線形代数学第二 4類Rクラス 第17回

10月2日(水)の復習テスト 制限時間15分 出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. 次の計算で, A の行ベクトルはどう変化するか. **(1)** PA. **(2)** QA. **(3)** RA.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 成分が 0 または 1 である次のサイズの行列で, 階段行列になっているものの個数を求めよ.
(4) 3行2列. **(5)** 2行3列. **(6)** 3行3列.

教科書 足助太郎著「線形代数学」東京大学出版会

後期やること 高校では主として平面の線形代数を, 1年の前期では空間の線形代数を扱って, 具体例に慣れた. 後期はこれらを一般次元に抽象化する.

今日やること 教科書 1〜53頁 第1章 ベクトルと行列

2重添え字 (13頁) スカラー (数, 文字) を長方形状に, 縦に m 個, 横に n 個の合計 mn 個を並べたものを m 行 n 列の行列という. 上から i 番目で左から j 番目のスカラーを i 行 j 列成分と呼び, a_{ij} などと表す. 例えば a_{12} は 「a いちに」である. 「a じゅうに」ではない.

左基本変形 (21頁) 行列 A に対する以下の3つの変形を (階数用の) 左基本変形とか (階数用の) 行に関する基本変形という. (i) ある行を0でないスカラー倍 (定数倍, 文字倍) する. (ii) ある行と別の行を入れ替える. (iii) ある行に別の行のスカラー倍 (定数倍, 文字倍) を加える.
「行」を「列」に変えた場合は, (階数用の) 右基本変形とか (階数用の) 列に関する基本変形という.

基本行列 (22頁) 教科書 21頁〜22頁に紹介されている3つの行列を基本行列という.
左基本変形, つまり, 上の (i), (ii), (iii) の操作は, A に基本行列を左からかけることによって実現する.
右基本変形は, A に基本行列を右からかけることによって実現する.

階段行列 (28頁) 教科書の29頁の行列を階段行列という. 第 j_1 列ベクトル, 第 j_2 列ベクトル, $\cdots$ は第1基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}$, 第2基本ベクトル $\overrightarrow{e_2}$, $\cdots$ になっている. $\vec{0}$ でない行は上から r 本のみであり, 第 $r+1$ 行以下の成分は全て0である.
どんな行列も, 左基本変形によって, 階段行列にできる.

階数 (22頁) 次の定理より, 階段行列の $\vec{0}$ でない行の本数 r は左基本変形の仕方に依存せず, A のみできまる. この r を A の階数 (rank) といい $\operatorname{rank} A$ と書く.

定理 (32頁) 行列 A に対応する階段行列は, 左基本変形の仕方に依らず一意に定まる.

つまり, A をある左基本変形で階段行列 B にした場合と, 別の左基本変形で階段行列 C にした場合, 常に $B = C$ となる. 左基本変形を, 基本行列の積 P, Q で表わすと「$PA = B$ かつ $QA = C$ ならば $B = C$」……☆と書ける. 基本行列は正則 (可逆) なので, ☆の仮定部分で, A を消去すると, $P^{-1}B = Q^{-1}C$. よって $C = QP^{-1}B$. 正則行列 QP^{-1} を改めて P とおくと, $C = PB$. したがって, ☆は「$C = PB$ ならば $B = C$」……∗ となる. $B = (\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \cdots, \overrightarrow{b_n})$, $C = (\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \cdots, \overrightarrow{c_n})$, $P = (\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \cdots, \overrightarrow{p_n})$ とおくと, $\overrightarrow{c_j} = P\overrightarrow{b_j}$. $\overrightarrow{c_1} = P\overrightarrow{b_1} = P\vec{0} = \vec{0}$, $\cdots$, $\overrightarrow{c_{j_1-1}} = P\overrightarrow{b_{j_1-1}} = P\vec{0} = \vec{0}$,
$\overrightarrow{c_{j_1}} = P\overrightarrow{b_{j_1}} = P\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{p_1}$. C は階段行列なので, これは $\vec{0}$ か $\overrightarrow{e_1}$ に等しい. $\vec{0}$ だと P が正則でなくなり矛盾なので, $\overrightarrow{c_{j_1}} = \overrightarrow{e_1}$. $\overrightarrow{b_{j_1+1}} = \lambda_{1,1}\overrightarrow{e_1}$ とおけるので, $\overrightarrow{c_{j_1+1}} = P\overrightarrow{b_{j_1+1}} = \lambda_{1,1}\overrightarrow{p_1} = \lambda_{1,1}\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{b_{j_1+1}}$. 同様にして, $\overrightarrow{c_{j_2-1}}$ まで, $\overrightarrow{b_{j_2-1}}$ と等しい. C は階段行列なので, $\overrightarrow{c_{j_2}}$ は (ア) $\mu_1\overrightarrow{e_1}$ または (イ) $\overrightarrow{e_2}$ となる. $\overrightarrow{c_{j_2}} = P\overrightarrow{b_{j_2}} = P\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{p_2}$ が (ア) の場合, P は正則でなくなり矛盾 (30頁 補題 1.5.8). よって, (イ) であるから, $\overrightarrow{c_{j_2}} = \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{b_{j_2}}$. 以下. これを繰り返し, $B = C$ を得る.

次回やること 第1章 ベクトルと行列, 第1.6節 連立一次方程式

線形代数学第二 ４類Ｒクラス 第１８回

前回の訂正 $\boxed{\mathbf{2}}$ の階段行列で O を入れ忘れていました. 正しくは **(4)** 5 個, **(5)** 15 個, **(6)** 16 個
下から 2 行目の「$A = B$ を得る」は, 正しくは「$B = C$ を得る」である.

