専門科目：自然と環境　**科目名：4 次元の不思議**

日程 実施期間

時限	10 月 20 日 (日) 時間	回	授業テーマ
1	10:00-11:25	1	三角錐とその高次元化,
2	11:40-13:05	2	立方体とその高次元化,
3	14:10-15:35	3	正八面体と その高次元化,
4	15:50-17:15	4	４次元の対称性

時限	10 月 27 日 (日) 時間	回	授業テーマ
1	10:00-11:25	5	ポアンカレ予想
2	11:40-13:05	6	可微分構造
3	14:10-15:35	7	アニュラス予想と シェンフリース予想
4	15:50-17:15	8	その他の未解決問題

教科書, 参考書など

○ 日本評論社「大学院入試問題から学ぶシリーズ 微分積分」ISBN 978-4-535-78603-5,

○ 現代数学社「現代数学」ISSN 2187-6495 に連載中の記事「現代数学 Select ４次元から見た現代数学」

授業概要 (シラバス)　４次元の図形には, ３次元以下の図形や５次元以上の図形とはことなる様々な性質があります. 例えば, 正多面体は３次元では５つ, ５次元以上では, ３つしかありませんが, ４次元では６つもあります. また４次元だけユークリッド空間（普通の空間）に微分構造が無限個あります. 他の次元では１つしかありません. こうした不思議な現象とその原因を説明します.

学生へのメッセージ

現在研究されている数学についてのお話を中心としますので, 予備知識は特に必要ありません.

成績評価　成績評価は出席状況のほか, レポートの評点により行います.

以下の問題に対するレポートを 10 月 27 日 (日)13 時 05 分までに提出してください.

レポート問題

1　p を 5 以上の素数とし, $S = \{1, 2, 3, \cdots, p-1\}$ とおく. 整数 a, b を p で割った余りが等しいことを $a \equiv b \pmod p$ と表記する. $k \in S$ に対して, $k\ell \equiv 1 \pmod p$ を満たす $\ell \in S$ を k^{-1} と書くことにする. このとき, $1^{-1}, 2^{-1}, 3^{-1}, \cdots, (p-1)^{-1}$ の $p-1$ 個の数の集合は S に一致する.

(1)　$k \in S$ のとき, $\dfrac{(p-1)!}{k(p-k)} \equiv -(p-1)!k^{-2} \pmod p$ となることを示せ.

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$ を通分したときの分子 $(p-1)!\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$ が p^2 で割りきれることを示せ.

現代数学社「現代数学」2013 年 11 月号「Dr.Hongo の数理科学ゼミ」第 *147* 問より

2　ジョーカーを除く 52 枚のトランプから 1 枚を抜いては戻すことを繰り返す. 出た数字の和を記録し, 和が 13 を超えたら終了する. ただし, A は 1, J は 11, Q は 12, K は 13 とみなす.

例えば, 3, A, 4, A, 5 と出た場合, 記録される数字は, 3, 4, 8, 9 となり, 5 回目は和が 14 となるので終了する.　記録された数の中に n が存在する確率　p_n　$(n = 1, 2, 3, \cdots, 13)$ を求めよ.

現代数学社「現代数学」2013 年 12 月号「Dr.Hongo の数理科学ゼミ」第 *148* 問より

3　旅人が, 本当のことしか言わない正直族とウソのことしか言わないウソツキ族の 2 つの種族が住んでいる村にやってきた. 次の問いに答えなさい.

(1)　5 人の村人が集まっていて, それぞれが以下のように言った.

村人 A「私たちのうちの 1 人だけがウソツキ族だ.」　村人 B「私たちのうちの 2 人がウソツキ族だ.」

村人 C「私たちのうちの 3 人がウソツキ族だ.」　村人 D「私たちのうちの 4 人がウソツキ族だ.」

村人 E「私たち全員がウソツキ族だ. 」

村人 A〜村人 E のそれぞれについて正直族かウソツキ族か判断しなさい. その理由も書きなさい.

(2)　別の 2 人の村人に会った. 2 人に「あなたたちは同じ種族ですか？」と聞いた. それぞれの答えで, 2 人のそれぞれの種族がわかるという. その理由を説明せよ.　**2013 年度 東大工学系大学院入試より**

4　授業で指定された問題や, 授業でやらなかったプリントの問題を５〜６問解いて出して下さい.

第１章 整数と 4 次元

どんな非負整数 n も 4 つの平方数の和で書ける．つまり, $n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ には整数解がある (ラグランジュの定理)．このことを考察する．

(1)　$0 \leqq n \leqq 24$ で実験せよ．

(2)　次の証明を理解せよ．

> **定理**　4 で割って 1 余る正の素数 p は 2 つの平方数の和で書ける．

証明 (1990 年ザギエ)

自然数の 3 つ組の有限集合 $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + 4yz = p\}$ 上の写像 f を次で定める．

(ア)　$x < y - z$ のとき $f(x, y, z) = (x + 2z, z, y - x - z)$.

(イ)　$y - z < x < 2y$ のとき $f(x, y, z) = (2y - x, y, x - y + z)$.

(ウ)　$2y < x$ のとき $f(x, y, z) = (x - 2y, x - y + z, y)$.

f を 2 回繰り返すと元に戻る．$f(x, y, z) = (x, y, z)$ となる (x, y, z) は $p = 4n + 1$ とおくと, $(1, 1, n)$ のみ．よって, S の元の個数は奇数．S 上の写像 g を $g(x, y, z) = (x, z, y)$ で定めると, g を 2 回繰り返すと元に戻る．$g(x, y, z) = (x, y, z)$ となる (x, y, z) は存在し, (x, y, y) の形のものなので,

$x^2 + 4y^2 = p \Longleftrightarrow x^2 + (2y)^2 = p.$　　(証明終わり)

(3)　$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$ を示せ．

(4)　n が 2^k(4 で割って 1 余る素数の積)(4 で割って 3 余る素数の積)^2 の形に素因数分解できるなら, n は 2 つの平方数の和で書けることを示せ．

実は, 逆も言える．

(5)　n が 2^{2k}(8 で割って 7 余る正の整数) の形なら, n は 3 つの平方数の和で書け**ない**ことを示せ．

実は, 逆も言える．

(6)　任意の奇素数 p は 4 つの平方数の和でかける．これと, 等式

$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$

$= (ax + by + cz + dw)^2 + (ay - bx + cw - dz)^2 + (az - bw - cx + dy)^2 + (aw + bz - cy - dx)^2$ から, すべての非負整数 n は 4 つの平方数の和でかけることを示せ．

第２章 複素数と四元数

(7)　a, b を実数 $i = \sqrt{-1}$ とおく．

- $z = a + bi$ の形の数を複素数,
- $\overline{z} = a - bi$ を z の共役複素数,
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ を z の絶対値という．

次の 3 つを示せ．　(ア)　$|z|^2 = z\overline{z}$,　(イ)　$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,　(ウ)　$|zw| = |z||w|$.

