# 線形代数学第二 ４類Ｒクラス 第２５回

**前回の訂正** $\boxed{5}$ **(15)** 「実線形写像 $V \to \mathbb{R}$ のうち $V^*$ の元になる (値が定まる) ものはどれか.」を「実線形写像 $V \to \mathbb{R}$, つまり, $V^*$ の元になる (値が定まる) ものはどれか.」に変更する.

**12 月 18 日 (水) の復習テスト** 制限時間 15 分 出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

$\boxed{1}$ 実 3 次正方行列の全体を $M_3(\mathbb{R})$, $m$ 行 $n$ 列の実正方行列の全体を $M_{m,n}(\mathbb{R})$ とおく.

**(1)** 4 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の定める線形変換 $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ が単射であることを示せ.

また, $f : M_3(\mathbb{R}) \to M_{4,3}(\mathbb{R})$ を $f : X \mapsto AX$ とおく. $f$ が単射であることを示せ.

**(2)** 2 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の定める線形変換 $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が全射であることを示せ.

また, $f : M_3(\mathbb{R}) \to M_{2,3}(\mathbb{R})$ を $f : X \mapsto AX$ とおく. $f$ が全射であることを示せ.

**(3)** 3 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の定める線形変換 $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ が単射であることを示せ.

また, $f : M_3(\mathbb{R}) \to M_{3,2}(\mathbb{R})$ を $f : X \mapsto XA$ とおく. $f$ が全射であることを示せ.

**(4)** 3 行 4 列の行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の定める線形変換 $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ が全射であることを示せ.

また, $f : M_3(\mathbb{R}) \to M_{3,4}(\mathbb{R})$ を $f : X \mapsto XA$ とおく. $f$ が単射であることを示せ.

$\boxed{2}$ 空間の実一次変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える.

**(5)** $f$ が全射でない例, 単射でない例を挙げよ.

**(6)** $f$ の終域を制限した写像 $g : \mathbb{R}^3 \to \operatorname{Im} f$ は全射になることを示せ.

**(7)** $f$ の定義域を $\mathbb{R}^3/\operatorname{Ker} f$ に変更した写像 $h : \mathbb{R}^3/\operatorname{Ker} f \to \mathbb{R}^3$ を $h([\vec{v}]) = f(\vec{v})$ で定める. ここで, $[\vec{v}]$ は自然な射影 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/\operatorname{Ker} f$ で $\vec{v}$ に対応するベクトルである. $h$ は単射になることを示せ.

**今日やること** 中間試験の復習

**次回やること** 第 4 章 次元と基底 第 4.1 節 ベクトルの線形独立性基底, 第 4.2 節 部分線形空間と次元, 第 4.3 節 行列のランクと次元, 第 4.4 節 線形写像と基底, 第 4.5 節 実線形空間の向きなど

# 線形代数学第二 ４類Ｒクラス 第２６回

**12 月 25 日 (水) の復習テスト**　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

**1**　**(1)**　次の 4 つのうち, 実ベクトル空間であるものはどれか.

**(a)**　$\{\pm i\}$　**(b)**　実数の数列で, $a_{n+2} = -a_n$ を満たすもの全体

**(c)**　$\{a\sin x + b\cos x \mid a, b$ は実数 $\}$　**(d)**　2 次実行列で, $X^2 = -E$ を満たすもの全体

**(2)**　次の 4 つのうち, ${\mathbb{F}_2}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \ x, y \in \mathbb{F}_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ の $\mathbb{F}_2$ 部分ベクトル空間は, $\{\vec{0}\}$ と全体 ${\mathbb{F}_2}^2$ 以外に何個あるか.

**(3)**　次の 4 つのうち, 実係数多項式全体 $\mathbb{R}[x]$ から $\mathbb{R}[x]$ への実一次変換になるものはどれか.

**(a)**　$f(x) \mapsto x^2 f(x)$.　**(b)**　$f(x) \mapsto f(x^2)$.　**(c)**　$f(x) \mapsto \{f(x)\}^2$.　**(d)**　$f(x) \mapsto f(f(x))$.

**2**　$\mathbb{R}^3$ 内の平面 $\Pi$ を $x + 2y + 3z = 0$ で定める. 点 P を通る, 方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の直線と $\Pi$ の交点を Q とおく. P に Q を対応させる一次変換の表現行列を $A$ とおく. 次の 4 つを求めよ.

**(4)**　$\det A$.　**(5)**　$\operatorname{tr} A$.　**(6)**　$\operatorname{rank} A$.　**(7)**　$A^2 - A$.

**今日やること**　第 4 章 次元と基底 第 4.1 節 ベクトルの線形独立性基底, 第 4.2 節 部分線形空間と次元, 第 4.3 節 行列のランクと次元, 第 4.4 節 線形写像と基底, 第 4.5 節 実線形空間の向きなど

**生成系と基底**　$K$ を体, $V$ を $K$ 上のベクトル空間とする. $V$ の元の集合 $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ ……☆ が「任意の $\vec{v} \in V$ に対して, $K$ の元 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ が存在して $\vec{v} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{v_n}$ と表わせる」を満たすとき, ☆を $V$ の生成系という. ☆は $K$ 上で $V$ を張るとも言う.
$V = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n} \rangle$ とか, $V = \operatorname{span}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n})$ などと書く.
表わし方がただ一通りのとき, $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ を $V$ の基底という.
$V$ の基底はたくさんある. 順番を入れ換えたものは別の基底と考えることも多い.

**次元**　$V$ の基底は無数にあるが, それ構成するベクトルの本数は常に一定である. この本数を $V$ の次元といい, $\dim V$ で表わす. 無限本の場合は, 無限次元といい, $\dim V = \infty$ と書く.
$W \cap W'$ の基底に何本かベクトルを付け加えて $W$ と $W'$ の基底を作ることにより,

$$\dim(W + W') = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W')$$

が成り立つことがわかる.

**線形写像の行列表示**　$K$ を体とし, $V, W$ を $K$ 上のベクトル空間とする. $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ が $V$ の基底, $\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}$ が $W$ の基底であるとする. 線形写像 $f : V \to W$ が $\begin{cases} f(\overrightarrow{a_1}) = p_1\overrightarrow{c_1} + p_2\overrightarrow{c_2} \\ f(\overrightarrow{a_2}) = q_1\overrightarrow{c_1} + q_2\overrightarrow{c_2} \end{cases}$ を満たすとする. 任意の $\vec{v} \in V$ は $\vec{v} = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2}$ と表わせるので, この像は, $f(\vec{v}) = f(x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2}) = x_1 f(\overrightarrow{a_1}) + x_2 f(\overrightarrow{a_2})$
$= x_1(p_1\overrightarrow{c_1} + p_2\overrightarrow{c_2}) + x_2(q_1\overrightarrow{c_1} + q_2\overrightarrow{c_2}) = (p_1x_1 + q_1x_1)\overrightarrow{c_1} + (p_2x_1 + q_2x_2)\overrightarrow{c_2}$ になる. 係数だけを見ると, $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_1x_1 + q_1x_1 \\ p_2x_1 + q_2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となる. この $A = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ を $V$ の基底 $\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2} \rangle$ と $W$ の基底 $\langle \overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2} \rangle$ に関する $f$ の表現行列という.
横と縦が逆になることに注意. よって, $(f(\overrightarrow{a_1}), f(\overrightarrow{a_2})) = (\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2})A$. ……①

**基底の変換行列**　$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ が $V$ の基底, $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$ も $V$ の基底とすると, $\begin{cases} \overrightarrow{b_1} = k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} \\ \overrightarrow{b_2} = \ell_1\overrightarrow{a_1} + \ell_2\overrightarrow{a_2} \end{cases}$ とおける. 行列で表すと, $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}) = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) \begin{pmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{pmatrix}$ となる. $P = \begin{pmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{pmatrix}$ を, 基底 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ から基底 $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$ への基底の変換行列という. 横と縦が逆になるので注意せよ.

