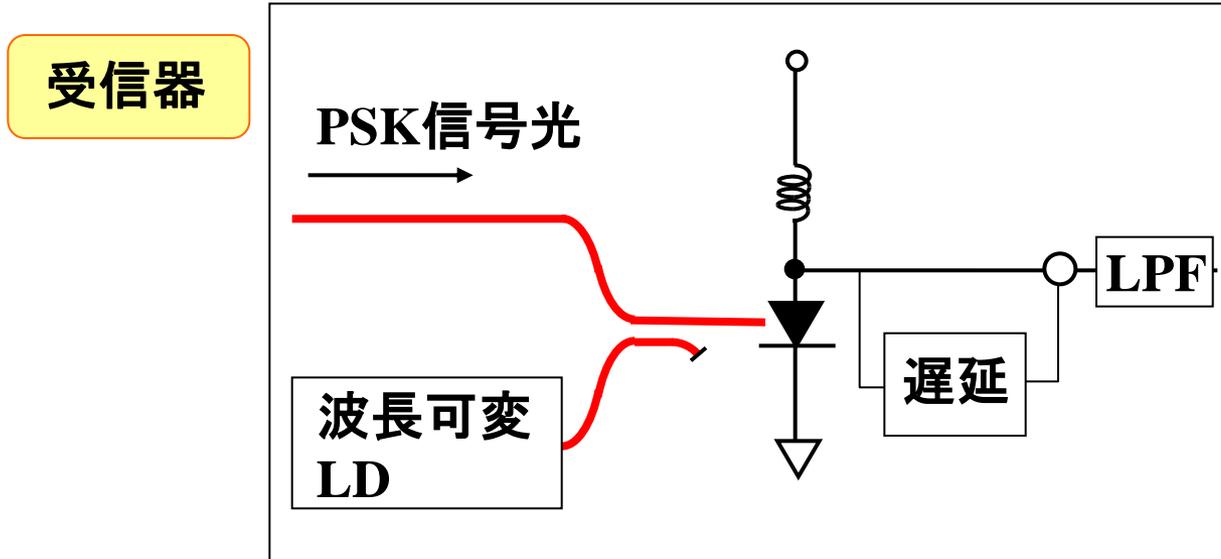


$D_{opt}=0$ より以下の式を得る。

$$BER = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_H}} \exp\left\{-\frac{(S_H - v_1)^2}{2\sigma_H^2}\right\} dv_1 + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_H}} \exp\left\{-\frac{(-S_H - v_2)^2}{2\sigma_H^2}\right\} dv_2$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{S_H}{\sqrt{2}\sigma_H}\right)$$

PSKのBER(2)

PSKヘテロダイン差動同期検波方式(DPSK)