(8)　α, β を複素数 $j^2 = -1$ とする．

$h = \alpha + \beta j$ の形の数をハミルトンの四元数という．$\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $ij = k$ とおくと, $h = a + bi + cj + dk$ とおける．積は $j\beta = \overline{\beta}j$ で定める．つまり, $ji = -ij$ となる．よって, $kj = -jk$, $ik = -ki$, $k^2 = -1$ などが成り立つ．

- $\overline{h} = \overline{\alpha} - \beta j = a - bi - cj - dk$ を h の共役四元数,
- $|h| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ を h の絶対値という．

次の 3 つを示せ．　(エ)　$|h|^2 = h\overline{h}$,　(オ)　$\overline{h_1 h_2} = \overline{h_2}\,\overline{h_1}$,　(カ)　$|h_1 h_2| = |h_1||h_2|$.

第３章 3 次元の正多面体

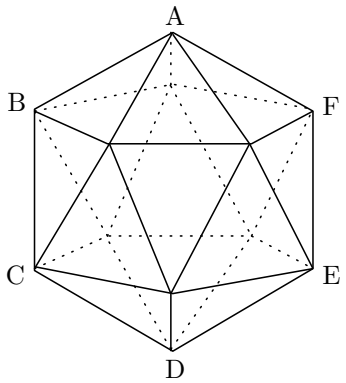
(9)　頂点の個数を f_0 個, 辺の本数を f_1 本, 面の枚数を f_2 枚, 立体の個数を f_3 個とする.
2 次元のとき.　a を 3 以上の整数とすると次の表ができる.

	f_0	f_1	f_2
正 a 角形	a	a	1

3 次元のとき.　正多面体には 5 種類ある. その各面の個数は次の表のようになる.

	f_0	f_1	f_2	f_3
正四面体	4	6	4	1
立方体	8	12	6	1
正八面体	6	12	8	1
正十二面体	20	32	12	1
正二十面体	12	32	20	1

一辺の長さが 2 の正 20 面体は, xyz 空間の中で, 12 個の頂点を, 複号任意として, $\left(0, \pm 1, \pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\pm 1, \pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$, $\left(\pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, \pm 1\right)$　とおくことによって実現できる. この正 20 面体の, ある面を含む平面への正射影の外周は正六角形になる. その 1 辺の長さ AB を求めよ.



例えば, $\mathrm{A}\left(0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$, $\mathrm{B}\left(-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 1, 0\right)$, $\mathrm{C}\left(-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, -1, 0\right)$, $\mathrm{D}\left(0, -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, -1\right)$, $\mathrm{E}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, -1, 0\right)$, $\mathrm{F}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 1, 0\right)$ の場合, 手前の正三角形の座標は, $\left(1, 0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(-1, 0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(0, -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, -1\right)$ となる. この三角形を含む面の式は, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}y + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}z = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ で, 単位法線ベクトル $\vec{n}$ は $\vec{n} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1-\sqrt{5} \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$. これを用いて計算すると, 答えは $\dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ となる.

第 4 章 4 次元の正多面体

(10)

頂点の個数を f_0 個, 辺の本数を f_1 本, 面の枚数を f_2 枚, 立体の個数を f_3 個, 4 次元の立体の個数を f_4 個とする.

4 次元のとき.

4 次元の正多面体には 6 種類ある. その各面の個数は下の表のようになる.

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4
正五胞体	5	10	10	5	1
超立方体	16	32	24	8	1
正十六胞体	8	24	32	16	1
正二十四胞体	24	96	96	24	1
正百二十胞体	600	1200	720	120	1
正六百胞体	120	720	1200	600	1

正二十四胞体は, $(\pm1, \pm1, \pm1, \pm1)$ の 16 個の頂点と,
$(\pm2, 0, 0, 0), (0, \pm2, 0, 0), (0, 0, \pm2, 0), (0, 0, 0, \pm2)$ の 8 個の頂点を適切に結ぶことによって構成される.

これと同様の, 正五胞体, 正八胞体, 正十六胞体の具体的な構成法を見つけよ.

(11)

5 次元以上のとき.

$n \geqq 5$ のとき, n 次元の正多面体には 3 種類ある. その k 次元の面の個数を f_k 個とすると, 以下の表のようになる.

	f_0	f_1	$\cdots$	f_k	$\cdots$	f_{n-1}	f_n
正 $n+1$ 胞体	$n+1$	$\dfrac{(n+1)n}{2}$	$\cdots$	${}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$	$\cdots$	$n+1$	1
超立方体	2^n	$n2^{n-1}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_k 2^{n-k}$	$\cdots$	$2n$	1
正 2^n 胞体	$2n$	$2n(n-1)$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_{k+1} 2^{k+1}$	$\cdots$	2^n	1

これらを確認せよ.

専門科目：自然と環境　**科目名：4 次元の不思議**

問 1　座標がすべて整数の点を格子点という. 格子点を頂点に持つ正五角形はあるか. 正七角形は？

問 2　格子点を頂点に持つ正八角形はあるか.

問 3　格子点を頂点に持つ正十二面体, 正二十面体はあるか.

問 4　正多面体が五種類しかないことを示せ.

問 5　格子点を頂点に持つ正百二十胞体, 正六百胞体はあるか.

問 6　四次元の正多胞体の 3 次元の胞体のつながり方を考察せよ.

問 7　一辺の長さ ℓ の n 次元の正 $n+1$ 胞体の体積を求めよ. 4 次元の正五胞体は 4 次元空間内で, 格子点を頂点に持つように実現できるか.

問 8　ポアンカレ予想について説明せよ.

問 9　四次元ユークリッド空間における異種微分構造について説明せよ.

==========

B^2 を 2 次元の球体 ${x_0}^2+{x_1}^2 \leqq 1$, つまり, 円板とすると, その境界 ∂D^2 ${x_0}^2+{x_1}^2=1$ は 1 次元の球面 S^1, つまり, 円周である.