10 月 23 日 (水) の復習テスト 制限時間 15 分 出欠の確認をするので出来なくても出すこと.
$\boxed{\mathbf{1}}$ 次を証明せよ. **(1)** (23 頁 補題 1.4.11) A, B が正則のとき, AB も正則.
(2) (55 頁 第 1 列に関する線形性) $\det\begin{pmatrix} ka_1+\ell b_1 & c_1 \\ ka_2+\ell b_2 & c_2 \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} + \ell\det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$.

今日やること 第 1.6 節 連立 1 次方程式の解, 第 2 章 行列式 第 2.1 節 定義, 第 2.2 節 行列式の存在と一意性, 第 2.3 節 行列式の主な性質, 第 2.4 節 置換を用いた行列式の表示・クラメルの公式

全射と単射 (42 頁) X, Y を集合とする. $\mathbb{R}_+$ を非負実数の全体とする.

• $f : X \to Y$ が写像 (関数, 変換) とは, X の各元 x に対して, Y の元 y が一つ定まること. この y を $f(x)$ と書く. ある 1 つの x に対して y が複数対応してしまう場合は, well-defined ではない (良く定義されない) と言う. この場合は関数ではない.

例 1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ を $y = x^2$ で定めると, 逆 $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は $y = \pm\sqrt{x}$ となり, 関数にならない.

• $f : X \to Y$ が全射とは, f によって, X が Y 全体に写ってくることである. 言い換えると, 任意の Y の元 y に対して, それに写ってくる x が存在すること.

X, Y がベクトル空間で f が線形写像の場合, これは $\operatorname{rank} f = \dim Y$ であることと同値である. なぜなら, $\operatorname{rank} f =$ (f の表現行列の列ベクトルのうち独立なものの最大本数) $= \operatorname{Im} f$ であるから.

例 2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $y = x^2$ で定めると, 負の数には写って来ないので, 全射ではない.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ を $y = x^2$ で定めると, 全射になる.

• $f : X \to Y$ が単射とは, Y の各元 y に写って来る x が複数は存在しないことを言う. 言い換えると, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ となること.

X, Y がベクトル空間で f が線形写像の場合, これは $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$ であることと同値である. なぜなら, $f(\vec{x_1}) = f(\vec{x_2}) \iff f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2}) = \vec{0} \iff f(\vec{x_1} - \vec{x_2}) = \vec{0} \iff \vec{x_1} - \vec{x_2} \in \operatorname{Ker} f$ であるから.

例 3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ を $y = x^2$ で定めると, $y > 0$ に写ってくる x は $x = \pm\sqrt{y}$ の 2 つがあり単射でない.
$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を $y = x^2$ で定めると, 単射になる.

• $f : X \to Y$ が全単射とは, 全射かつ単射であることを言う.

例 4 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ を $y = x^2$ で定めると, 全単射になる.

重ね合わせの原理 (42 頁) 連立方程式 $A\vec{v} = \vec{b}$ ……① の任意の 2 つの解を $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ とおくと, $A\vec{v_1} = \vec{b}$, $A\vec{v_2} = \vec{b}$ より $A(\vec{v_1} - \vec{v_2}) = \vec{0}$. よって, $A\vec{v} = \vec{0}$ ……② の解を $\vec{w}$ とおくと, $\vec{v_1} - \vec{v_2} = \vec{w} \iff \vec{v_1} = \vec{v_2} + \vec{w}$. よって, (①の任意の解) = (①の 1 つの解) + (②の任意の解) となる.

掃き出し法 連立方程式 $A\vec{v} = \vec{b}$ ……① は, $(A|\vec{b})$ に左基本変形 (列に関する階数用の基本変形) を行って階段行列 $(C|\vec{d})$ にして解いた. 左基本変形は, 基本行列と呼ばれる 3 種の正則行列を左からかけて実現できる. つまり, $P_\ell \times \cdots \times P_3P_2P_1(A|\vec{b}) = (C|\vec{d})$. ここで, $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_\ell$ は基本行列である. 正則行列の積は正則行列なので, $P_\ell \times \cdots \times P_3P_2P_1 = P$ とおくと, P も正則行列であり,
$P(A|\vec{b}) = (C|\vec{d}) \iff PA = C$ かつ $P\vec{b} = \vec{d}$.
結局, 左基本変形とは, ① の両辺に左から正則行列 P をかけて, $PA\vec{v} = P\vec{b} \iff C\vec{v} = \vec{d}$ ……② にしているだけである. ② の両辺に左から P^{-1} をかければ① に戻るので, ① と ② は明白に同値である.

連立方程式の解 (45 頁) 以下のように $\vec{v}$, S_1, S_2 を定める.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad S_1 = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & a & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad S_2 = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & a & 0 & b & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e & 0 & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

連立方程式 $A\vec{v}=\vec{b}$ ……① の拡大係数行列 $(A|\vec{b})$ が左基本変形で階段行列 $(C|\vec{d})$ になったとする.

(場合１)　S_1 のように, 右端の列に 1 が残る場合, つまり, $\mathrm{rank}(A|\vec{b}) > \mathrm{rank}\,A$ の場合は, 変形後の連立方程式に $0=1$ が入るので, 解なしとなる. 例えば S_1 の場合は, 右のようになる.

$$\begin{cases} x_2+ax_3+bx_5+cx_7=0 \\ \qquad\qquad x_4+dx_5+ex_7=0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_6+fx_7=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0=1 \end{cases}$$

(場合２)　S_2 のように, 右端の列がすべて 0 になる場合, つまり, $\mathrm{rank}(A|\vec{b})=\mathrm{rank}\,A$ の場合は, 解が存在する. 例えば, S_2 の場合は, 右のようになる. このように, 解の値は $n-\mathrm{rank}\,A$ 個の未知数については自由に決めることができ, 残りの $\mathrm{rank}\,A$ 個の未知数については, これら $n-\mathrm{rank}\,A$ 個の値を代入して決まる.

$$\begin{cases} x_2+ax_3+bx_5+cx_7=d \\ \qquad\qquad x_4+ex_5+fx_7=g \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_6+hx_7=i \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0=0 \end{cases}.$$

S_2 の場合, 以下のようになる.　$x_1=t_1$,　$x_2=-at_3-bt_5-ct_7+d$,　$x_3=t_3$,
$x_4=-et_5-ft_7+g$,　$x_5=t_5$,　$x_6=-ht_7+i$,　$x_7=t_7$　(t_1,t_3,t_5,t_7 は任意の実数)
$A,\vec{b}$ を決めれば, $(A|\vec{b})$ から定まる階段行列は唯一なので, この形の解表示は一意 (唯一, unique) である.