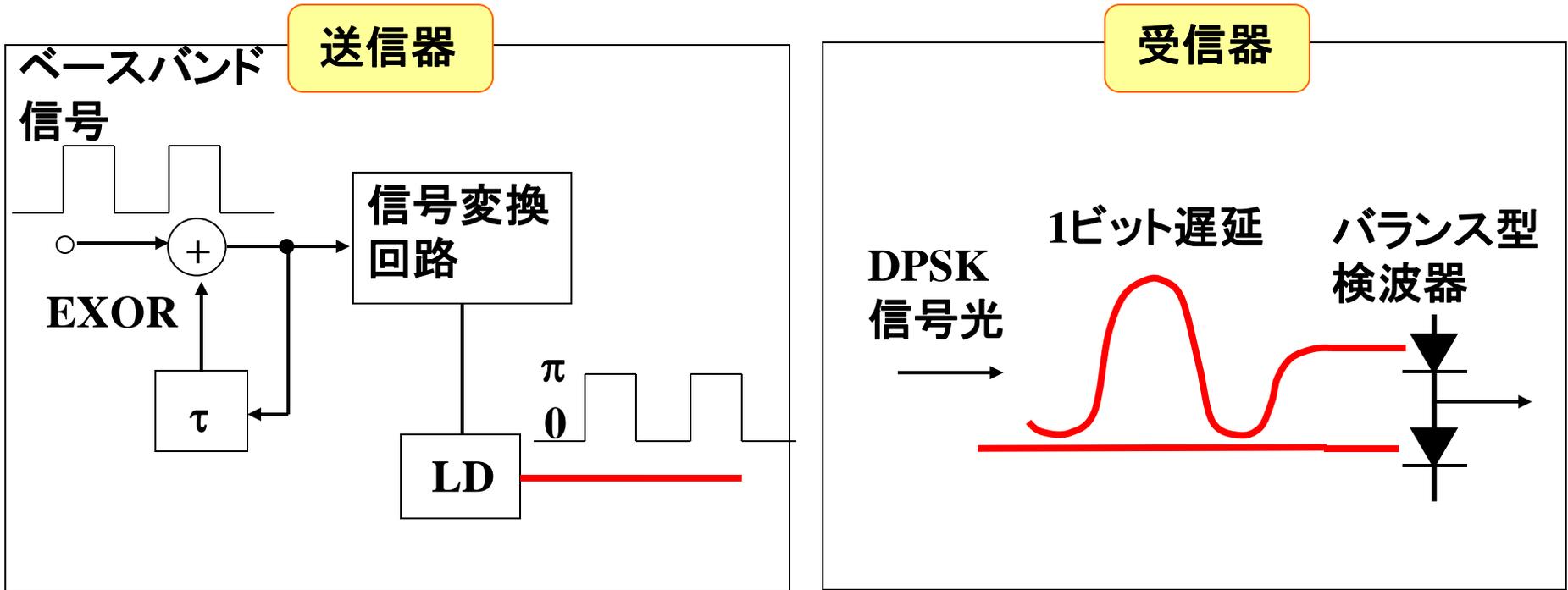


$$BER \cong \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{S_H^2}{\sigma_H^2}\right) \quad (5.17)$$

参考文献: S. Stein, and J. Jones, "Modern Communication Principles", McGraws Hill (1965).

PSKのBER(3)

光DPSK送受信方式



ホモダイン受信器の性能

- ホモダイン受信器: ベースバンド受信器
cf. ヘテロダイン方式: 中間周波増幅器

➡ ホモダイン受信器の増幅器帯域
= ヘテロダイン受信器の増幅器帯域 $\times 1/2$

➡ 雑音パワーが半分

$$\sigma'^2 = \frac{1}{2} \sigma_H^2$$

➡ 同じSN比に対して受信感度が半分(3dB改善)になる。

各種変復調方式の理論BER

光検波方式	変調方式	非同期検波方式	同期検波方式
直接検波 (IM-DD)	NRZ	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{S_D}{\sigma_1 + \sigma_0} \right)$	—————
ヘテロダイン	ASK	包絡線 $\frac{1}{2} \exp \left(-\frac{S_H^2}{8\sigma_H^2} \right)$ \equiv	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{S_H}{\sigma_H} \right)$
	FSK	包絡線 $\frac{1}{2} \exp \left(-\frac{S_H^2}{4\sigma_H^2} \right)$ \equiv	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{S_H}{\sigma_H} \right)$
	PSK	DPSK $\frac{1}{2} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{S_H^2}{\sigma_H^2} \right)$ \equiv	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{S_H}{\sigma_H} \right)$
↓ 3dB改善 ホモダイン	ASK	—————	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{S_H}{\sigma'} \right)$
	PSK	—————	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{S_H}{\sigma'} \right)$

$$\sigma'^2 = \frac{1}{2} \sigma_H^2$$

IM-DD方式のSNRについては、shot雑音限界を考える。

$$SNR = 4 \left(\eta_i \frac{P_s}{\hbar\omega} \frac{1}{B} \right) = 4\eta_i N_p \quad (N_p : 1\text{ビットあたりの光子数})$$

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{4\eta_i N_p}}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\eta_i N_p}{2}} \right)$$

コヒーレント方式については、式(5.11), (5.13), (5.14)より、

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{1}{2} \frac{S_H^2}{\sigma_H^2} = \frac{1}{2} \frac{4 \left(\frac{e\eta_i}{\hbar\omega} \right)^2 P_s P_{LO}}{2e \cdot e\eta_i \left(\frac{P_{LO}}{\hbar\omega} \right) B} \\ &= \eta_i \frac{P_s}{\hbar\omega} \frac{1}{B} = \eta_i N_p \end{aligned}$$

光子数での最小受信感度の比較(2)