B^4 を 4 次元の球体 ${x_0}^2+{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2 \leqq 1$ とすると, その境界 ∂B^4 ${x_0}^2+{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=1$ は 3 次元の球面 S^3 である. $S^3=\partial B^4$ の中に埋め込まれた円周 K を結び目という.

埋め込み $\varphi : (B^2, \partial B^2) \to (B^4, \partial B^4)$ で円板 $\varphi(B^2)$ は B^4 の中で局所平坦かつ $\varphi(B^2) \cap \partial B^4 = K$ となるとき, K を位相的にスライスな結び目という. この円板 $\varphi(B^2)$ をスライス円板という.

前回の定義 1 では, 局所平坦な埋め込み $B^2 \to B^4$ とは, 局所的に $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, 0, 0) \subset (x_1, x_2, x_3, x_4)$ と同相な埋め込みとした.

スライス結び目は, 管状近傍を用いて, 次のように定義することもできる.

定義　${B_1}^2$, ${B_2}^2$ を 2 次元円板とする. 結び目 $K \subset S^3 = \partial B^4$ が位相的スライス結び目であるとは, K を境界とする B^4 内の円板 ${B_1}^2$ で次を満たすものが存在することである.
円板 ${B_1}^2$ の B^4 内での管状近傍が ${B_1}^2 \times {B_2}^2$ と同相であり, 管状近傍と S^3 の交わりが, K の管状近傍 $K \times {B_2}^2$ になる.
円板 ${B_1}^2$ を K の位相的スライス円板という.

B^4 内の円板 ${B_1}^2$ が可微分的にとれる結び目 K を可微分的スライス結び目という.

図形を構成するときの部品としていろいろなものが考えられる.

例 1　以下に示す, 単体と呼ばれる四面体の系列を面がぴったり合うように貼っていって, 積み木のようにして単体複体を作る.

0 単体	1 単体	2 単体	3 単体	4 単体
点	線分	三角形	四面体	五胞体

などなど.

例 2　以下に示す, 胞体と呼ばれる球体の系列を面が縮むことも許して貼っていって, 洋服作りのように CW 複体を作る.

0 胞体	1 胞体	2 胞体	3 胞体	4 胞体
点	線分	円板	球体	4 次元球体

などなど.

ハンドルと呼ばれる立方体の系列を貼っていって, 粘土細工のように多様体を構成することもできる.

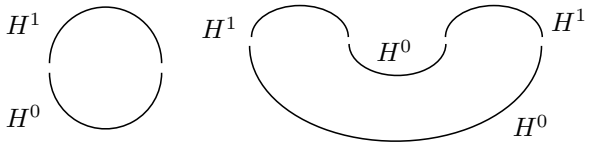
B_1 を線分 $-1 \leqq x \leqq 1$ とする. n 次元の場合, ハンドルはすべて n 次元の立方体 $B^n = \underbrace{B^1 \times B^1 \times \cdots \times B^1}_{n\text{ 個}}$ と同相であり, 糊付けする部分だけが異なる.

例 3　1 次元の場合.

ハンドルはすべて線分 B^1 と同相である. O を原点とする.

- 0-ハンドル $H^0 = \mathrm{O} \times B^1$ の核は 1 点 $\mathrm{O} \times \mathrm{O}$ であり, 糊代は空集合 ϕ である.
- 1-ハンドル $H^1 = B^1 \times \mathrm{O}$ の核は線分 $B^1 \times \mathrm{O}$ であり, 糊代は 2 点 $\partial B^1 \times \mathrm{O} = \{\pm 1\} \times \mathrm{O}$ である.

例えば, 円周 S^1 は H^0 に H^1 を貼るとできる. 2 つの H^0 に 2 つの H^1 を貼ってもできる.

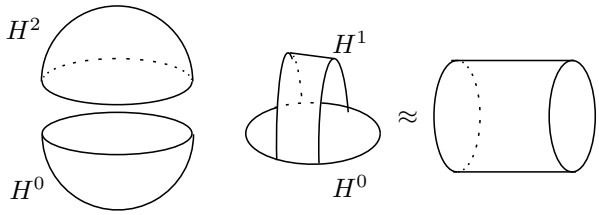


例 4　2 次元の場合.

ハンドルはすべて正方形 $B^2 = B^1 \times B^1$ と同相である.

- 0-ハンドル $H^0 = \mathrm{O} \times B^2$ の核は 1 点 $\mathrm{O} \times \mathrm{O}$ であり, 糊代は空集合 ϕ である.
- 1-ハンドル $H^1 = B^1 \times B^1$ の核は線分 $B^1 \times \mathrm{O}$ であり, 糊代は 2 つの線分 $\partial B^1 \times B^1 = \{\pm 1\} \times B^1$ である.
- 2-ハンドル $H^2 = B^2 \times \mathrm{O}$ の核は円板 $B^2 \times \mathrm{O}$ であり, 糊代は円周 $\partial B^2 \times \mathrm{O} = S^1 \times \mathrm{O}$ である.

例えば, 球面 S^2 は H^0 に H^2 を貼るとできる. 円柱 $S^1 \times B^1$ は H^0 に H^1 を貼るとできる.

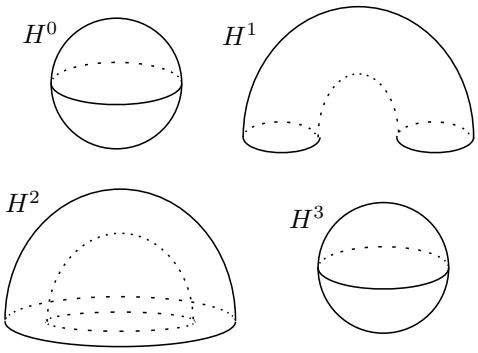


例 5　3 次元の場合.

ハンドルはすべて立方体 (正六面体) $B^3 = B^1 \times B^1 \times B^1$ と同相である.