**基底変換による行列表示の変化**　$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ が $V$ の基底, $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$ も $V$ の基底とし, 基底の変換行列 $P$ とおくと, $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}) = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})P$ である. $f$ の線形性から, $(f(\overrightarrow{b_1}), f(\overrightarrow{b_2})) = (f(\overrightarrow{a_1}), f(\overrightarrow{a_2}))P$ ……②が成り立つ.
同様に, $\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}$ が $W$ の基底, $\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}$ も $W$ の基底とし, 基底の変換行列 $Q$ とおくと, $(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}) = (\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2})Q$ である. よって, $(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2})Q^{-1} = (\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2})$ ……③ が成り立つ. 線形変換 $f : V \to W$ の,
定義域の基底 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ と終域の基底 $\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}$ に関する表現行列を $A$ とおくと, $(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}) = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})A$.

定義域の基底 $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$ と終域の基底 $\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}$ に関する表現行列を $B$ とおくと, $(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}) = (\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2})B$.
① $\times P$ に ②, ③を代入して, $(f(\overrightarrow{b_1}), f(\overrightarrow{b_2})) = (\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2})Q^{-1}AP$. よって, $B = Q^{-1}AP$.

**像**　$f : X \to Y$ に対して, $A \subset X$ の像 $f(A)$ とは $f$ による $A$ の移り先全体 $\{f(a) \in Y \mid a \in A\}$ のこと. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ だが, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ となる.
$K$ を体とする. $X, Y$ が $K$ 線形空間, $f$ が $K$ 線形写像の場合は, $f(X) \subset Y$ も $K$ 線形空間になる. $f(X)$ を $\mathrm{Im}\, f$ と書き, $f$ の像という.

**階数**　$\dim(\mathrm{Im}\, f)$ を $f$ の階数とかランクといい, $\mathrm{rank}\, f$ と書く.

**核**　$f : X \to Y$ に対して, $B \subset Y$ の原像 $f^{-1}(B)$ とは $f$ によって $B$ に写って来るもの全体 $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ のこと. 逆写像 $f^{-1} : X \to Y$ が存在しなくても, 原像 $f^{-1}(B)$ は存在する. $X, Y$ が $K$ 線形空間, $f$ が $K$ 線形写像の場合は, $f^{-1}(\vec{0}) \subset Y$ も $K$ 線形空間になる. $f^{-1}(\vec{0})$ を $\mathrm{Ker}\, f$ と書き, $f$ の核という. $V = V' \oplus \mathrm{Ker}\, f$ を満たす $V'$ があり, $V' \cong \mathrm{Im}\, f$ より次が成り立つ.

$$\dim V = \dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \mathrm{rank}\, f + \dim(\mathrm{Ker}\, f)$$

**例1**　$\mathbb{R}[x]$ を実数係数の多項式全体とする. $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ を微分 $p(x) \mapsto p'(x)$ で定義すると $\mathbb{R}$ 上の線形写像になる. 任意の多項式 $p(x)$ に対して, $f : \displaystyle\int_0^x p(t)\,dt \mapsto p(x)$ なので, $f$ は全射である. つまり, $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}[x]$.　0 に写る多項式は定数のみなので, $\mathrm{Ker}\, f = \mathbb{R}$. 定義域と終域の基底を共に $1, x, x^2, x^3, \cdots$ とおくと, 左下の計算により, この基底に関する表現行列が右下のものになると分かる.

$$\begin{cases} f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \cdots \\ f(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \cdots \\ f(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \cdots \\ f(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \cdots \\ \qquad\vdots \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots \\ & & \vdots & & \cdots \end{pmatrix}.$$

**例2**　$V$ を $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ を満たす実数の数列 $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$ 全体とする $f : V \to V$ を並進 $(a_n) \mapsto (a_{n+1})$ で定義すると $\mathbb{R}$ 上の線形写像になる. $V$ 内の任意の数列 $(a_n)$ に対して, $f : (a_{n-1}) \mapsto (a_n)$ なので, $f$ は全射である. つまり, $\mathrm{Im}\, f = V$. なお $a_{-1}$ は $a_1 = 5a_0 - 6a_{-1}$ を用いて定義する.
ずっと 0 の数列 $\vec{0} = (0, 0, 0, \cdots)$ に写ってくるものは, それ自身しかないので, $\mathrm{Ker}\, f = \{\vec{0}\}$. したがって, $f$ は単射である. $f$ は全単射なので, 逆写像が存在し, $f$ は同形写像となる.
定義域と終域の基底を共に $(2^n)$, $(3^n)$ とおくと, $\begin{cases} f((2^n)) = (2^{n+1}) = 2(2^n) + 0(3^n) \\ f((3^n)) = (3^{n+1}) = 0(2^n) + 3(3^n) \end{cases}$ より, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ がこの基底に関する $f$ の行列表示であるとわかる.
定義域と終域の基底を共に $(b_0, b_1) = (1, 0)$ を満たす $V$ 内の数列 $b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ と $(c_0, c_1) = (0, 1)$ を満たす $V$ 内の数列 $c_n = -2^n + 3^n$ にすると, 左下の計算により, この基底に関する表現行列が
$\begin{cases} f((1, 0, -6, \cdots)) = (0, -6, \cdots) = -6c_n = 0b_n + (-6)c_n \\ f(0, 1, 5, \cdots) = (1, 5, \cdots) = (1, 0, \cdots) + (0, 5, \cdots)1b_n + 5c_n \end{cases}$ より $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ がこの基底に関する $f$ の行列表示であるとわかる.
$\begin{cases} (1, 0) = 3(1, 2) - 2(1, 3) \\ (0, 1) = -1(1, 2) + 1(1, 3) \end{cases}$ より, 基底の変換行列 $P$ は $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. 確かに $B = P^{-1}AP$ が成立.

**問1**　一次変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の定義域と終域の標準基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関する表現行列を $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ とする. 定義域の基底と終域の基底を次のように取り換えた場合, 表現行列はどうなるか.

**(8)**　$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ と $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.　**(9)**　$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ と $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

**(10)**　$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ と $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.　**(11)**　$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ と $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$.

**(12)**　正規直交基底で $A$ を簡単にする物は？　**(13)**　(4)〜(7) に出てくる $A$ を簡単にする基底は？

**次回やること**　第 5 章 計量線形空間, 第 5.1 節 計量とノルム, 第 5.2 節 直交系・正規直交基底 など.

# 線形代数学第二 ４類Ｒクラス 第２７回

**前回の補足**　復習テスト $\boxed{2}$ の平面 $\Pi : x = -2y - 3z$ の成す $\mathbb{R}$ 部分ベクトル空間は 2 次元である．なぜなら, $\Pi$ 上の任意の点の位置ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} -2y-3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せ, 表わし方が一意 (一通り) であるから．一意性は, この 2 本のベクトルが $\mathbb{R}$ 上一次独立であることからわかる．

**1 月 8 日 (水) の復習テスト**　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと．

$\boxed{\mathbf{1}}$　$V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^3$ とおく．$V$ と $W$ に標準基底 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ を入れたとき, 線形写像 $f : V \to W$ の表現行列が $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ であるとする．

$V$ の基底と $W$ の基底を次のように取り換えた場合, 表現行列はどうなるか．

**(1)**　$V$ の基底を $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W$ の基底を $\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

**(2)**　$V, W$ 共に基底を $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 10 \\ -17 \end{pmatrix} \right\rangle$

**(発展)**　$V, W$ 共通の正規直交基底で表現行列をできるだけ簡単にするものを探してみよ．

**今日やること**　第 5 章 計量線形空間, 第 5.1 節 計量とノルム, 第 5.2 節 直交系・正規直交基底 など．

**基底の変換行列** (156 頁)　$K$ を体, $V$ を $K$ ベクトル空間とする．
$\mathcal{V} = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \cdots, \overrightarrow{v_n} \rangle$ と $\mathcal{W} = \langle \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}, \cdots, \overrightarrow{w_n} \rangle$ の両方が $V$ の基底であるとする．
$(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}, \cdots, \overrightarrow{w_n}) = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \cdots, \overrightarrow{v_n})P$ で定まる行列 $P$ を基底 $\mathcal{V}$ から基底 $\mathcal{W}$ への基底の変換行列という．