対称群 (69 頁)　$S_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$ から S_n 自身への全単射を σ とする. $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ と書く教科書が多いが, 69 頁の脚注にあるように, 行列と混同する間違いが多いので, この授業では, $\sigma=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ \hline \end{array}$ と書くことにする. 2 つの全単射 $\begin{cases} \sigma: S_n\to S_n & \text{(シグマ) と} \\ \tau: S_n\to S_n & \text{(タウ) に} \end{cases}$ 対して,
$\begin{cases} \sigma \text{ してから } \tau \text{ する} & \tau\circ\sigma \text{ や,} \\ \tau \text{ してから } \sigma \text{ する} & \sigma\circ\tau \text{ も} \end{cases}$ 全単射になる (順番に注意). したがって, 全単射の全体 $\mathfrak{S}_n$ は, 写像の合成について閉じている. 恒等写像 $e=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline \end{array}\in\mathfrak{S}_n$ は合成の計算に関して, 数字 1 と同じ役割を果たす. $\sigma^{-1}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ \hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline \end{array}\in\mathfrak{S}_n$ と σ を合成すると, $\sigma^{-1}\circ\sigma=e$, $\sigma\circ\sigma^{-1}=e$ となり, σ の逆数の役割を果たす. このように, 1 や逆数に当たる元を持つ掛け算が定まった集合を群という. $\mathfrak{S}_n$ は対称群とか置換群と呼ばれる.

<u>例５</u>　$n=3$ のとき, 対称群 $\mathfrak{S}_3$ は以下の 6 個の元 (げん, 要素) からなる集合である.

$$\left\{ e,\ \sigma_1=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2&3&1\\\hline\end{array},\ \sigma_2=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3&1&2\\\hline\end{array},\ \sigma_3=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 1&3&2\\\hline\end{array},\ \sigma_4=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3&2&1\\\hline\end{array},\ \sigma_5=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2&1&3\\\hline\end{array} \right\}.$$

${\sigma_1}^{-1}$ は σ_1 の上下を入れ替えた $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&1\\\hline 1&2&3\\\hline\end{array}$ である. これは, $\sigma_2=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3&1&2\\\hline\end{array}$ に等しい. ∵ 上の段が 1,2,3 の順になるように列を入れ替えればわかる.

対称群の元の符号 (69 頁)　$1,2,\cdots,n$ の順列 $\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)$ の符号 $\mathrm{sign}(\sigma)$ を次のように定める. $\sigma(k)$ から見て, 自分より左側に自分より大きい数が a_k 個あるとする. $a_2+a_3+\cdots+a_n$ を σ の転倒数という (常に $a_1=0$ なので, a_1 は省略した). これが奇数なら $\mathrm{sign}(\sigma)=-1$, 偶数なら $\mathrm{sign}(\sigma)=1$ と定める.　転倒数は, 互換 (隣同士の文字の入れ替え) を最低何回行うと順列 $\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3),\cdots,\sigma(n)$ が $1,2,3,\cdots,n$ に戻せるかを表す.
離れた場所同士の入れ換えも許して, 回数の偶奇を調べると, もう少し楽に符号が計算できる.

<u>例６</u>

元	e	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
転倒数	0	2	2	1	3	1
符号	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$

行列式の定義 (70 頁)　n 次正方行列 $A=(a_{i,j})$ の行列式 (determinant) $\det A$ を次式で定める.
$\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)}\times\cdots\times a_{n,\sigma(n)}$.　和は対称群の元全体にわたるので $n!$ 個の項が出る.
55 頁では行列式を抽象的に, 56 頁では第 1 列に関する展開式で行列式を定義している.

<u>例７</u>　3 次正方行列の行列式は, $\det A=\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\mathrm{sign}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)}$
$=a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}-a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$.

<u>**次回やること**</u>　　第 2 章 行列式　第 2.5 節 行列式と体積, 第 2.6 節 終結式と判別式 など.

線形代数学第二 4類Rクラス 第19回

前回の訂正　プリントの最後の「$\det A$ を次式で定める. $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)}\times\cdots\times a_{n,\sigma(n)}$」「$\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} \mathrm{sign}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)}$」において置換 σ の符号 $\mathrm{sign}(\sigma)$ が抜けていました.

10月30日 (水) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので出来なくても出すこと.

1　m が自然数のとき, 次の置換の転倒数と符号を書け. **(1)**　$\sigma =$

1	2	$\cdots$	$2m$
$2m$	$2m-1$	$\cdots$	1

(2)　$\tau =$

1	2	$\cdots$	m	$m+1$	$m+2$	$\cdots$	$2m$
2	4	$\cdots$	$2m$	1	3	$\cdots$	$2m-1$

今日やること　第 2 章 行列式第 2.5 節 行列式と体積, 第 2.6 節 終結式と判別式 など.

数列と写像　実数を無限個並べた数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ は, 自然数の全体 $\mathbb{N}$ から実数全体への写像 $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ である. 表にして書くと,

n	1	2	3	$\cdots$
$a(n)$	$a(1)$	$a(2)$	$a(3)$	$\cdots$

これを $a_1, a_2, a_3, \cdots$ と略記している.