- 0-ハンドル $H^0 = \mathrm{O} \times B^3$ の核は 1 点 $\mathrm{O} \times \mathrm{O}$ であり, 糊代は空集合 ϕ である.
- 1-ハンドル $H^1 = B^1 \times B^2$ の核は線分 $B^1 \times \mathrm{O}$ であり, 糊代は 2 つの円板 $\partial B^1 \times B^2 = \{\pm 1\} \times B^2$ である.
- 2-ハンドル $H^2 = B^2 \times B^1$ の核は円板 $B^2 \times \mathrm{O}$ であり, 糊代はアニュラス (円環域) $\partial B^2 \times B^1 = S^1 \times B^1$ である.
- 3-ハンドル $H^3 = B^3 \times \mathrm{O}$ の核は 3 次元球体 $B^3 \times \mathrm{O}$ (自分自身) であり, 糊代は 2 次元球面 $\partial B^3 \times \mathrm{O} = S^2 \times \mathrm{O}$ である.

図示すると次のようになる.

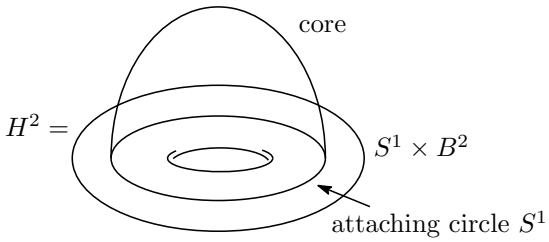


例 6　4 次元の場合.

ハンドルはすべて 4 次元の立方体 (正八胞体) $B^4 = B^1 \times B^1 \times B^1 \times B^1$ と同相である.

- 0-ハンドル $H^0 = \mathrm{O} \times B^4$ の核は 1 点 $\mathrm{O} \times \mathrm{O}$ であり, 糊代は空集合 ϕ である.
- 1-ハンドル $H^1 = B^1 \times B^3$ の核は線分 $B^1 \times \mathrm{O}$ であり, 糊代は 2 つの球体 $\partial B^1 \times B^3 = \{\pm 1\} \times B^3$ である.
- 2-ハンドル $H^2 = B^2 \times B^2$ の核は円板 $B^2 \times \mathrm{O}$ であり, 糊代は中の詰まったドーナツ形 (solid torus) $\partial B^2 \times B^2 = S^1 \times B^2$ である.
- 3-ハンドル $H^3 = B^3 \times B^1$ の核は球体 $B^3 \times \mathrm{O}$ であり, 糊代は厚みのある球面形 $\partial B^3 \times B^1 = S^2 \times B^1$ である.
- 4-ハンドル $H^4 = B^4 \times \mathrm{O}$ の核は 4 次元球体 $B^4 \times \mathrm{O}$ (自分自身) であり, 糊代は 3 次元球面 $\partial B^4 \times \mathrm{O} = S^3 \times \times \mathrm{O}$ である.

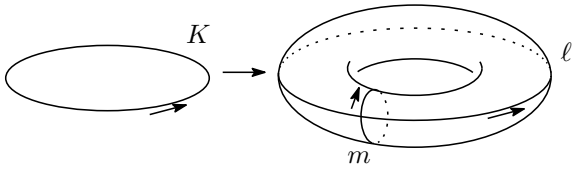
2-ハンドル H^2 の糊代と核 (core) だけを図示すると次のようになる.



k-ハンドルの核は k 次元球体 D^k になる. その境界 $\partial D^k = S^{k-1}$ は糊代 (attaching region) の中心に来るので接着球面 (attaching sphere) という.

$H^0 = B^4$ に H^2 を貼ろうと思うと, H^2 の接着円周 S^1 が H_0 の境界である 3 次元球面 S^3 のどこに来るかを指定する必要がある. それは, S^3 内の S^1 なので, 結び目となる. 結び目 K を決めると貼る場所は決定するが, 貼り方には, まだ, 自由度がある.

K の管状近傍 $S^1 \times D^2$ の境界は浮き輪の形 $S^1 \times S^1$ になる. その上の円周のうち K に沿った方向に回っているものをロンジチュードという (図の ℓ). 円板 D^2 の境界になる方向に回っているものをメリディアンという (図の m).

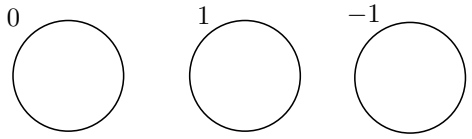


2 ハンドル H^2 の糊代 $S^1 \times D^2$ の外側の境界にも同様にロンジチュード λ とメリディアン μ がある. 2 ハンドル H^2 を貼るときに, μ が $a\ell + bm$ に写ったとすると, このときの枠は $\dfrac{b}{a}$ と定義する. 糊代とその外側では, ℓ と m の役割が逆になることと 2-ハンドル H^2 には核方向の広がりがことを考え合わせると, $a = \pm 1$ しか許されず. 実際の枠は整数値を取る.

例　H^0 の境界上の自明な結び目に枠 0 で H^2 を貼ると $S^2 \times B^2$ になる.

H^0 の境界上の自明な結び目に枠 1 で H^2 を貼ると $\mathbb{C}P^2$ から 4 次元開球を抜いたものになる.

H^0 の境界上の自明な結び目に枠 -1 で H^2 を貼ると $-\mathbb{C}P^2$ から 4 次元開球を抜いたものになる.



前回

「結び目という tangible なものの背後に, 微分構造という奥深い抽象的なものが隠れている」と書いた.

実際, 結び目を使って 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の非標準的な微分構造を作ることができる.

以下は,

Robert E. Gompf, András I.Stipsicz 共著

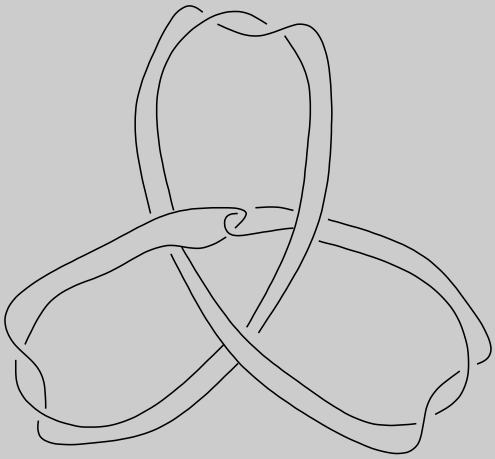
「GSM 20　4-Manifolds and Kirby Calculus」

アメリカ数学会

の 377 頁, 練習問題 9.4.23 とその解答 522–523 頁に掲載のその解答を参照した.

定理　$K \subset S^3 = \partial B^4$ を位相的にスライスで, 可微分的にスライスではない結び目とする.

例えば, 右三つ葉結び目の正のホワイトヘッド 2 重化 (下図) がこの条件を満たす.



X_K を B^4 に K に沿って枠 0 で 2 ハンドル H^2 を接着した図形とする.