**実線形空間の向き** (166 頁)　$V$ を実ベクトル空間とする．$V$ の 2 つの基底
$\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ が同じ向きを定めるとは, $\mathcal{V}$ から $\mathcal{W}$ への基底の変換行列の行列式が正であることをいう．
$V = \mathbb{R}^n$ のときには, 標準基底の定める向きを右手系, そうでない方を左手系と呼ぶ．

**複素共役**　複素数 $a + bi$ ($a, b$ は実数, $i = \sqrt{-1}$) に対して, その共役 (共軛) $\overline{a + bi}$ を $a - bi$ で定義する．

**標準エルミート内積の定義** (178 頁)

2 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ の 2 ベクトルの標準エルミート内積 $\left( \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right)$ を $z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2}$ で定める．実数 $x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, v_1, u_2, v_2$ を用いて表すと,

$$\left( \begin{pmatrix} x_1 + y_1 i \\ x_2 + y_2 i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 + v_1 i \\ u_2 + v_2 i \end{pmatrix} \right) = (x_1 + y_1 i)(u_1 - v_1 i) + (x_2 + y_2 i)(u_2 - v_2 i)$$
$$= (x_1u_1 + y_1v_1 + x_2u_2 + y_2v_2) + (y_1u_1 - x_1v_1 + y_2u_2 - x_2v_2)i$$

となる．$\mathbb{C}^3$ や $\mathbb{C}^4$ の場合も同様．これは数学でよく使われる定義である．
教科書では, 標準エルミート内積 $\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle$ を $\overline{z_1}w_1 + \overline{z_2}w_2$ で定めている．この記号や定義は物理でよく使われる．

**標準エルミート内積の性質** (176 頁)　任意の $\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in \mathbb{C}^n$ と任意の複素数 $k_1, k_2$ に対して,
(i)　$(\vec{v}, \vec{v}) \geqq 0$. 等号成立は $\vec{v} = \vec{0}$ のときのみ (非退化正値性).
(ii)　$(\vec{w}, \vec{v}) = \overline{(\vec{v}, \vec{w})}$.
(iii)　$(k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2}, \vec{w}) = k_1(\overrightarrow{v_1}, \vec{w}) + k_2(\overrightarrow{v_2}, \vec{w})$,　　$(\vec{v}, k_1\overrightarrow{w_1} + k_2\overrightarrow{w_2}) = \overline{k_1}(\vec{v}, \overrightarrow{w_1}) + \overline{k_2}(\vec{v}, \overrightarrow{w_2})$.
一般に, ベクトル空間 $V$ において, (i),(ii),(iii) を満たす $(\vec{v}, \vec{w})$ が定まっているとき, $V$ を計量線形空間とか内積空間と呼ぶ (177 頁).

**直交の定義** (179 頁)　$V$ を内積空間とする．$\vec{v}, \vec{w} \in V$ に対して, $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ のとき, $\vec{v}$ と $\vec{w}$ は直交する

と言い, $\vec{v} \perp \vec{w}$ と書く.
$V$ の線形部分空間 $W$, $W_1$, $W_2$ に対して, $\vec{v} \perp W$ や $W_1 \perp W_2$ も同様に定義する.
<u>例 1</u>　$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$　<u>例 2</u>　$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$　<u>例 3</u>　$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ は直交しない.

**長さの定義** (179 頁)

$\mathbb{C}^2$ のベクトルの長さ (ノルム) $\left|\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right|$ を $\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} = \sqrt{z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}}$ で定義する.
実数 $x_1, y_1, x_2, y_2$ を用いて表すと,
$\left|\begin{pmatrix} x_1 + y_1 i \\ x_2 + y_2 i \end{pmatrix}\right| = \sqrt{|x_1 + y_1 i|^2 + |x_2 + y_2 i|^2} = \sqrt{(x_1 + y_1 i)(x_1 - y_1 i) + (x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)}$
$= \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 + {y_2}^2}$ となる.
$\mathbb{C}^3$ や $\mathbb{C}^4$ の場合も同様.　　教科書では $||\vec{v}||$ と書いている.

**長さと内積** (179 頁)　任意の $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して, $|\vec{v}| = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$ が成り立つ.
一般に, 内積空間 $V$ において, これを $\vec{v}$ の長さとかノルムという.
コーシー・シュワルツの不等式 $|(\vec{v}, \vec{w})| \leqq |\vec{v}||\vec{w}|$ や
パップスの中線定理 $|\vec{v} + \vec{w}|^2 + |\vec{v} - \vec{w}|^2 \leqq 2(|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2)$ も成り立つ (180 頁).

**ノルムの性質** (182 頁)

任意の $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^n$ と任意の複素数 $k$ に対して,
(i)　$|\vec{v}| \geqq 0$. 等号成立は $\vec{v} = 0$ のときのみ (非退化正値性).
(ii)　$|k\vec{v}| = |k||\vec{v}|$.
(iii)　$|\vec{v} + \vec{w}| \leqq |\vec{v}| + |\vec{w}|$.　(三角不等式)
一般に, $K$ ベクトル空間 $V$ において, (i),(ii),(iii) を満たす $|\vec{v}|$ が定まっているとき, これを $\vec{v}$ の長さとかノルムと言い, $V$ をノルム空間と呼ぶ (182 頁).

**距離の定義** (183 頁)

$\mathbb{C}^2$ の 2 点 (2 ベクトル) の距離 $d\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right)$ を $\sqrt{|z_1 - w_1|^2 + |z_2 - w_2|^2}$ で定義する.
実数 $x_1, y_1, x_2, y_2, u_1, v_1, u_2, v_2$ を用いて表すと,
$d\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 i \\ x_2 + y_2 i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 + v_1 i \\ u_2 + v_2 i \end{pmatrix}\right) = \sqrt{|(x_1 - u_1) + (y_1 - v_1)i|^2 + |(x_2 - u_2) + (y_2 - v_2)i|^2}$
$= \sqrt{(x_1 - u_1)^2 + (y_1 - v_1)^2 + (x_2 - u_2)^2 + (y_2 - v_2)^2}$ となる.
$\mathbb{C}^3$ や $\mathbb{C}^4$ の場合も同様.

**距離の性質** (183 頁)　任意の $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^n$ と任意の複素数 $k$ に対して,
(i)　$d(\vec{v}, \vec{w}) \geqq 0$. 等号成立は $\vec{v} = \vec{w}$ のときのみ (非退化正値性).
(ii)　$d(\vec{w}, \vec{v}) = d(\vec{v}, \vec{w})$.　(対称性)
(iii)　$d(\vec{v}, \vec{w}) \leqq d(\vec{v}, \vec{u}) + d(\vec{u}, \vec{w})$.　(三角不等式)
一般に, 集合 $X$ において, (i),(ii),(iii) を満たす $d(x, y)$ が定まっているとき, これを $x$ と $y$ の距離と言い, $X$ を距離空間と呼ぶ (183 頁).

**エルミート行列** (184 頁)

複素行列 $H$ に対して, 成分の全部を共役にした行列を $\overline{H}$ と書く. ${}^t\overline{H}$ を $H^*$ と書き, $H$ の共役転置行列とか随伴行列という.
$H^*H = E$ かつ $HH^* = E$ を満たす行列 $H$ をユニタリ行列という.
$H = H^*$ を満たす行列 $H$ をエルミート行列という.

**グラム・シュミットの直交化法** (190 頁)

<u>問</u>　$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ を直交化すると, $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ になることを示せ.
また, これらを単位ベクトルにすることにより正規直交基底 $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ を得ることを示せ.

<u>**次回やること**</u>　第 5.3 節 計量線形空間に関わる種々の写像, 第 5.4 節 計量線形空間の線形部分空間と直交射影, 第 5.5 節 計量線形空間における射影と鏡映など.