群の例　$S_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ とおく. S_n から S_n への全単射 $\sigma : S_n \to S_n$ は $1, 2, \cdots, n$ を並び替えてできる数列を表す. この全体 $\mathfrak{S}_n$ を対称群, そのうち $\mathrm{sign}(\sigma) = +1$ となるもの全体 $\mathfrak{A}_n$ を交代群という.

例 1　正三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の合同変換全体は $\mathfrak{S}_3$ になる. 裏返しを除くと, $\mathfrak{A}_3$ になる.

例 2　正四面体 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ の合同変換全体は $\mathfrak{S}_4$ になる. 鏡映を除くと, $\mathfrak{A}_4$ になる.

例 3　$\mathfrak{S}_5$ は可解群ではない (巡回群による拡大の繰り返しで構成できない). したがって, 5 次方程式の解の公式を係数の四則演算と冪根で表わすことはできない. (ガロア理論)

行列式の性質　(i)　各列に関して線形である. (多重線形性)

(ii)　2 本の列を入れ替えると -1 倍になる. (交代性)

(iii)　単位行列 E に対して, $\det E = 1$.

逆にこれら 3 つを満たすものは行列式しかない.　(ii) から次が出る.

(iv)　同じ列があると行列式は 0 になる.

逆に (iv) と (i) から (ii) が出る.　(iii) を拡張した次の性質も成り立つ.

(iii)'　上三角行列の行列式は対角成分の積である.

体積と行列式　n 次正方行列 A の列ベクトルの張る n 次元の平行 $2n$ 胞体 (平行四辺形や平行六面体の拡張) の符号付き体積は $\det A$ に等しい. これは, 符号付き体積が, (ii), (iii)' と

(iv)　ある列に別の列を足しても不変.

という行列式と同じ性質を持つことからわかる.

行と列の入れ替え　次の性質から, 行列式の列に関する性質は, 行に関する性質にもなることがわかる.

(v)　転置しても行列式は不変.

行列式の計算法　次の性質で行列式を計算できる.

(v)　ある行に別の列の定数倍を足しても不変.

(vi)　ある行から定数倍をくくり出すことができる.

(vii)　ある行と別の行を入れ替えると -1 倍になる.

行列式の展開　$A = (a_{i,j})$ を n 次正方行列とする. A から i 行目と j 列目を取り除いてできる $n-1$ 次正方行列の行列式を $A_{i.j}$ とおく. 次が成り立つ.

(viii)　$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}A_{i,j}$.　($j$ 列目に関する展開)

(ix)　$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}A_{i,j}$.　($i$ 行目に関する展開)

線形代数学第二 ４類Ｒクラス 第２０回

前回の復習テストについて $f_a(k) = (ak$ を $2m+1$ で割った余り$)$ として, $a=-1$ つまり $a=2m$ のときの f_a が (1) の σ であり, $a=2$ のときの f_a が (2) の τ である. $2m+1$ が素数 p のとき, 置換の符号が $+$ か $-$ かと $x^2-a=(p$ の倍数$)$ に解があるかないかが対応しているのであった.

11 月 13 日 (水) の復習テスト 制限時間 15 分 出欠の確認をするので出来なくても出すこと.

1 O を原点とする. 次を求めよ.

(1) A$(6,4)$, B$(5,7)$ とおく. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で張られる平行四辺形の面積 S.

(2) A$(6,4,0)$, B$(5,7,1)$, C$(3,2,1)$ とおく. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で張られる平行四辺形の面積 S と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で張られる平行六面体の体積 V.

(3) A$(6,4,0,2)$, B$(5,7,1,1)$, C$(3,2,1,0)$, D$(1,1,1,3)$ とおく. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で張られる平行四辺形の面積 S, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で張られる平行六面体の体積 V と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ で張られる平行八胞体の 4 次元体積 W.

今日やること 第 2 章 行列式第 2.5 節 行列式と体積, 第 2.6 節 終結式と判別式 など.

行列式の行に関する多重線形性 n 次正方行列の第 i 行ベクトルに関して,

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ k\vec{a}+\ell\vec{b}\\ \vdots\end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \vec{a}\\ \vdots\end{pmatrix} + \ell\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \vec{b}\\ \vdots\end{pmatrix}$$ が成り立つ.

証明 i 行目に入る横ベクトルを $\vec{a}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, $\vec{b}=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in})$ とおく. 与式左辺は,

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\times\cdots\times(ka_{i\sigma(i)}+\ell b_{i\sigma(i)})\times\cdots\times a_{n\sigma(n)}$$
$$= k\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\times\cdots\times a_{i\sigma(i)}\times\cdots\times a_{n\sigma(n)} + \ell\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\times\cdots\times b_{i\sigma(i)}\times\cdots\times a_{n\sigma(n)}.$$

これは与式右辺に等しい.

互換による符号の変化 置換 $\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3),\cdots,\sigma(n)$ とこのうちの異なる 2 か所を 1 回だけ入れ換えてできるもう一つの置換の符号は異なる.

証明 $i_1<i_2$ とし, $\sigma(i_1)=j_1$ と $\sigma(i_2)=j_2$ の値を入れ替えるとする. このとき, 次の符号を調べる.

1	$\cdots$	i_1	$\cdots$	i_2	$\cdots$	n
$\sigma(1)$	$\cdots$	j_1	$\cdots$	j_2	$\cdots$	$\sigma(n)$

1	$\cdots$	i_1	$\cdots$	i_2	$\cdots$	n
$\sigma(1)$	$\cdots$	j_2	$\cdots$	j_1	$\cdots$	$\sigma(n)$

(i) $j_1<j_2$ のとき. 中央の数に関して,

$j_1,\cdots,(j_2$ より大きい数$),\cdots,j_2$ の 3 数と $j_2,\cdots,(j_2$ より大きい数$),\cdots,j_1$ の 3 数で転倒数は不変.