$X_K = B^4 \cup H_2$ は $\mathbb{R}^4$ と同相だが可微分同相ではない図形 R^4 (exotic $\mathbb{R}^4$) に埋め込める.

解答　まず, 次の 2 つの補題を考える.

補題 D　K が可微分的にスライス.

$\Longleftrightarrow X_K$ が $\mathbb{R}^4$ に可微分的に埋め込める.

補題 T　K が位相的にスライス.

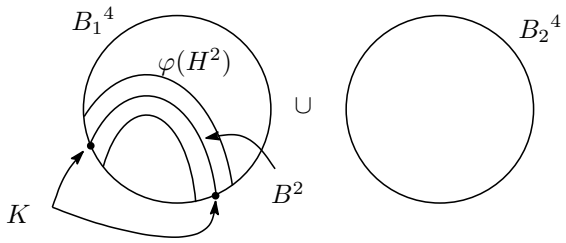
$\Longleftrightarrow X_K$ が $\mathbb{R}^4$ に位相的に埋め込める.

証明　2つともほぼ同じゆえ, 補題Dのみ示す.

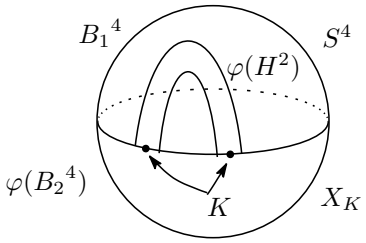
($\Longrightarrow$ について)

${B_1}^4$ を 4 次元の球体とし, ${S_1}^3$ をその境界とする.

$K \subset {S_1}^3 = \partial {B_1}^4$ と考える. K の可微分的なスライス円板 B^2 の ${B_1}^4$ における管状近傍は, 2 ハンドル H^2 の ${B_1}^4$ への可微分な埋め込みになっている. これを $\varphi(H^2)$ と書くことにする.
${B_2}^4$ を 4 次元の球体とし, ${S_2}^3$ をその境界とする.
${B_2}^4$ と ${B_1}^4$ を境界で貼りつけると S^4 になる.
また, この貼り合わせ ${S_1}^3 = -{S_2}^3$ により
$K \subset {S_2}^3 = \partial {B_2}^4$ と思うと, 2 ハンドル
$\varphi(H^2) \subset {B_1}^4$ は ${B_2}^4$ に K に沿って枠 0 で接着されており, ${B_2}^4 \cup \varphi(H_2)$ は X_K と可微分同相になっている.
つまり, ${B_2}^4 \cup \varphi(H^2) \subset {B_2}^4 \cup {B_1}^4$ は X_K の S^4 への可微分な埋め込みになっている.



${B_1}^4$ から $\varphi(H^2)$ に入ってない 1 点を抜くと, $S^4 = {B_1}^4 \cup {B_2}^4$ は 標準的な微分構造を持った 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ になる. したがって, ${B_2}^4 \cup \varphi(H^2) \subset {B_2}^4 \cup ({B_1}^4 \setminus \{1\text{ 点}\})$ は X_K の $\mathbb{R}^4$ への可微分な埋め込みになっている.
($\Longleftarrow$ について)
　${B_2}^4$ を 4 次元の球体とし, $X_K = {B_2}^4 \cup H^2$ とおく. $\mathbb{R}^4$ を標準的な微分構造を持った 4 次元ユークリッド空間とし, $\varphi : X_K \to \mathbb{R}^4$ を可微分な埋め込みとする.
$\mathbb{R}^4$ を 1 点コンパクト化すると, 可微分な埋め込み $\varphi : X_K \to S^4$ を得る.
2 ハンドル H^2 の核 $B^2 \times \mathrm{O}$ の φ による写り先が, K の可微分的なスライス円板となる. なぜなら, $\varphi(B^2 \times \mathrm{O}) \subset \varphi(H^2)$ は S^4 から $\varphi({B_2}^4)$ の内部を取り除いた部分 $S^4 \setminus \mathrm{int}\{\varphi({B_2}^4)\}$ に含まれるが, これは, 球体と可微分同相な図形である. つまり,
${B_1}^4 = S^4 \setminus \mathrm{int}\{\varphi({B_2}^4)\}$ とおける.



したがって, 結び目 K は ${B_1}^4$ に含まれる可微分な円板の境界になるので, K は可微分的にスライスである.　(証明終わり)

定理の証明　X_K には自然な可微分構造が入る.
K が位相的にスライスなので, 補題Tより, 位相的埋め込み $\varphi : X_K \to \mathbb{R}^4$ が存在する.
$\mathbb{R}^4 \setminus \mathrm{int}\{\varphi(X_K)\}$ は $\partial\varphi(X_K)$ を境界に持つコンパクトでない 4 次元位相多様体である. よって, 可微分構造を持つ. 3 次元多様体上の可微分構造は唯一であるから, φ を境界に制限した
$\varphi : \partial X_K \to \partial\varphi(X_K) \subset \mathbb{R}^4$ は可微分同相写像に同位である. この可微分同相写像で, 可微分多様体 X_K と可微分多様体 $\mathbb{R}^4 \setminus \mathrm{int}\{\varphi(X_K)\}$ を貼りつけて, 可微分多様体 R^4 を作る. る. 位相的には, $\mathbb{R}^4$ から $\mathrm{int}\{\varphi(X_K)\}$ を取り外して, 同位で動かして戻しただけなので, 出来上がった多様体 R^4 は $\mathbb{R}^4$ と同相である.
もし, R^4 が $\mathbb{R}^4$ と可微分同相なら, $\varphi(X_K) \subset R^4$ より $\varphi(X_K) \subset \mathbb{R}^4$ と見なせる. 補題Dより, K は可微分的にスライスとなり, 定理の仮定に反する. よって, R^4 は exotic な $\mathbb{R}^4$ となる.
(証明終わり)

補足　証明で肝心な所は,
「$\mathbb{R}^4 \setminus \mathrm{int}\{\varphi(X_K)\}$ が可微分構造を持つ」ことである. これは, 境界 $\partial\varphi(X_K)$ の襟近傍に直積の微分構造をいれて, それを伸ばしていくとできる. 詳しくは, Michael H. Freedman, Frank Quinn 共著「Topology of 4-manifolds」8.2 節, 116-117 頁参照.