# 線形代数学第二 ４類Ｒクラス 第２８回

**前回やったこと**　複素ベクトルの場合も次の公式が成立する.

**正射影ベクトルの公式**　$\vec{v}$ を $\vec{a}$ 上へ正射影してできるベクトルを $\vec{p}$ とおくと, $\vec{p} = \dfrac{(\vec{v},\vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$.

一般に $\left(\vec{v} - \dfrac{(\vec{a},\vec{v})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}, \vec{a}\right) = (\vec{v},\vec{a}) - (\vec{a},\vec{v}) \neq 0$ なので, $\dfrac{(\vec{a},\vec{v})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}^2$ だと間違いになる.

**1 月 15 日 (水) の復習テスト**　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

$\boxed{\mathbf{1}}$　$V = \mathbb{C}^2, W = \mathbb{C}^2$ とおく. 線形写像 $f : V \to W$ の定義域と終域の標準基底 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ に関する表現行列を $A = \begin{pmatrix} 2+i & -1-2i \\ 1+2i & 2+i \end{pmatrix}$ とする.

**(1)**　$V$ と $W$ の基底を共に $\mathcal{B} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$ に取り換えた場合の $f$ の表現行列を求めよ.

**(2)**　$U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ がユニタリ行列であることを示し, $U$ を用いて $A$ を対角化せよ.

**(3)**　$A^*A$ と $AA^*$ は共に $H = \begin{pmatrix} 10 & -6i \\ 6i & 10 \end{pmatrix}$ になることを示せ.

**(4)**　$H$ がエルミート行列であることを示せ. また, $H$ の表す線形写像 $g : V \to W$ において, $V$ と $W$ の基底を共に $\mathcal{B}$ に変更したときの $g$ の表現行列を求めよ.

**今日やること**　第 5.2 節 直交系・正規直交基底, 第 5.3 節 計量線形空間に関わる種々の写像, 第 5.4 節 計量線形空間の線形部分空間と直交射影, 第 5.5 節 計量線形空間における射影と鏡映など.

**グラム・シュミットの直交化法** (190 頁)　正射影ベクトルの公式を用いると, $\mathbb{C}^3$ の一次独立な 3 ベクトル $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ を次の手続きで直交する 2 ベクトル $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ にすることができる.

$$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1}, \quad \overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a_2} - \frac{(\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{b_1})}{|\overrightarrow{b_1}|^2}\overrightarrow{b_1}, \quad \overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{a_3} - \frac{(\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{b_1})}{|\overrightarrow{b_1}|^2}\overrightarrow{b_1} - \frac{(\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{b_2})}{|\overrightarrow{b_2}|^2}\overrightarrow{b_2}. \qquad \cdots\cdots\cdots☆$$

$\overrightarrow{c_1} = \dfrac{\overrightarrow{b_1}}{|\overrightarrow{b_1}|}, \quad \overrightarrow{c_2} = \dfrac{\overrightarrow{b_2}}{|\overrightarrow{b_2}|}, \quad \overrightarrow{c_3} = \dfrac{\overrightarrow{b_3}}{|\overrightarrow{b_3}|}$ は $\mathbb{C}^3$ の正規直交基底になる.

例１　$\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ のとき, $\overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b_2} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2i \end{pmatrix}, \overrightarrow{b_3} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \\ 1+i \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{c_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{c_2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2i \end{pmatrix}, \overrightarrow{c_3} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \\ 1+i \end{pmatrix}$ となる.

**QR 分解** (191 頁)　$A = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$ を複素 3 次正方行列で, $\det A \neq 0$ を満たすものとする. 上の☆式より,

$$A = (|\overrightarrow{b_1}|\overrightarrow{c_1}, |\overrightarrow{b_2}|\overrightarrow{c_2} + (\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{c_1})\overrightarrow{c_1}, |\overrightarrow{b_3}|\overrightarrow{c_3} + (\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{c_1})\overrightarrow{c_1} + (\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{c_2})\overrightarrow{c_2}) = (\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3})\begin{pmatrix} |\overrightarrow{b_1}| & (\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{c_1}) & (\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{c_1}) \\ 0 & |\overrightarrow{b_2}| & (\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{c_2}) \\ 0 & 0 & |\overrightarrow{b_3}| \end{pmatrix}.$$

ここで, $\langle \overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3} \rangle$ は正規直交基底なので, $|\overrightarrow{c_1}| = 1$, $|\overrightarrow{c_2}| = 1$, $|\overrightarrow{c_3}| = 1$, $(\overrightarrow{c_1},\overrightarrow{c_2}) = 0$, $(\overrightarrow{c_2},\overrightarrow{c_3}) = 0$, $(\overrightarrow{c_3},\overrightarrow{c_1}) = 0$ が成り立つ. よって, $U = (\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3})$ は ${}^t U\overline{U} = E$ を満たす. 複素共役をとると, $U^*U = E$. したがって, $U^* = U^{-1}$ より $UU^* = E$. 以上より $U$ はユニタリ行列になる.

$U$ の右側は対角成分が正の上三角行列になっている. この分解は一意的である (一通りしかない).

$\det A = 0$ の場合は $A =$ (ユニタリ行列)(対角成分が 0 以上の上三角行列) となる. この場合の分解は一意ではない.

$n$ 次正方行列の場合も同様.

**主座小行列式** (192 頁)

$n$ 次正方行列 $A$ の 1 行目〜$k$ 行目と 1 列目〜$k$ 行列目の交わりである $k$ 次正方行列 $A_k$ を第 $k$ 首座小行列, その行列式 $\det A_k$ を第 $k$ 首座小行列式という.
$A$ がエルミート行列とする. このとき, $\det A_1 > 0$, $\det A_2 > 0$, $\cdots \det A_n > 0$ であることと $A$ の固有値がすべて正であることは同値である. このような, $A$ を正値エルミート行列という.
また, 次のこととも同値である. 任意の $\vec{v} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して, $(z_1, z_2, \cdots, z_n) A \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix} \geqq 0$ となり, 等号は $\vec{v} = \vec{0}$ のときのみとなる. これを正値エルミート 2 次形式という.
<u>例 2</u>　$H = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & -2i \\ 0 & 2i & 5 \end{pmatrix}$ は正定値エルミート行列である.
**コレスキー分解** (194 頁)　$n$ 次正方行列 $H$ が正値エルミート行列のとき, 対角成分が正の下三角行列 $L$ が存在して, $H = LL^*$ が成り立つ. この分解は一意である.
**内積と随伴行列** (194 頁)
$A^* = {}^t\overline{A}$ を $A$ の随伴行列 (共役転置行列) とする. このとき, $(A^*)^* = A$ が成り立つ. また, 任意の $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^n$ に対して, $(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, A^*\vec{w})$ が成り立つ.
逆に, 任意の $\vec{v}\vec{w} \in \mathbb{C}^n$ に対して, $(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, B\vec{w})$ が成り立つなら $B = A^*$ である.
$(\vec{v}, A\vec{w}) = (A^*\vec{v}, \vec{w})$ も成り立つ.
特に $A$ がエルミート行列 $H$ なら, $(H\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, H\vec{w})$ が成り立つ.
特に $A$ がユニタリ行列 $U$ なら, $(U\vec{v}, U\vec{w}) = (\vec{v}, U^*U\vec{w}) = (\vec{v}, E\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$ が成り立つ. つまり, 計量 (内積) が保存される. したがって, ユニタリ行列による一次変換では, 長さや角度が保たれる.
**問 1**　複素ベクトル空間 $V, W$ に計量 (内積) が定まっているとする. 線形写像 $f : V \to W$ が長さを保つなら, 内積を保つことを示せ.
**問 2** (196 頁)　複素ベクトル空間 $V, W$ に計量 (内積) が定まっているとする. 線形とは限らない写像 $f : V \to W$ が内積を保つなら, 線形写像になることを示せ.
一般に, 距離空間 $X, Y$ に対して, $f : X \to Y$ が長さを保つとき, $f$ を等長写像という.
**正規行列**
$A^*A = AA^*$ が成り立つ行列を正規行列という. $A$ がユニタリ行列で対角化できるための必要十分条件は $A$ が正規行列であること.
$\det A \neq 0$ を満たす行列, つまり $A^{-1}$ が存在するを可逆行列とか正則行列という. 似た用語なので, 混乱しないこと.
**直交補空間** (201 頁)
計量ベクトル空間 $V$ の部分ベクトル空間を $W$ とおく. $V$ のベクトルで $W$ と直交するもの全体を $W^\perp$ と書く. これは $V$ の部分ベクトル空間になり, $W$ の直交補空間という.
$(W^\perp)^\perp = W$, $W_1 \subset W_2$ ならば ${W_1}^\perp \supset {W_2}^\perp$, $(W_1 + W_2)^\perp = {W_1}^\perp \cap {W_2}^\perp$, $(W_1 \cap W_2)^\perp = {W_1}^\perp + {W_2}^\perp$ などが成り立つ.
**正射影と鏡映** (208 頁)
最初に書いたように, $\vec{v}$ を $\vec{a}$ 上へ正射影してできるベクトルを $\vec{p}$ とおくと, $\vec{p} = \dfrac{(\vec{v}, \vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ となる.
原点を通り $\vec{a}$ に垂直な超平面 $W$ に関する鏡映は, $\vec{v} \mapsto \vec{v} - 2\dfrac{(\vec{v}, \vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ となる.
教科書ではエルミート内積の定義がプリントと異なるので, 正射影は, $\vec{p} = \dfrac{(\vec{a}, \vec{v})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$,
鏡映は, $\vec{v} \mapsto \vec{v} - 2\dfrac{(\vec{a}, \vec{v})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ となっている.
**<u>次回やること</u>**　第 6 章 行列や線形変換の対角化 第 6 節 行列や線形変換の固有値と固有空間など