$j_1,\cdots,(j_1$ より小さい数$),\cdots,j_2$ の 3 数と $j_2,\cdots,(j_1$ より小さい数$),\cdots,j_1$ の 3 数でも転倒数は不変.

$j_1,\cdots,(j_1$ と j_2 の間の数$),\cdots,j_2$ の 3 数と $j_2,\cdots,(j_1$ と j_2 の間の数$),\cdots,j_1$ の 3 数に関しては, 「間の数」 から見た j_2 と j_1 から見た「間の数」と j_1 から見た j_2 の 3 つ分だけ転倒数が増える. よって, 「間の数」 が全部で M 個あったら, 転倒数は $2M+1$ 個増えることになり, 符号が変化する.

(ii) $j_1>j_2$ のとき. 上と同様にして, j_1 と j_2 を入れ替えると, 転倒数は $2M+1$ 個減ることになり, 符号が変化する.

行列式の行に関する冪零性 n 次正方行列 A のある行と別の行が同じとすると, $\det A=0$ となる.

証明 行列 A の i_1 行目に入る横ベクトルと i_2 行目に入る横ベクトルが共に $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ とする. このとき,

$$\det A = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ \vec{b}\\ \vdots\\ \vec{b}\\ \vdots\end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\sigma)\cdots\times b_{\sigma(i_1)}\times\cdots\times b_{\sigma(i_2)}\times\cdots.$$

このうち, 他の因数はすべて同じで, b_{j_1} と b_{j_2} だけが入れ替わっている 2 つの項を見る. 項 $\cdots\times b_{j_1}\times\cdots\times b_{j_2}\times\cdots$ に対応する置換 σ の符号と, $\cdots\times b_{j_2}\times\cdots\times b_{j_1}\times\cdots$ に対応する置換 σ の符号は異なるので, 和は 0 になる. このようにして, すべての項が 2 つずつ対になり消去されていくので, $\det A=0$.

行列式の行に関する交代性　n 次正方行列 A の異なる 2 行を入れ替えると $\det A$ は -1 倍になる.
証明　冪零性と i_1 行目に入る横ベクトルを $\overrightarrow{a_{i_1}}$, i_2 行目に入る横ベクトルを $\overrightarrow{a_{i_2}}$ とおく.
i_1 行目に関する線形性より,

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}+\overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}+\overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\end{pmatrix}=0\iff\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}+\overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}+\overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\end{pmatrix}=0.$$

i_2 行目に関する線形性と, 冪零性より

$$\iff\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}\\ \vdots\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}\\ \vdots\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\end{pmatrix}=0\iff\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}\\ \vdots\end{pmatrix}=0.$$

これを移項して証明終わり.

行列式の性質　n 次正方行列 A のある行に別の行の定数倍を加えても $\det A$ の値は変わらない.
証明　i_1 行目に i_2 行目の k 倍を足すとする. $i_1 < i_2$ のとき, i_1 行目の線形性と冪零性より

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}+k\overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\end{pmatrix}+k\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \overrightarrow{a_{i_1}}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_{i_2}}\\ \vdots\end{pmatrix}+k0.$$

この性質と交代性と次に書く性質を用いると, 行列式が計算できる. この方法が, 行列式の掃き出し法による計算である.

単位行列の行列式　n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ が上三角行列のとき, $\det A$ は対角成分の積 $a_{11}a_{22}\times\cdots\times a_{nn}$ に等しい. 下三角行列の場合も同じ. 特に $\det E = 1^n = 1$ となる.
証明　上三角行列の定義より $i > j$ ならば $a_{ij}=0$ となる. よって, $\det A$ の定義式 $\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\times\cdots\times a_{n\sigma(n)}$ において, $i>\sigma(i)$ となる因数が一つでもあると 0 になってしまう. $i=1,2,3,\cdots,n$ のすべてに対して $i\leqq\sigma(i)$ が成り立つ σ は恒等写像 $\sigma(i)=i$ しかない. よって, $\det A$ の定義式で 0 とならない項は $\mathrm{sign}(\text{恒等写像})a_{11}a_{22}\times\cdots\times a_{nn}=a_{11}a_{22}\times\cdots\times a_{nn}$ のみである.

転置行列の行列式　n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の行列式と転置行列 ${}^tA=(a_{ji})$ の行列式は等しい. よって, 上で示した行に関する性質は列に関する性質としても成り立つ.

符号付き体積と行列式　平面ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の符号付き面積を $S\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{pmatrix}$ とおくと, 1 行目や 2 行目に関する線形性, 冪零性 (交代性), $\overrightarrow{e_1}=(1,0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,1)$ のとき $S\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\end{pmatrix}=1$ が成り立つ. これらの性質は $\det\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{pmatrix}$ と全く同じである. これらの性質をもつものは行列式以外にないので, $S\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{pmatrix}$ となる.　　体積や 4 次元体積の場合も同様.

終結式　$f(x)=x^2+ax+b$ と $g(x)=x^2+cx+d$ の終結式 $R(f,g)$ を右の行列式で定める. これは $f(x)=0$ の解 α_1,α_2 と $g(x)=0$ の解 β_1,β_2 の積 $(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)$ に等しくなる. 特に共通解があるとき, $R(f,g)=0$ となる.

$$\det\begin{pmatrix}1&a&b&0\\0&1&a&b\\1&c&d&0\\0&1&c&d\end{pmatrix}$$

次回やること　第 3 章 線形空間と線形写像 第 3.1 節 線形空間の定義と例, 第 3.2 節 部分線形空間 など

補講について　教務課から 10 月 16 日 (水) の補講を 12 月 25 日 (水) に行う旨の連絡が来たことをお伝えします. 中間試験は 1 週ずれて 12 月 11 日 (水) になります. 10 月 9 日 (水) の補講を 2 月 5 日 (水) に行います. 期末試験は 2 月 12 日 (水) になります.