「現代数学 2013 年 12 月号」 に掲載の記事**「現代数学 SELECT 4 次元から見た現代数学」**第 8 回**「結び目と exotic な $\mathbb{R}^4$」**より引用.

専門科目：自然と環境　**科目名：無限と微分積分の不思議**

日程 実施期間

時限	12 月 15 日 (日) 時間	回	授業テーマ
1	10:00-11:25	1	数列の無限和
2	11:40-13:05	2	関数の無限和
3	14:10-15:35	3	極限の計算
4	15:50-17:15	4	微分と極限

時限	10 月 27 日 (日) 時間	回	授業テーマ
1	10:00-11:25	5	積分と極限
2	11:40-13:05	6	微分と積分の順序
3	14:10-15:35	7	重積分の計算
4	15:50-17:15	8	累次積分の順序

教科書, 参考書など

○ 日本評論社「大学院入試問題から学ぶシリーズ 微分積分」ISBN 978-4-535-78604-2,

○ 現代数学社「現代数学」ISSN 2187-6495 に連載中の記事「院試に習う大学数理」

授業概要 (シラバス)　微分や積分では極限を取る操作を行うため, 必然的に無限の操作が入ってきます. 無限には, 有限とは異なる直感を裏切る様々な不思議が存在します. 例えば, 有限個の和の場合 2＋3と3＋2が同じなのは当たり前ですが, これが無限個の和になると値が異なる場合が出てきます. こうした不思議な現象をいろいろと紹介します.

学生へのメッセージ

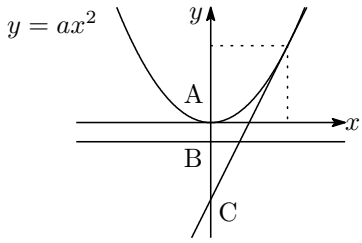
できるだけ多項式の話で完結するようにしますが, 三角関数などが少し登場します.

成績評価　成績評価は出席状況のほか, レポートの評点により行います.

以下の問題に対するレポートを 12 月 22 日 (日)13 時 05 分までに提出してください.

レポート問題

1

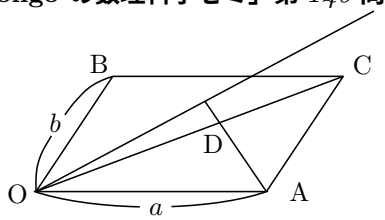


(1)　$a \neq 0$ を実数の定数とする. 放物線 $y = ax^2$ の頂点を A, 放物線の軸と準線の交点を B, 放物線の軸と傾き 2 の接線の交点を C とおく. AB : BC を求めよ.

(2)　準線が $y = 5$, 軸が $x = 1$ で, $y = 2x + 6$ に接する放物線の式を求めよ.

現代数学社「現代数学」2014 年 1 月号「Dr.Hongo の数理科学ゼミ」第 *149* 問より

2　平行四辺形 OACB において, 辺 OA, OB の長さが順に a, b　$(a > b)$ であるとする. ∠BOA の 2 等分線へ頂点 A から下ろした垂線と直線 OC の交点を D とおく. 対角線 OC と 線分 OD の長さの比 OC : OD を a, b で表わせ.



現代数学社「現代数学」2013 年 2 月号「Dr.Hongo の数理科学ゼミ」第 *150* 問より

3　旅人が, 本当のことしか言わない正直族とウソのことしか言わないウソツキ族の 2 つの種族が住んでいる村にやってきた. 次の問いに答えなさい.

(1)　5 人の村人が集まっていて, それぞれが以下のように言った.

村人 A「私たちのうちの 1 人だけがウソツキ族だ.」　村人 B「私たちのうちの 2 人がウソツキ族だ.」

村人 C「私たちのうちの 3 人がウソツキ族だ.」　村人 D「私たちのうちの 4 人がウソツキ族だ.」

村人 E「私たち全員がウソツキ族だ. 」

村人 A〜村人 E のそれぞれについて正直族かウソツキ族か判断しなさい. その理由も書きなさい.

(2)　別の 2 人の村人に会った. 2 人に「あなたたちは同じ種族ですか？」と聞いた. それぞれの答えで, 2 人のそれぞれの種族がわかるという. その理由を説明せよ.　**2013 年度 東大工学系大学院入試より**

4　授業で指定された問題や, 授業でやらなかったプリントの問題を５〜６問解いて出して下さい.

第１章 数列の無限和

1 無限個の部屋があるホテルが満室になっている．もう一組お客が来たとき, どうしたら全員を泊めることができるだろうか.

2 自然数と正の偶数ではどちらが多いだろうか.

3 自然数と正の有理数ではどちらが多いだろうか.

4 自然数と $0 < x \leqq 1$ を満たす実数ではどちらが多いだろうか.

5 n を自然数とする．$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ は $r \neq 1$ のとき, $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r = 1$ のとき, an になることを示せ.

6 $a + ar + ar^2 + \cdots$ は $-1 < r < 1$ のとき, $\dfrac{a}{1-r}$ となることを示せ.

7 $0 \leqq x \leqq 1$ から中央の $\dfrac{1}{3}$ を除き $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ $\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq 1$ にする．この 2 つの区間の中央の $\dfrac{1}{3}$ を除き, $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{9}$, $\dfrac{2}{9} \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq \dfrac{7}{9}$, $\dfrac{8}{9} \leqq x \leqq 1$ にする．これを無限回繰り返すと, どれだけの長さが残るか.
どれだけの個数の点が残るか.

8 $\dfrac{1}{\text{奇数}}$ の和から $\dfrac{1}{\text{偶数}}$ の和を引いた値を 2 通りの方法で計算する．以下の 2 つの値は同じか？
奇数と偶数を交互に並べた $\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{10} + \cdots$ の値 S.
奇数, 偶数, 偶数の順に並べた $\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{12} + \cdots$ の値 T.

第２章 関数の無限和

$\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) = \dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)\right\} = \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right)$. ……① 一方, 項別微分したものは,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{d}{dx} f_k(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{d}{dx} f_k(x)\right)\right\}$. 有限和ならば, 微分と順序交換できるので,
$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{d}{dx} S_n(x)\right)$. ……② ①, ② より, 無限和と微分の順序交換が可能であることの必要十分条件は, 部分和に関する極限と微分が交換可能ということになる.