# 線形代数学第二 ４類Ｒクラス 第２９回

**中間試験について**　最高 35 点, 最低 2 点, 平均約 18 点, 平均得点率約 51 %

**前回の復習テストの訂正**　(2)　の $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ の間違い. 元の行列では $U^*U = 2E$ かつ $UU^* = 2E$ となり, ユニタリ行列にならない.

**1 月 22 日 (水) の復習テスト**　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

$\boxed{\mathbf{1}}$　$H$ を正値エルミート (Hermite) 行列とする. つまり, 主座小行列式がすべて正とする. $(\vec{v}, \vec{w})_H$ を ${}^t\vec{v}H\overline{\vec{w}}$ で定義すると, $(\vec{v}, \vec{v})_H \geqq 0$ を満たす (193 頁命題 5.2.30). この内積を用いて長さ $|\vec{v}|_H$ を $\sqrt{(\vec{v}, \vec{v})_H}$ で定義する.　$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ が一次独立のとき,

$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1}$,　$\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{a_2} - \dfrac{(\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1})_H}{|\overrightarrow{b_1}|_H{}^2}\overrightarrow{b_1}$,　$\overrightarrow{c_1} = \dfrac{\overrightarrow{b_1}}{|\overrightarrow{b_1}|_H}$,　$\overrightarrow{c_2} = \dfrac{\overrightarrow{b_2}}{|\overrightarrow{b_2}|_H}$ とおく.　次の 5 つを示せ.

**(1)**　$(\vec{w}, \vec{v})_H = \overline{(\vec{v}, \vec{w})_H}$.

**(2)**　$(k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2}, \vec{w})_H = k_1(\overrightarrow{v_1}, \vec{w})_H + k_2(\overrightarrow{v_2}, \vec{w})_H$ と
$(\vec{v}, \ell_1\overrightarrow{w_1} + \ell_2\overrightarrow{w_2})_H = \ell_1(\vec{v}, \overrightarrow{w_1})_H + \ell_2(\vec{v}, \overrightarrow{w_2})_H$.

**(3)**　$(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2})_H = 0$ と $(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_1})_H = 0$.

**(4)**　行列 $(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2})$ に対して, ${}^t(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2})H\overline{(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**(5)**　$\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき, $L = {}^t(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2})^{-1}$ は対角成分が正の下三角行列であり, $H = LL^*$ となる (コレスキー分解).

**今日やること**　第 6 章 行列や線形変換の対角化 第 1 節 行列や線形変換の固有値と固有空間など

**ユニタリ行列の列ベクトル**　$U^*U = E$ かつ $UU^* = E$ を満たす $U$ をユニタリ行列というのであった. $n$ 次正方行列がユニタリ行列であるための必要十分条件は, 複素内積 (エルミート内積) に関して列ベクトルが正規直交基底になることである.

証明　$U^*U = E \iff {}^t\overline{U}U = E \iff {}^tU\overline{U} = E$ である.

例えば, ユニタリ行列 $U$ が 2 次正方行列 $U = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ のとき, $\begin{pmatrix} {}^t\overrightarrow{u_1} \\ {}^t\overrightarrow{u_2} \end{pmatrix}(\overline{\overrightarrow{u_1}}, \overline{\overrightarrow{u_2}}) = E$

$\iff \begin{pmatrix} {}^t\overrightarrow{u_1}\overline{\overrightarrow{u_1}} & {}^t\overrightarrow{u_1}\overline{\overrightarrow{u_2}} \\ {}^t\overrightarrow{u_2}\overline{\overrightarrow{u_1}} & {}^t\overrightarrow{u_2}\overline{\overrightarrow{u_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}) = 1,\ (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = 0,\ (\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1}) = 0,\ (\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_2}) = 1.$

$U$ が $n$ 次の場合も同様であり, $U$ のどの列ベクトルも単位ベクトルであり, どの 2 本も直交する.
行ベクトルについても同じことが成り立つ.
直交行列は実数成分のユニタリ行列なので, 実内積に関して同じことが成り立つ.

**正規行列の対角化**　$A^*A = AA^*$ を満たす行列 $A$ を正規行列というのであった.
$A$ がユニタリ行列 $U$ を用いて, $U^{-1}AU = D$ ($D$ は対角行列) の形にできるための必要十分条件は, $A$ が正規行列であることである.

証明　$A$ の固有値の一つを $\lambda$ とする. $\lambda$ に対応する固有空間を $W_\lambda$ とする. つまり, $W_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{C}^n \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v}\}$ とおく. $W_\lambda$ は $A$ の不変部分空間となる. つまり $AW_\lambda \subset W_\lambda$.
$W_\lambda$ は $A^*$ の不変部分空間にもなる.
$W_\lambda$ の直交補空間を $W_\lambda^\perp$ とおく. つまり, $W_\lambda^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{C}^n \mid \vec{v}\cdot\vec{w} = 0\ {}^\forall\vec{w} \in W_\lambda\}$. これも $A$ の不変部分空間となる. $W_\lambda$ と $W_\lambda^\perp$ の正規直交基底を並べてユニタリ行列 $U$ を作ると, $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$　($B, C$ は正規行列) となる. 行列のサイズに関する帰納法で証明された.
エルミート行列は正規行列の特別な場合なので, ユニタリ行列で対角化できる.
対称行列は実数成分のエルミート行列なので, 直交行列 (ユニタリ行列の実数版) で対角化できる.

**エルミート行列の固有値**　$H^* = H$ を満たす行列 $H$ をエルミート行列というのであった.
エルミート行列 $H$ の固有値はすべて実数である.

証明　$H$ の固有値を $\lambda$, 対応する単位固有ベクトルを $\vec{v}$ とおく. 標準エルミート内積を $(\vec{a}, \vec{b})$ のように括弧で表わすことにする.