線形代数学第二 ４類Ｒクラス 第２１回

前回の復習テストについて　前期は, 縦ベクトルで説明したが, 後期は横ベクトルで説明する. 2 次元の横ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の符号付き面積 S は, $A=\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ で計算できるので, $S^2=(\det A)^2=(\det A)(\det {}^tA)=\det(A^tA)=\det\left\{\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{pmatrix}({}^t\vec{a},{}^t\vec{b})\right\}=\det\begin{pmatrix}|\vec{a}|^2 & \vec{a}\cdot\vec{b}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & |\vec{b}|^2\end{pmatrix}$ $=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ となる. 最後の式は数Bで習ったように, 3 次元でも通用する. 実は, 4 次元以上でも使える. 従って, (3) の S の答えは $\begin{cases}\frac{1}{2}\vec{a}=(3,2,0,1)\\ \vec{b}=(5,7,1,1)\end{cases}$ より $S=2\sqrt{\det\begin{pmatrix}14 & 30\\ 30 & 76\end{pmatrix}}=4\sqrt{41}$.

成分計算すると, $\begin{cases}\vec{a}=(a_1,a_2)\\ \vec{b}=(b_1,b_2)\end{cases}$ の場合,　　$S^2=(a_1b_2-a_2b_2)^2=\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}^2$.

$\begin{cases}\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\end{cases}$ の場合,　　$S^2=\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}^2+\det\begin{pmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{pmatrix}^2+\det\begin{pmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{pmatrix}^2$.

$\begin{cases}\vec{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4)\\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3,b_4)\end{cases}$ の場合,　　$S^2=\displaystyle\sum_{1\leqq i<j\leqq 4}\det\begin{pmatrix}a_i & a_j\\ b_i & b_j\end{pmatrix}^2$. これを (3) の S に使うと,

$$S=2\sqrt{\det\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 7\end{pmatrix}^2+\det\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}^2+\det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}^2+\det\begin{pmatrix}2 & 0\\ 7 & 1\end{pmatrix}^2+\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & 1\end{pmatrix}^2+\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^2}$$
$$=2\sqrt{121+9+4+4+25+1}=4\sqrt{41}.$$

横ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で張られる平行六面体の符号付き体積を V とおくと, 同様のことが成立する.

$V^2=\det\begin{pmatrix}|\vec{a}|^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & |\vec{b}|^2 & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & |\vec{c}|^2\end{pmatrix}$. 従って, (3) の V の答えは $\begin{cases}\frac{1}{2}\vec{a}=(3,2,0,1)\\ \vec{b}=(5,7,1,1)\\ \vec{c}=(3,2,1,0)\end{cases}$ より

$V=2\sqrt{\det\begin{pmatrix}14 & 30 & 13\\ 30 & 76 & 30\\ 13 & 30 & 14\end{pmatrix}}=12\sqrt{7}$.　　成分計算すると, $\begin{cases}\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\\ \vec{c}=(c_1,c_2,c_3)\end{cases}$ のとき,

$V^2=\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}^2$ となる.　　$\begin{cases}\vec{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4)\\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3,b_4)\\ \vec{c}=(c_1,c_2,c_3,c_4)\end{cases}$ のときは, 次のようになる.

$$V^2=\det\begin{pmatrix}a_2 & a_3 & a_4\\ b_2 & b_3 & b_4\\ c_2 & c_3 & c_4\end{pmatrix}^2+\det\begin{pmatrix}a_1 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_3 & c_4\end{pmatrix}^2+\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_4\end{pmatrix}^2+\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}^2.$$

(3) の V の答えは $2\sqrt{\det\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 7 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}^2+\det\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}^2+\det\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 7 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}^2+\det\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 5 & 7 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}^2}$
$=\sqrt{9+1+121+121}=\sqrt{252}=12\sqrt{7}$.

11 月 20 日 (水) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので出来なくても出すこと.

1　次の行列式を求めよ.

(1) $\det\begin{pmatrix}6 & 4 & 0 & 2\\ 5 & 7 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$　　**(2)** $\det\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 1 & b & b^2 & b^3\\ 1 & c & c^2 & c^3\\ 1 & d & d^2 & d^3\end{pmatrix}$　　**(3)** $\det\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ d & a & b & c\\ c & d & a & b\\ b & c & d & a\end{pmatrix}$

今日やること　第 2 章 行列式第 2.6 節 終結式と判別式. 第 3 章 線形空間と線形写像 第 3.1 節 線形空間の定義と例, 第 3.2 節 部分線形空間, 第 3.3 節 ベクトルの線形結合・線形空間の生成系など.

ある行の 0 でないの成分が 1 個のときの行列式　n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の第 1 行が $(a_{11},0,0,\cdots,0)$

のとき．$\det A = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\times\cdots\times a_{n\sigma(n)}$ の項のうち, 0 でない項は $\sigma(1)=1$ となるものだけである．$2,3,4,\cdots,n$ の $n-1$ 文字の順列全体からなる対称群を $\mathfrak{T}_{n-1}$ とおくと,
$\det A = \displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{T}_{n-1}} \mathrm{sign}(\tau) a_{11}a_{2\tau(2)}\times\cdots\times a_{n\tau(n)} = a_{11}\sum_{\tau\in\mathfrak{T}_{n-1}} \mathrm{sign}(\tau) a_{2\tau(2)}\times\cdots\times a_{n\tau(n)} = a_{11}\det\widetilde{A_{11}}$
となる．ここで, $\widetilde{A_{11}}$ は A から 1 行目と 1 列目を取り除いてできる $n-1$ 次正方行列である．