関数列 $f_n(x)$ の第 n 部分和を $S_n(x)$ とおく．つまり, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ とおく．このとき,
$\displaystyle\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)dx = \int_a^b\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)\right\}dx = \int_a^b\left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right)dx$. ……③
一方, 項別積分したものは,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_k(x)\,dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b f_k(x)\,dx\right)\right\}$. 有限和ならば, 積分と順序交換できるので,
$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)dx\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b S_n(x)\,dx\right)$. ……④ ③, ④ より, 無限和と積分の順序交換が可能であることの必要十分条件は, 部分和に関する極限と積分が交換可能ということになる.

第３章 極限の計算

9 n を自然数とし, $f_n(x) = x^n \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ となることを示せ.

１０ n を自然数とし, $f_n(x) = nx^n \quad (0 \leqq x < 1)$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ を示せ.

１１ n を自然数とし, $f_n(x) = n^2x^n \quad (0 \leqq x < 1)$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ を示せ.

第４章 微分と極限

１２ n を自然数とし，$f_n(x) = \dfrac{x}{n} - (-1)^n$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx}f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ だが，$\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$ は存在しないことを示せ．

１３ n を自然数とし，$f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ とおく．
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx}f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\cos nx = \begin{cases} 1 & (x = 2k\pi) \\ \text{振動} & (\text{上以外}) \end{cases}$ だが，$\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \dfrac{d}{dx}0 = 0$ となることを示せ．

第５章 積分と極限

１４ n を自然数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n(1-x)\,dx = 0$ と $\displaystyle\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} x^n(1-x)\right)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$ を示せ．

１５ n を自然数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n(1-x)\,dx = 0$ と $\displaystyle\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} nx^n(1-x)\right)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$ を示せ．

１６ n を自然数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2x^n(1-x)\,dx = 1$ と $\displaystyle\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} n^2x^n(1-x)\right)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$ を示せ．

１７ n を自然数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{n^2}xe^{-\frac{x}{n}}\,dx = 1$ と $\displaystyle\int_0^\infty\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}xe^{-\frac{x}{n}}\right)dx = \int_0^\infty 0\,dx = 0$ を示せ．

第６章 微分と積分の順序

１８ $\displaystyle\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty x^3e^{-x^2y}dy = \frac{\partial}{\partial x}[-xe^{-x^2y}]_0^\infty = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$ と
$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(x^3e^{-x^2y})dy = \int_0^\infty (3x^2 - 2x^4y)e^{-xy}dy = [(2x^2y-1)e^{-x^2y}]_0^\infty = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ 1 & (x\neq 0) \end{cases}$ の計算を確認せよ．

第７章 重積分の計算

１９ $D : 0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2$ のとき，次の計算を確認せよ．

$$\iint_D (x^2y + xy^2)\,dxdy = \int_0^2\left(\int_0^2 (x^2y+xy^2)\,dx\right)dy = \int_0^2\left[\frac{x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}y^2\right]_0^2 dy = \int_0^2\left(\frac{8}{3}y + 2y^2\right)dy$$
$$= \left[\frac{8}{3}\cdot\frac{y^2}{2} + 2\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3}.$$

２０ $D : x \leqq 0,\ y \leqq 0,\ x+y \leqq 1$ のとき，次の計算を確認せよ．

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{1-y}(x^2+y^2)\,dx\right)dy = \int_0^1\left[\frac{x^3}{3} + y^2x\right]_0^{1-y} dy$$
$$= \int_0^1\left\{\frac{(1-y)^3}{3} + y^2(1-y)\right\}dy = \left[-\frac{(1-y)^4}{12} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

21 $D: 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x$ のとき, 次の計算を確認せよ.
x から先に累次積分する. y を固定したとき, x がどこからどこまで動くかを見ると,
$D: 0 \leqq y \leqq 1, y \leqq x \leqq 1$ より $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^1 \sqrt{x^2-y^2}dx\right) dy$ となる.
内側の積分は, 公式
$\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+A} + A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right\} + C$ を使うと,
$\displaystyle\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-y^2} - y^2\log\left|x+\sqrt{x^2-y^2}\right|\right]_y^1 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{1-y^2} - y^2\log\left|1+\sqrt{1-y^2}\right| + y^2\log y\right\}$.
これを 0 から 1 まで積分すると, 中括弧の中の第 1 項は $\dfrac{\pi}{4}$, 第 2 項は $-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{1}{9}$, 第 3 項は $-\dfrac{1}{9}$ となる.
よって, $\dfrac{\pi}{12}$.

22 上の計算は大変なので, y から先に累次積分する. 次の計算を確認せよ.
x を固定したとき, y がどこからどこまで動くかを見ると,
$D: 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x$ より $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x \sqrt{x^2-y^2}dy\right) dx$ となる.
被積分関数は x を x_0 で止めて考えると, $z = \sqrt{x_0^2-y^2} \Longleftrightarrow z^2 = x_0^2-y^2, z \geqq 0 \Longleftrightarrow y^2+z^2 = x_0^2, z \geqq 0$ となり, 半径 x_0 の上半円であることがわかる. 内側の積分は, この $0 \leqq y \leqq x_0$ の部分の面積なので, 半径 x_0 の四分円の面積となり $\dfrac{\pi}{4}x_0^2$ となる. よって,
$$I = \int_0^1 \frac{\pi}{4}x^2\,dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

23 $D: x^2 \leqq y \leqq \sqrt{x}$ のとき, 次の計算を確認せよ.
$x^2 \leqq \sqrt{x} \Longleftrightarrow 0 \leqq x \leqq 1$ である. よって,
$$\iint_D (x^2+y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$
$$= \int_0^1 \left\{\left(x^2\sqrt{x} + \frac{x}{2}\right) - \left(x^4 + \frac{x^4}{2}\right)\right\} dx = \left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{10}x^5\right]_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140}.$$

第８章 累次積分の順序

24 $f(x,y)$ を, y 軸 $x=0$ 上で 0, それ以外で $\dfrac{x-y}{x^3}e^{-\frac{y}{x}}$ と定める. $D: 0 < x \leqq 0,\ 0 < y \leqq 1$ とおく.
$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = \int_0^1 \left[-\frac{1}{x}e^{-\frac{y}{x}}\right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(-e^{-y}\right) dy = \frac{1}{e} - 1$ と
$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2}e^{-\frac{y}{x}}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\,dx = -\frac{1}{e}$ の計算を確認せよ.