$\lambda = \lambda(\vec{v},\vec{v}) = (\lambda\vec{v},\vec{v}) = (H\vec{v},\vec{v}) = (\vec{v},H^*\vec{v}) = (\vec{v},H\vec{v}) = (\vec{v},\lambda\vec{v}) = \overline{\lambda}(\vec{v},\vec{v}) = \overline{\lambda}$
よって, $\lambda$ は実数である. 実対称行列は実数成分のエルミート行列なので, 固有値はすべて実数である.

**エルミート行列の固有ベクトル** エルミート行列 $H$ の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する.

証明　固有値 $\lambda,\mu$ に対応する単位固有ベクトルを $\vec{v},\vec{w}$ とおく.
$\lambda(\vec{v},\vec{w}) = (\lambda\vec{v},\vec{w}) = (H\vec{v},\vec{w}) = (\vec{v},H^*\vec{w}) = (\vec{v},H\vec{w}) = (\vec{v},\mu\vec{w}) = \overline{\mu}(\vec{v},\vec{w}) = \mu(\vec{v},\vec{w})$. $\lambda \neq \mu$ より $(\vec{v},\mu\vec{w}) = 0$. よって $\vec{v} \perp \vec{w}$.
実対称行列は実数成分のエルミート行列なので, 異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する.

**エルミート行列の符号**

エルミート行列 $H$ の固有値が全て正 (負) のとき, $H$ は正定値 (負定値) であるという. エルミート行列 $H$ の固有値が全て 0 以上 (0 以下) のとき, $H$ は半正定値 (半負定値) であるという.
実対称行列に対しても同様に正定値等を定義する.
エルミート形式 ${}^t\vec{v}H\overline{\vec{v}}$ に対しても同様に正定値等を定義する.
$H$ が正定値であることとエルミート形式が $\vec{v} \neq \vec{0}$ のとき ${}^t\vec{v}H\overline{\vec{v}} > 0$ であることが同値である.
$H$ が半正定値であることとエルミート形式が ${}^t\vec{v}H\overline{\vec{v}} \geqq 0$ であることが同値である.
エルミート行列 $H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ が正定値であることと, 首座小行列式 $\det a, \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}, \det H$ が全て正であることと同値である. $H$ のサイズが大きい場合も同様.

**極分解**

$A$ が正則行列のとき, ユニタリ行列 $U$ と正値エルミート行列 $H$ を用いて $A = UH$ とおける. $A$ に対して, $U, H$ は唯一に定まる.

証明　$A^*A$ は正値エルミート行列なので, $A^*A = H^2$ を満たす正値エルミート行列 $H$ が唯一存在する. $AH^{-1}$ はユニタリ行列 $U$ になるので, $A = UH$ とおける. この分解は $A$ に対して唯一である. (証明終り)

**カルタン分解**　$A$ が正則行列のとき, ユニタリ行列 $U_1, U_2$ を用いて $A = U_1DU_2$ の形にできる.

証明　正値エルミート行列 $H$ はユニタリ行列 $U_3$ を用いて対角成分が正の対角行列 $D = U_3^{-1}HU_3$ にできる. これを上の $A = UH$ に代入すると, ユニタリ行列 $U_1, U_2$ を用いて, $A = U(U_3DU_3^{-1}) = (UU_3)DU_3^{-1}$ となる. $UU_3 = U_1, U_3^{-1} = U_2$ とおけばよい.　(証明終わり)

　この分解は $A$ に対して唯一ではない.
エルミート行列を実対称行列, ユニタリ行列を直交行列に置き換えた命題も成立する.

**行列の平方根**

$A$ を正値エルミート行列 (固有値がすべて正のエルミート行列) とする. $B^2 = A$ を満たす正値エルミート行列 $B$ が唯一存在する.

証明　エルミート行列は正規行列なので, ユニタリ行列 $U$ を用いて $D = U^{-1}AU$ が対角行列にできる. $D$ の対角成分は $A$ の固有値なので, 全て正である. これらを全て平方根にした行列を $D'$ とおく, $B = UD'U^{-1}$ はエルミート行列であり, 正値である.　(証明終わり)

**コレスキー分解の別証明**

$A$ が正値エルミート行列ならば, $A = LL^*$ を満たす対角成分が正の下三角行列 $L$ が存在する.

証明　$B^2 = A$ を満たす正値エルミート行列 $B$ が唯一存在する. グラム・シュミットの直交化法により, $B = UC$ を満たすユニタリ行列 $U$ と対角成分が正の上三角行列 $C$ が存在する.
$A = B^2 = B^*B = (UC)^*(UC) = (C^*U^*)(UC) = C^*(U^*U)C = C^*EC = C^*C$.
$L = C^*$ とおくと, $L$ は下三角行列であり, $A = LL^*$ となる　(証明終わり)

**次回やること**　第 6.2 節 行列や線形空間の対角化, 第 6.3 節 正規行列・正規変換とその対角化, 第 6.4 節 ジョルダン標準形, 第 6.5 節 可換な線形変換, 第 6.6 節 スペクトル分解, 第 7 章 二次形式など.

# 線形代数学第二 ４類Ｒクラス 第３０回

**1 月 29 日 (水) の復習テスト**　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

**1**　以下, 登場する行列はすべて複素成分の $n$ 次正方行列とする. $C_1, C_2$ を対角成分が正の上三角行列とする. $U_1, U_2$ をユニタリ行列する.

**(1)**　$C_2^{-1}$ が対角成分が正の上三角行列であることを示せ.

**(2)**　$C_2^{-1}C_1$ が対角成分が正の上三角行列であることを示せ.

**(3)**　$U_2U_1^{-1}$ がユニタリ行列であることを示せ.

**(4)**　対角成分が正の上三角行列であり, かつ, ユニタリ行列である行列は単位行列 $E$ しかないことを示せ.

**(5)**　$C_1U_1 = C_2U_2$ ならば $C_1 = C_2$ かつ $U_1 = U_2$ を示せ.

**(発展)**　正値エルミート行列の平方根の一意性を示せ. つまり, $B_1, B_2$ が正値エルミート行列のとき, ${B_1}^2 = {B_2}^2$ なら $B_1 = B_2$ を示せ.

**今日やること**　第 6.2 節 行列や線形空間の対角化, 第 6.3 節 正規行列・正規変換とその対角化, 第 6.4 節 ジョルダン標準形, 第 6.5 節 可換な線形変換, 第 6.6 節 スペクトル分解, 第 7 章 二次形式など.

**固有値・固有ベクトル・固有空間** (217 頁)

$n$ を正の整数とし, $K$ を実数全体 $\mathbb{R}$, 複素数全体 $\mathbb{C}$, 有理数全体 $\mathbb{Q}$ などの体 (たい) とする. ここで, 体とは四則演算について閉じている集合 (0 で割ることを除く) であった.

$V$ を $\mathbb{K}^n$, $A$ を $K$ を成分とする $n$ 次正方行列とする.

$A\vec{v} = \alpha\vec{v}$ かつ $\vec{v} \neq \vec{0}$, つまり, $(A - \alpha E)\vec{v} = \vec{0}$ かつ $\vec{v} \neq \vec{0}$ を満たす $\alpha \in K$ を $A$ の固有値, $\vec{v} \in V$ を $A$ の固有値 $\alpha$ に対応する固有ベクトルという.

固有値 $\alpha$ に対応する固有ベクトルの全体に $\vec{0}$ を付け加えた集合

$V(\alpha) = \{\vec{v} \in V \mid (A - \alpha E)\vec{v} = \vec{0}\} \neq \{\vec{0}\}$ を $A$ の固有値 $\alpha$ に対応する固有空間という.

$V(\alpha) = \mathrm{Ker}(A - \alpha E)$ とも書ける.

**最小多項式** (286 頁)　$f(\alpha) = 0$ を満たすモニックな (最高次の係数が 1 の) $K$ 係数の多項式 $f(x)$ のうち, 次数が最小のものを $\alpha$ の $K$ 上の最小多項式という.

例１　$\sqrt[4]{2}i$ の最小多項式は, $\mathbb{Q}$ 上では $x^4 - 2$,　$\mathbb{R}$ 上では $x^2 + \sqrt{2}$,　$\mathbb{C}$ 上では $x - \sqrt[4]{2}i$ となる.