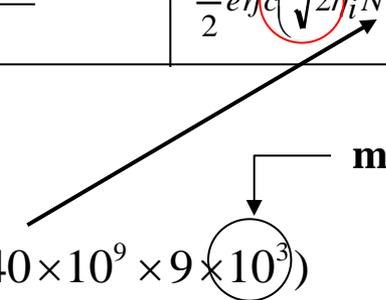
光検波方式	変調方式	受信感度 @ BER=10 ⁻⁹ [photon/bit]	
		非同期検波方式	同期検波方式
直接検波 (IM-DD)	NRZ	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\eta_i N_p}{2}} \right) = 36$	—————
ヘテロダイン	ASK	$\frac{1}{2} \exp \left(-\frac{\eta_i N_p}{4} \right) = 80$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\eta_i N_p}}{2} \right) = 72$
	FSK	$\frac{1}{2} \exp \left(-\frac{\eta_i N_p}{2} \right) = 40$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\eta_i N_p}{2}} \right) = 36$
	PSK	$\frac{1}{2} \exp(-\eta_i N_p) = 20$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\eta_i N_p} \right) = 18$
ホモダイン	ASK	—————	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\eta_i N_p}{2}} \right) = 36$
	PSK	—————	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{2\eta_i N_p} \right) = 9$

$$10 \log \left[\left\{ \left(\frac{hc}{\lambda} \cdot B \right) \cdot N \right\} \times 10^{-3} \right]$$

$$= 10 \log \left(\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.55 \times 10^{-6}} \times 40 \times 10^9 \times 9 \times 10^3 \right)$$

$$= -43.4 \text{ dBm @ } 40 \text{ Gbps}$$

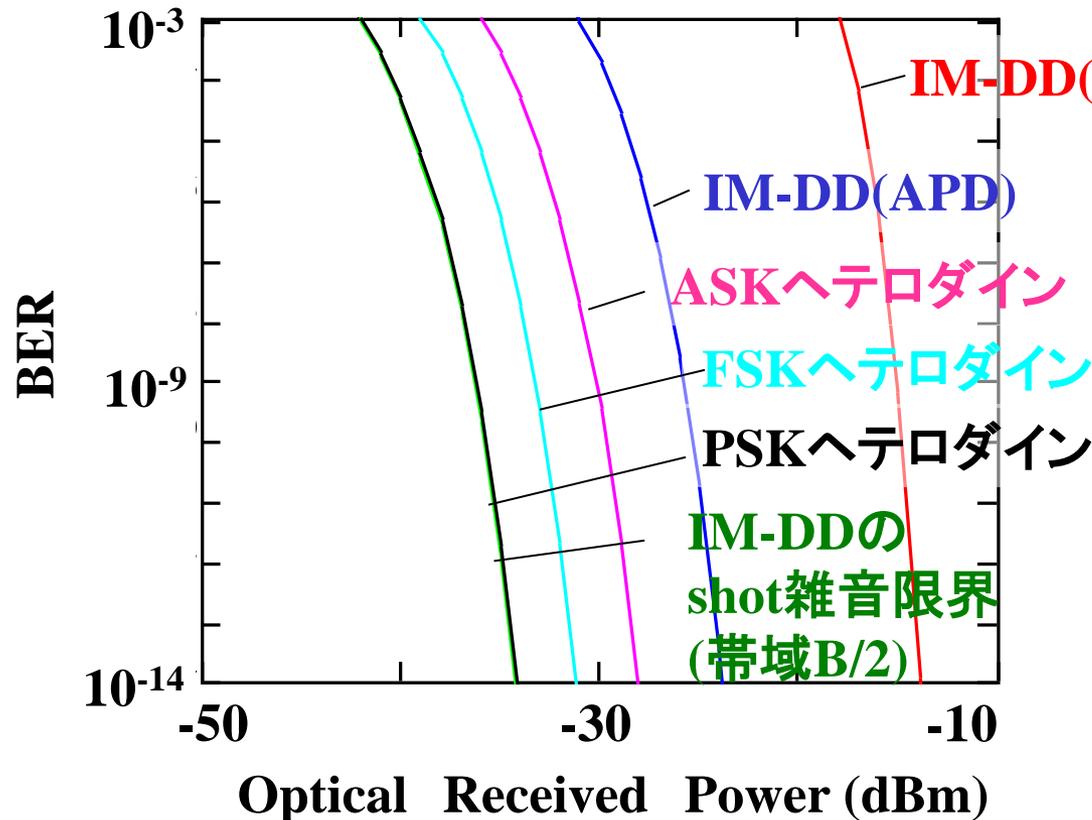
mW単位



各種変復調方式のBER計算結果

- ・コヒーレント検波方式はIM-DD(pin-PD)より20~25dBの受信感度改善
 - ・PSKはshot雑音限界に近い受信感度が可能
- ⇒ 高強度の局部発振光による信号レベルの改善が主に寄与