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の第 1 行が $(0,a_{12},0,\cdots,0)$ のとき．A の 2 列目と 1 列目を入れ替えた行列を B とおくと, B の第 1 行は, $(a_{12},0,0,\cdots,0)$ となる．行列式の交代性より, $\det B = -\det A = -a_{12}\det\widetilde{A_{12}}$. ここで, $\widetilde{A_{12}}$ は A から 1 行目と 2 列目を取り除いてできる $n-1$ 次正方行列である．

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の第 1 行が第 j 列の成分 a_{1j} を除いてすべて 0 のときは, j 列目と $j-1$ 列めを取り替え, $j-1$ 列目と $j-2$ 列目を取り替え, $\cdots$ と $j-1$ 回隣同士の列を入れ替えた行列を C とおくと, C の第 1 行は, $(a_{1j},0,0,\cdots,0)$ となる．行列式の交代性より, $\det C = (-1)^{j-1}\det A = (-1)^{j-1}a_{1j}\det\widetilde{A_{1j}}$. ここで, $\widetilde{A_{1j}}$ は A から 1 行目と j 列目を取り除いてできる $n-1$ 次正方行列である．

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の第 i 行が第 j 列の成分 a_{ij} を除いてすべて 0 のときは, 上と同様に, 隣接する列の $j-1$ 回の入れ替えと, 隣接する行の $i-1$ 回の入れ替えにより, 第 1 行が $(a_{ij},0,0,\cdots,0)$ となる行列 D を得る．$\det D = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\det A = (-1)^{i+j}a_{ij}\det\widetilde{A_{ij}}$. ここで, $\widetilde{A_{ij}}$ は A から i 行目と j 列目を取り除いてできる $n-1$ 次正方行列である．

行に関する展開　$A=(a_{ij})$ を n 次正方行列とする．1 行目に関する線形性より, $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$
$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} + \cdots + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$
$= a_{11}\det\widetilde{A_{11}} - a_{12}\det\widetilde{A_{12}} + \cdots + (-1)^{1+j}a_{1j}\det\widetilde{A_{1j}} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det\widetilde{A_{1n}}$ となる．同様にして, i 行目に関する展開 $\det A = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det\widetilde{A_{ij}}$ を得る．

転置と行列式　n 次正方行列を $A=(a_{ij})$ とおくと, ${}^tA=(a_{ji})$ である．
$\det {}^tA = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\times\cdots\times a_{n\sigma(n)}$ の各項の掛け算の順番を $\sigma(1),\sigma(2),\sigma(n)$ が小さい順に並ぶように入れ換えると, $\det {}^tA = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\sigma)a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\times\cdots\times a_{\sigma^{-1}(n)n}$ となる．σ が $\mathfrak{S}_n$ 全体を動くとき, σ^{-1} も $\mathfrak{S}_n$ 全体を動く．よって, $\tau=\sigma^{-1}$ とおくと, $\det {}^tA = \displaystyle\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sign}(\tau)a_{\tau(1)1}a_{\tau(2)2}\times\cdots\times a_{\tau(n)n}$
$=\det A$ となる．したがって, 今まで書いた行列式の行に関する命題は, 列に関しても成立する．

体　四則演算 (0 で割ることを除く) について閉じている集合を体 (たい) という．閉じているとは, 計算ができて計算結果が外にはみ出ないことである．　体の厳密な定義は 337 頁に書いてある．

例 1　有理数全体 $\mathbb{Q}$, 実数全体 $\mathbb{R}$, 複素数全体 $\mathbb{C}$, x の実数係数の有理式 (分数式) 全体 $\mathbb{R}(x)$ 素数 p で割った余りの全体 $\mathbb{F}_p$, などなど．　自然数の全体 $\mathbb{N}$ や整数の全体 $\mathbb{Z}$ は体ではない．

ベクトル空間　K を体とする．K の元 (げん) をスカラーと呼ぶ．集合 V が K 上のベクトル空間 (線形空間) とは, V が足し算とスカラー倍について閉じていることである．厳密な定義は 82–83 頁にある．

例 2　n を自然数, K を体とすると, $K^n = \{(k_1,k_2,\cdots,k_n) \mid k_1\sim k_n$ は K の元$\}$ は, 自然な加法とスカラー倍に関して K 上のベクトル空間になる．これを n 次元数ベクトル空間という．

例 3　m,n を自然数, K を体とする．K の元を成分に持つ m 行 n 列の行列全体 $M_{m,n}(K)$ は自然な加法とスカラー倍に関して K 上のベクトル空間になる．

例 4　x の K を係数とする多項式全体 $K[x]$ は K 上のベクトル空間になる．

例 5　K の元を成分にもつ数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 全体は K 上のベクトル空間になる．

例 6　集合 X から K ベクトル空間 W への写像 $f: X\to W$ 全体は自然な加法とスカラー倍に関して K 上のベクトル空間になる．

次回やること　第 3.4 節 写像に関するいくつかの注意, 第 3.5 節 線形写像など．　中間:12 月 11 日 (水)

線形代数学第二 ４類Ｒクラス 第２２回

11 月 27 日 (水) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので出来なくても出すこと.

$\boxed{\mathbf{1}}$ **(1)**　体になるものはどれか.　**(a)**　整数全体 $\mathbb{Z}$.　**(b)**　有理係数の分数式全体 $\mathbb{Q}(x)$

(c)　整数を 3 で割った余りの世界. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$　**(d)**　整数を 4 で割った余りの世界. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(e)　有理数全体 $\mathbb{Q}$.　**(f)**　有理数係数の多項式を x^2+1 で割った余りの世界 $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$.