例２　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の最小多項式は,

$A = kE$ のとき $x - k$,　$A \neq kE$ のとき, $x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$.

**対角化**　$A$ の各固有空間 $V(\alpha)$ の次元の和が $\dim V = n$ になる, つまり, 固有ベクトルが $n$ 次元分あれば, それらを基底にすると, $A$ を対角行列 $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ にすることができる. ここで, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ は $A$ の固有値である. この並び順は固有ベクトルの順番を入れ換えれば, 好きにできる. 各固有値に対応する固有ベクトルを $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ とし, $P = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n})$ とおくと, $AP = PD$ であるから, $P^{-1}AP = D$ となる. これを $A$ の対角化という.

$A$ が対角化可能であることと, 最小多項式が 異なる1 次式に分解されることは同値である.

例３　$K = \mathbb{C}$ のとき, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 固有方程式は $\lambda^2 + 1 = 0$ なので, 固有値は $\lambda = \pm i$. 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \in V(i)$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in V(-i)$ が $\mathbb{K}^2$ を張るので, これらを基底にすると, $A$ は対角行列 $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ になる. $P = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right)$ とおくと, $P^{-1}AP = D$ が成り立つ.

係数 $K$ を $\mathbb{R}$ に制限すると, $\mathbb{R}$ 内に固有値が存在しないので, 対角化できない.

**歪エルミート行列** (233 頁)

$A^* = -A$ を満たす複素行列を歪エルミート行列という. 歪エルミート行列の固有値は全て純虚数で

ある. これは, 正規行列の一種である. 正規行列は直交する $n$ 本の固有ベクトルを持つので, その長さを 1 にして並べて行列 $U$ を作るとユニタリ行列となるのであった. したがって, 歪エルミート行列 $A$ は, $U^{-1}AU = D$ の形に変形できる. ここで, $D$ は対角成分が純虚数の対角行列である.
${}^tA = -A$ を満たす実行列を交代行列という. これは, 実数成分の歪エルミート行列なので, 上と同じことが成り立つ.　　残念ながら, 交代行列を実数成分の世界で対角化することはできない.

**実正規行列** (234 頁)

実数成分の行列 $A$ が $A^*A = AA^*$ を満たすとき, つまり, ${}^tAA = A\,{}^tA$ を満たすとき, うまく直交行列 $T$ を選べば, $T^{-1}AT = D'$ とできる. ここで, $D'$ は対角線上に 実数の固有値または $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 形の行列が並び, それ以外の成分は 0 の行列.　　$a \pm bi$ は $A$ の実数でない固有値である.
交代行列は, 実正規行列の特別な場合なので, 同じことが成り立つ.

**広義固有空間・広義固有ベクトル** (239 頁)
$W(\alpha) = \{\vec{v} \in V \mid$ ある正の整数 $k$ に対して $(A-\alpha)^k\vec{v} = \vec{0}\} \neq \{\vec{0}\}$ を $A$ の 固有値 $\alpha$ に対応する広義固有空間という. $W(\alpha) = \mathrm{Ker}(A-\alpha) \cup \mathrm{Ker}(A-\alpha)^2 \cup \mathrm{Ker}(A-\alpha)^3 \cup \cdots$ とも書ける.
$\mathrm{Ker}(A-\alpha) \subset \mathrm{Ker}(A-\alpha)^2 \subset \mathrm{Ker}(A-\alpha)^3 \subset \cdots$ であるが, この部分空間の列は, ある所から先は等号になる.
$W(\alpha)$ の $\vec{0}$ でない元 (げん) を広義固有ベクトルという.

**ジョルダン標準形**　$A$ の固有空間の直和が $V$ に一致しない場合 (固有ベクトルが $\dim V = n$ 次元分ない場合) は $A$ を対角化することはできない. しかし, 広義固有ベクトルを並べた行列 $P$ を使うと, $P^{-1}AP = J$ の形にできる. ここで, $J$ は対角成分に $J_1(\alpha) = (\alpha)$, $J_2(\alpha)\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ や $J_3(\alpha)\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\cdots$ など の形が並び, それ以外の成分が 0 の行列である. この $J$ を $A$ のジョルダン標準形という. $J_k(\alpha)$ の形の行列をジョルダン細胞という.

<u>例 4</u>　4 次行列 $A$ の固有多項式が $(\lambda-2)^4 = 0$ のとき, $A$ ジョルダン標準形の可能性は以下の 5 通り.

$$J_1 = 2E,\ J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ J_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ J_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ジョルダン細胞の個数は, 固有空間の次元と一致するので, 次のように場合分けできる.
(i)　固有値 2 に対応する固有空間 $V(2) = \mathrm{Ker}(A-2E)$ が 4 次元の場合, $J_1$ となる. この場合, 最初から $A = 2E$ となる.
(ii)　固有値 2 に対応する固有空間 $V(2) = \mathrm{Ker}(A-2E)$ が 3 次元の場合, $J_2$ となる. $P^{-1}AP = J_2$ を満たす $P$ を作るには, $W(2) = \mathrm{Ker}(A-2E)^2$ から固有ベクトルでない広義固有ベクトルを 1 本持って来る必要がある.
(iii)　固有値 2 に対応する固有空間 $V(2) = \mathrm{Ker}(A-2E)$ が 2 次元の場合, $J_3$ と $J_4$ の可能性がある. $W(2) = \mathrm{Ker}(A-2E)^2$ となるなら $J_3$, $W(2) = \mathrm{Ker}(A-2E)^3 \neq \mathrm{Ker}(A-2E)^2$ となるなら $J_4$ である.
(iv)　固有値 2 に対応する固有空間 $V(2) = \mathrm{Ker}(A-2E)$ が 1 次元の場合, $J_5$ となる. $P$ の列ベクトルは, $V(2) = \mathrm{Ker}(A-2E)$ から 1 本, $\mathrm{Ker}(A-2E)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A-2E)$ から 1 本, $\mathrm{Ker}(A-2E)^3 \setminus \mathrm{Ker}(A-2E)^2$ から 1 本, $\mathrm{Ker}(A-2E)^4 \setminus \mathrm{Ker}(A-2E)^3$ から 1 本選ぶことになる.

**相似** (219 頁)　$B = P^{-1}AP$ を満たす $P$ が存在するとき, $A$ と $B$ は相似であるという. $A$ と $B$ が相似なら, 固有多項式が一致する. ジョルダン標準形も一致する.

**可換と同時対角化** (248 頁)　$AB = BA$ を満たす $A, B$ を可換という. $A$ と $B$ が可換なら, 同じ $P$ で $P^{-1}AP$ と $P^{-1}BP$ を上三角行列にできる. しかし, ジョルダン標準型には, 一般にはできない.
$A$ と $B$ が可換で対角化可能なら, 同じ $P$ で $P^{-1}AP$ と $P^{-1}BP$ を対角行列にできる.

<u>**次回やること**</u>　補講 2 月 5 日 (水). 第 6.5 節 可換な線形変換, 第 6.6 節 スペクトル分解, 第 7 章 二次形式, 第 8 章 最小多項式と固有多項式, 第 9 章 2 次曲線と 2 次曲面など.

# 線形代数学第二 ４類Ｒクラス 第３１回

**2 月 5 日 (水) の復習テスト**　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

**1** (238 頁 問 6.3.15)　複素対称行列 $A$ を $A = \begin{pmatrix} 3i & 2 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$ とおく.

**(1)**　$A$ の固有値が $i$ の重解であり, ジョルダン標準形が $J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ であることを示せ.

**注**　実対称行列は必ず対角化でき, 対角成分は実数になるが, 複素の場合は対角化できない例があることがわかる.

**(2)**　エルミート行列 $A^*A = \begin{pmatrix} 13 & -8i \\ 8i & 5 \end{pmatrix}$ を対角行列 $D$ にするユニタリ行列 $U = \dfrac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2i & 2i \end{pmatrix}$ の見つけ方を説明せよ. 因みに $D = \begin{pmatrix} 9+4\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 9-4\sqrt{5} \end{pmatrix}$ となる.