40Gbps NRZ, $P_{LO}=0\text{dBm}$, 300K, $\eta_i=0.8$



※ホモダインでは
3dB感度改善

※横軸をピークパワー
で示しているの
ので、平均
パワーに
変えると
マーク率
1/2のIM-DD,
ASKは3dB
低くなる。
結果、ASK
ヘテロダ
インとFSK
ヘテロダ
インは一
致する。

受信感度の向上を目的とした光コヒーレント検波技術であるが、以下の技術的困難を伴う。

- ① 局部発振LDの波長を信号光の搬送波波長に正確に合わせる必要がある。
- ② 局部発振LDの発振線幅を狭くしないといけない($< 1\text{MHz}$)。
(位相雑音の原因)
- ③ 局部発振LDと信号光の位相を正確に合わせないといけない。
- ④ 局部発振LDと信号光の偏波を正確に合わせないといけない。



デジタル信号処理の発展と信号帯域の広帯域化によって、
実用レベルに達した(第2章)。

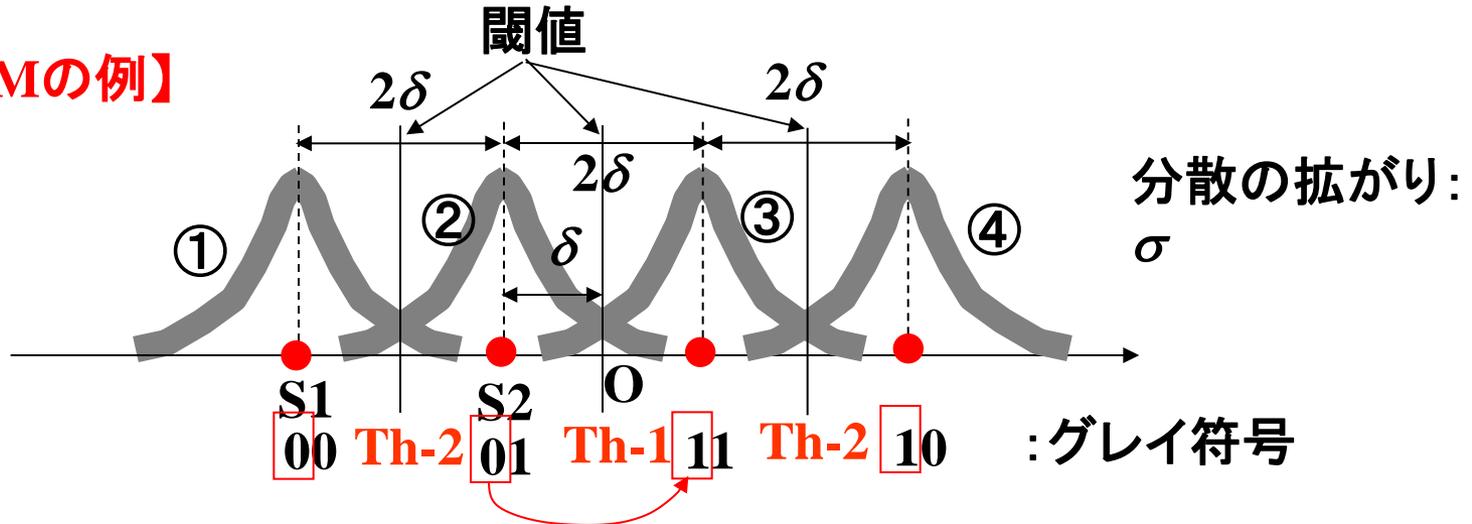
多値変調のBER

多値変調のSNRペナルティ(原理)(1)

受信信号に熱雑音のみが付加されている場合を参考:

I・Q信号は独立と見なせ、1次元信号のみによってBERを導出。

【16QAMの例】



※原点対象のためS1、S2の信号のみを考慮して導出

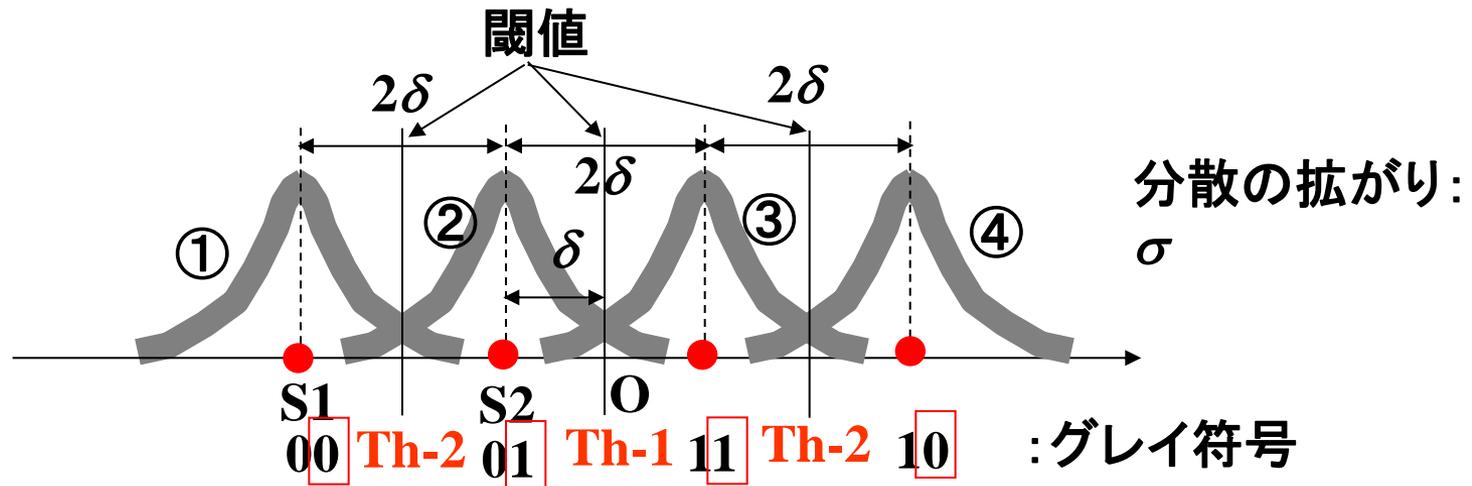
上位ビットの
誤り確率:

$$P_{e1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(x+\delta)}{2\sigma^2}\right\} dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(x+3\delta)}{2\sigma^2}\right\} dx$$

$\xrightarrow{\text{②がTh-1を超える誤り率}}$
 $\xrightarrow{\text{①がTh-1を超える誤り率}}$

Th-1を超えるとときに誤りになる

多値変調のSNRペナルティ(原理)(2)



下位ビットの
誤り確率:

$$P_{e2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-2\delta}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x+3\delta)}{2\sigma^2}\right\} dx \rightarrow \text{①がTh-2 (-2}\delta\text{) 超える誤り率}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[\int_{-\infty}^{-2\delta} \exp\left\{-\frac{(x+\delta)}{2\sigma^2}\right\} dx + \int_{2\delta}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x+\delta)}{2\sigma^2}\right\} dx \right]$$

$$\approx \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\gamma_{CNR}}{10}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{②がTh-2(-2}\delta\text{)を} \\ \text{下回る誤り率} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{②がTh-2(2}\delta\text{)} \\ \text{を超える誤り率} \end{array}$$

全
誤り確率:

$$\therefore P_{e,16QAM} = \frac{1}{2} (P_{e1} + P_{e2}) \approx \frac{3}{8} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\gamma_{CNR}}{10}} \quad \left(\gamma_{CNR} = \frac{5\delta^2}{\sigma^2} \right) \quad \text{(16QAMの平均CNR)}$$

多値変調のSNRペナルティ(数値)

$$P_{e,BPSK} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\gamma_{SNR}}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\gamma_{CNR}}$$

$$P_{e,QPSK} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\gamma_{CNR}}{2}}$$

$$P_{e,64QAM} \approx \frac{7}{24} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\gamma_{CNR}}{42}} \quad (\gamma_{CNR} = \frac{21\delta^2}{\sigma^2})$$

$$P_{e,256QAM} \approx \frac{15}{64} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\gamma_{CNR}}{170}} \quad (\gamma_{CNR} = \frac{85\delta^2}{\sigma^2})$$

$$E_b/N_0 = CNR - 10 \log k + 10 \log(B_n T) \quad [dB]$$

k: 1シンボル当たり情報量(ビット)