25 $f(x,y) = (2-xy)xye^{-xy}$ とおき, $D: 0 \leqq x,\ 0 \leqq y \leqq 1$ とおく.
$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x,y)\,dx\right) dy = \int_0^1 \left[x^2ye^{-xy}\right]_0^\infty dy = \int_0^1 0dy = 0$ と
$\displaystyle\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx = \int_0^\infty \left[xy^2e^{-xy}\right]_0^1 dx = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1$ の計算を確認せよ.

専門科目：自然と環境　**科目名：無限と微分積分の不思議**

前回のプリントの訂正

日本評論社「大学院入試問題から学ぶシリーズ 微分積分」ISBN 978-4-535-78603-5 を
ISBN 978-4-535-78604-2 に訂正します.

前回やったこと

2 項定理

$$
\begin{aligned}
x+y &= x+y \\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \\
(x+y)^5 &= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5 \\
(x+y)^6 &= x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6 \\
(x+y)^7 &= x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7 \\
(x+y)^8 &= x^8+8x^7y+28x^6y^2+56x^5y^3+70x^4y^4+56x^3y^5+28x^2y^6+8xy^7+y^8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^{n-3}y^3+\cdots+nxy^{n-1}+y^n \\
&= {}_n\mathrm{C}_0x^ny^0+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}y+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}y^2+{}_n\mathrm{C}_3x^{n-3}y^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xy^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_0x^0y^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kx^{n-k}y^k.
\end{aligned}
$$

第３章 極限の計算

２６　1 より小さい数を無限個かけると 0 になるだろうか.
$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\cdots$ は何になるか.

２７　1 より小さい数を無限個かけると 0 になるだろうか.
$\left(1-\frac{1}{4\cdot 1^2}\right)\left(1-\frac{1}{4\cdot 2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4\cdot 3^2}\right)\times\cdots$ は何になるか.

ヒント　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ は n が偶数のとき,
$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\times\cdots\times\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$.
n が奇数のとき,
$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\times\cdots\times\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$ となる. (ウォリスの公式)

２８　$1^\infty=1$ になるのだろうか.
$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ はどれくらいの大きさになるか.

第４章 微分と極限

２９　$f(x)$ と $g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ を n 回微分した関数 $\{f(x)g(x)\}^{(n)}$ が
$f^{(n)}(x)+nf^{(n-1)}(x)g'(x)+\frac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}(x)g''(x)+\cdots+nf'(x)g^{(n-1)}(x)+g^{(n)}(x)$
になることを示せ. (ライプニッツの公式)

３０　$f(x)$ と $g(x)$ を合成した関数 $f(g(x))$ を n 回微分した関数はどうなるか. 公式を作ってみよ.
例えば, $e^{g(x)}$ だとどうなるか. もっと易しくして e^{e^x} だとどうなるか.

３１　$f_n(x)$ を $-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}$ で $\frac{\{(nx)^2-1\}^2}{n}$, それ以外で 0 とする.
$\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'$ と $\lim_{n\to\infty}\left({f_n}'(x)\right)$ を比較せよ.

第５章 積分と極限

３２ $0 \leqq x \leqq 1$ から実数への関数 $f_n(x)$ を次のように定義する.
O を原点 $(0,0)$ とする. $\mathrm{A}_n\left(1-\dfrac{1}{n},0\right)$, $\mathrm{B}(1,1)$ とおき, 折れ線 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}$ をグラフとする関数が $f_n(x)$. このとき, 以下の計算を確認せよ.
極限 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ は
$f(x)=\begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (x=1 \text{ のとき}) \end{cases}$ となる.

３２′ $f_n(x)$ を定義する折れ線を次のように変更する. $\mathrm{A}_n\left(1-\dfrac{2}{n},0\right)$, $\mathrm{B}_n\left(1-\dfrac{1}{n},n\right)$, $\mathrm{C}(1,0)$ とおき, 折れ線 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}$ をグラフとする関数が $f_n(x)$. このとき, 以下の計算を確認せよ.
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ となるので, $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = 0$ だが, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)=1$ である.

３２″ 定義域を $0 \leqq x$ に拡張し, $f_n(x)$ を定義する折れ線を次のように変更する. $\mathrm{A}_n(n,0)$, $\mathrm{B}_n\left(2n,\dfrac{1}{n}\right)$, $\mathrm{C}_n(3n,0)$ とおき, 折れ線 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ をグラフとする関数が $f_n(x)$. このとき, 以下の計算を確認せよ.
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ となるので, $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = 0$ だが, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)=1$ である.

第６章 微分と積分の順序

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が連続関数なら
$\displaystyle\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y)\,dx$ が成り立つ.
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が不連続関数の場合は, 微分と積分の順序交換が不可能になることがある.

３３ 以下の計算を確認せよ.
$f(x,y)$ を $|y|>|x|$ で $\dfrac{x(x^2-y^2)^2}{y^5}$, それ以外で 0 と定義する.
$0<|y| \leqq 1$ のとき, $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^y f(x,y)\,dx = \frac{y}{6}$ より,
$\displaystyle\frac{\partial}{\partial y}\int_0^1 f(x,y)\,dx = \frac{1}{6}$.
一方, $x_0 \neq 0$ のとき $f(x_0,y)$ は $y=0$ の近くで恒等的に 0, $x_0=0$ のとき $f(x_0,y)$ は恒等的に 0 であるから, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ は恒等的に 0. よって, $y=0$ で, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx = 0$.

第７章 重積分の計算

３４ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ を計算せよ.

３５ D が半径 1 の円板 $x^2+y^2 \leqq 1$ のとき, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ を計算せよ.

３６ K が半径 1 の球体 $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$ のとき, $\displaystyle\iiint_K \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ を計算せよ.

第８章 累次積分の順序

D が有界閉集合 (大きさが有限で, 境界が含まれる図形) で, $f(x,y)$ が連続関数なら, 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を累次積分に直したとき, $dxdy$ の順に積分する場合と $dydx$ の順に積分する場合で値が同じになる. しかし, D が有界閉集合でも $f(x,y)$ が不連続の場合や $f(x,y)$ が連続でも D が無限の大きさの場合は値が異なることがある.

３７ 以下の計算を確認せよ.

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\right)dy = \int_0^1\left[\frac{-x}{(x+y)^2}\right]_0^1 dy = \int_0^1\left\{\frac{-1}{(1+y)^2}-0\right\}dy = \left[\frac{1}{1+y}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}.$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right)dx = \int_0^1\left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_0^1 dx = \int_0^1\left\{\frac{1}{(x+1)^2}-0\right\}dx = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$