**(3)**　${}^tUAU$ が対角行列になるユニタリ行列 $U$ を 1 つ求めよ.

**(発展)**　${}^tUAU$ が対角成分が正の対角行列になるユニタリ行列 $U$ を 1 つ求めよ.

**今日やること**　今までの復習

**2012 年度後期 Ａクラスの期末試験より**

**1**　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく.

$V = \langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2} \rangle$ と $V' = \langle \overrightarrow{a_3} \rangle$ が $A$ の固有空間となる.

**(1)**　$\mathrm{tr}\, A$ を求めよ.

**(2)**　$P_1 = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$ とおく. ${P_1}^{-1}AP_1$ を求めよ.

$\overrightarrow{a_1} \perp \overrightarrow{a_3}$, $\overrightarrow{a_2} \perp \overrightarrow{a_3}$ だが, $\overrightarrow{a_2}$ は $\overrightarrow{a_1}$ とは直交しない, したがって, $P_1$ は直交行列にならない.

**(3)**　$\vec{b} \in V$ で, $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a_1}$ を満たし, $x$ 成分が 1 のものを求めよ.

**(4)**　$P_2 = (\overrightarrow{a_1}, \vec{b}, \overrightarrow{a_3})$ とおく. ${P_2}^{-1}AP_2$ を求めよ.

**(5)**　${}^tP_2P_2$ を求めよ.

**(6)**　$P_2$ はまだ直交行列ではない. ${T_1}^{-1}AT_1$ が対角行列になる直交行列 $T_1$ を一つ求めよ.

答えは $T_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$(成分が分数にならない行列) の形で書くこと.

**(7)**　${}^tT_2AT_2$ が対角行列 $D_1$ となるような直交行列 $T_2$ を一つ求めよ. 答えは, 上と同じ形で書くこと.

**(8)**　$D_1$ を求めよ.

**(9)**　$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ を満たす正の数 $a, b, c$ を求めよ.

**(10)**　${}^tQAQ$ がシルベスターの標準型 $D_2$ となるような行列 $Q$ を一つ求めよ.

答えは $Q = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$(成分が分数にならない行列) の形で書くこと.

**(11)**　$D_2$ を求めよ.

**(12)**　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X\dfrac{\overrightarrow{a_1}}{\sqrt{2}} + Y\dfrac{\vec{b}}{\sqrt{6}} + Z\dfrac{\overrightarrow{a_3}}{\sqrt{3}}$ が $x^2+y^2+z^2+4xy+4yz-4zx=0$ の解となるとき, $X.Y.Z$ の関係式を求めよ.

**2**　$A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1+i & 1+i \\ 1-i & 1 & 1 \\ 1-i & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i-1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく.

$B = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2i & -2 & -2 \\ 2i & 1+3i & 1-i \\ 2i & 1-i & 1+3i \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b_3} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく.

$V_0 = \langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2} \rangle$ と $V_1 = \langle \overrightarrow{a_3} \rangle$ が $A$ の固有空間,　　$W_i = \langle \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2} \rangle$ と $W_1 = \langle \overrightarrow{b_3} \rangle$ が $B$ の固有空間となる.

**(13)**　$P_1 = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$ とおく. ${P_1}^{-1}AP_1$ を求めよ.

**(14)**　$B\overrightarrow{a_1}$ を $\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{a_2}$ の一次結合で表せ.　　**(15)**　$B\overrightarrow{a_2}$ を $\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{a_2}$ の一次結合で表せ.

**(16)**　$P_1^{-1}BP_1$ を求めよ.

$P_1^{-1}BP_1$ が対角行列にならないのは, $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ が $B$ の固有ベクトルではないからである.

**(17)**　$\overrightarrow{b_3}$ は $V_0$ に入るか否か.

**(18)**　$V_0 \cap W_i = \langle \vec{c} \rangle$ となる $\vec{c}$ で $y$ 座標が 1 のものを求めよ.

**(19)**　$P_2 = (\overrightarrow{b_3}, \vec{c}, \overrightarrow{a_3})$ とおく. $P_2^{-1}AP_2$ を求めよ.

**(20)**　$P_2^{-1}BP_2$ を求めよ.　　**(21)**　${P_2}^*P_2$ を求めよ.

$P_2$ で $A$, $B$ は同時対角化されたが, $P_2$ はユニタリ行列ではない.

**(22)**　$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a_3}$ を求めよ.　　**(23)**　$\overrightarrow{b_3} \cdot \overrightarrow{a_3}$ を求めよ.　　**(24)**　$\overrightarrow{b_3} \cdot \vec{c}$ を求めよ.

**(25)**　$|\overrightarrow{b_3}|$ を求めよ.　　**(26)**　$|\vec{c}|$ を求めよ.　　**(27)**　$|\overrightarrow{a_3}|$ を求めよ.

**(28)**　$D_1, D_2$ を対角行列とする. $U^{-1}AU = D_1$, $U^{-1}BU = D_2$ を満たすユニタリ行列 $U$ を一つ求めよ.

**2011 年後期 A クラスの期末試験より**

$\boxed{\mathbf{1}}$　$A^*$ を $A$ の共役転置行列, つまり $A^* = {}^t\overline{A}$ とおく. $E$ を単位行列とする. 常に次の性質が成り立つ複素行列の種類を選択肢から選び, その記号を書け. 答えは複数の場合もある.

**(1)**　$A^{-1}$ がある.　　**(2)**　$A^* = A$ が成り立つ.　　**(3)**　$A^*A = E$ が成り立つ.

**(4)**　$A^*A = AA^*$ が成り立つ.　　**(5)**　固有値が実数である.　　**(6)**　固有値の絶対値が 1 である.　　**(7)**　対角化できる.　　**(8)**　ユニタリ行列で対角化できる.

**選択肢**　**(a)** 正則行列　　**(b)** 正規行列　　**(c)** ユニタリ行列　　**(d)** エルミート行列

$\boxed{\mathbf{2}}$　$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は 0 の重解と 3 である.

**(9)**　$A$ の固有値 3 に対応する固有ベクトルのうち, 第 1 成分が 1 のもの $\vec{a}$ を求めよ.

**(10)**　$\vec{a}$ を, 第 1 成分が正の単位ベクトル $\overrightarrow{u_1}$ にせよ.

**(11)**　$A$ の固有値 0 に対応する固有ベクトルのうち, 第 1 成分が 1 のもの全体を $S$ とおく. $S$ を求めよ.

**(12)**　エルミート内積に関して, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \in S$ と直交する $S$ の元 $\vec{c}$ を求めよ.

右の 2 つのベクトルを第 1 成分が正の単位ベクトル $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ にせよ.　　**(13)**　$\vec{b}$.　　**(14)**　$\vec{c}$.

**(15)**　$U = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ とおく. $U^{-1}AU$ を求めよ.　　**(16)**　$U^*AU$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{6}}$　$A = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 1 & -2i \end{pmatrix}$ とおく.

**(33)**　$A^*A$ を計算せよ.　　**(34)**　$A^*A = H^2$ を満たす正値エルミート行列 $H$ を求めよ.

**(35)**　$U = AH^{-1}$ を求めよ.

$\therefore\ A = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ となり, ユニタリ行列と正値エルミート行列の積で表わされた.

**(36)**　$D$ を正値対角行列とする. $A = U_1DU_2$ を満たすユニタリ行列の組 $(U_1, U_2)$ でどちらも単位行列の実数倍でないものを一組求めよ.

**次回やること**　期末試験：上の過去問と同様の問題を出す. それ以外に,
エルミート内積を用いたグラム・シュミットの直交化, QR 分解, コレスキー分解, 実正規行列の実標準型, 複素対称行列の標準型, 実ジョルダン標準型などの具体的計算など.