(2)　$\mathbb{R}$ ベクトル空間 (実線形空間) になるものはどれか.　**(a)**　$\mathbb{Q}$.　**(b)**　$\mathbb{R}$.

(c)　$\mathbb{C}$.　**(d)**　$xy=0$ を満たす平面ベクトル $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 全体

(e)　$x^2+y^2=0$ を満たす平面ベクトル $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 全体　**(f)**　連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 全体

今日やること　第 3.2 節 部分線形空間, 第 3.3 節 ベクトルの線形結合・線形空間の生成系, 第 3.4 節 写像に関するいくつかの注意, 第 3.5 節 線形写像, 第 3.6 節 線形写像の核と像など.

部分線形空間

K を体, V を K ベクトル空間 (K 線形空間) とする. V の部分集合 W が V で定義された和, 差, スカラー倍に関して K ベクトル空間になるとき, W を V の K 部分ベクトル空間 (K 部分線形空間) と呼ぶ. K 部分ベクトル空間になることは, W の任意の 2 元の和が W に入り, W の任意の元と K の任意の元の積も W に入ることを確認すればよい.

例１　$(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in K^n$ のうち, $k_1+k_2+\cdots+k_n=0$ となる数ベクトル全体は K^n の K 部分ベクトル空間である. $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$ となる数ベクトル全体は部分ベクトル空間にならない. ${k_1}^2+{k_2}^2+\cdots+{k_n}^2=1$ となるもの全体も部分ベクトル空間にならない. ${k_1}^2+{k_2}^2+\cdots+{k_n}^2=0$ となるもの全体は微妙. $K=\mathbb{C}$ の場合はならないが, $K=\mathbb{F}_2$ の場合は部分ベクトル空間になる. ここで, $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$ は 2 で割った余りの世界が作る体.

例２　$M_{2,3}(K)$ のうち $\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \end{pmatrix}$ の形のもの全体は, K 部分ベクトル空間となる. これは $M_{2,2}(K)$ と同型である.

例３　x の K を係数とする無限次の "多項式" を形式的冪級数といい, その全体を $K[[x]]$ などと書く. 形式的冪級数のうち, 収束半径が正のものを収束冪級数といい, その全体を $K\{x\}$ などと書く. これは, $K[[x]]$ の K 部分ベクトル空間となる.
x の K を係数とする多項式の全体 $K[x]$ は $K[[x]]$ や $K\{x\}$ の K 部分ベクトル空間になる.

例４　K の元を並べた数列 $k_1,k_2,k_3,\cdots$ 全体 V_1 は K 上のベクトル空間になる. V_1 のうち, 収束する数列全体 V_2 や 0 に収束する数列全体 V_3 や途中から 0 になってしまう数列全体 V_4 は V_1 の K 部分ベクトル空間になる. V_1 は K の無限個の直積 (120 頁定義 3.10.3), V_4 は K の無限個の直和 (123 頁定義 3.10.15) と呼ばれる.

和と直和

W_1,W_2 を V の部分ベクトル空間とする. $W_1\cap W_2$ は V の部分ベクトル空間となる. W がもっと沢山あっても, 無限個あっても同じ.
$W_1\cup W_2$ が V の部分ベクトル空間になるのは, 一方が他方に含まれる場合のみ.
W_1 と W_2 の和 W_1+W_2 を $\{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}\mid\overrightarrow{w_1}\in W_1,\overrightarrow{w_2}\in W_2\}$ で定義する. W_1+W_2 は V の部分ベクトル空間となる. W がもっと沢山あっても同じ. 無限個ある場合は微妙. $W_1+W_2+W_3+\cdots$ を作るときは, 足されるベクトルは有限個を除いて $\vec{0}$ と定義する.
W_1+W_2 において, $W_1\cap W_2=\{\vec{0}\}$ のとき, 直和であるといい, $W_1\oplus W_2$ と書く.
$W_1+W_2+\cdots+W_n$ において, $(W_1+W_2+\cdots+W_k)\cap W_{k+1}=\{\vec{0}\}\quad(k=1,2,3,\cdots,n-1)$ のとき, 直和といい, $W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_n$ と書く. 123 頁の直和とは定義が異なるが, 結果的に同型となる.

一次結合と生成系

$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_r} \in V$ とする. $k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + k_r\overrightarrow{v_r}$ (k_1〜k_r は K の元) ……① を $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_r}$ の K 上の一次結合 (線形結合) という. ① において, k_1〜k_r を K 内で動かして得られるベクトル全体を $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_r}$ で K 上生成される (K 上張られる) K 部分ベクトル空間という. これを $\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_r} \rangle_K$ とか $\mathrm{Span}_K(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_r})$ と書く. $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_r}$ を生成系とか生成元という.
生成元が無限個の場合は, ① において, 係数が有限個を除いて 0 であるとする (94 頁).

例5 $1, x, x^2, \cdots$ で $\mathbb{R}$ 上張られる空間 $\langle 1, x, x^2, \cdots \rangle_{\mathbb{R}}$ は冪級数 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ の全体ではなく, 多項式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r$ (r は任意の非負整数) となる.

合成・逆写像・零写像

X, Y, Z を集合, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像 (関数, 変換) とする. f と g の合成 $g \circ f : X \to Z$ を $g(f(x))$ で定める.
常に $f(x) = x$ となる $f : X \to X$ を X 上の恒等写像といい id_X と書く.
$f : X \to Y$ に対して $g : Y \to X$ が $g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$ を満たすとき, g を f の逆写像といい, f^{-1} で表わす.
常に $f(x) = c$ (一定) となる写像を定値写像という. とくに $c = \vec{0}$ のとき, 零写像 (0-map) という.

像と原像 $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ とおく.
$f(A) = \{f(a) \in Y \mid a \in X\}$ を A の f による像という.
$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ を B の f による原像という. 逆関数 f^{-1} が存在しなくても, 原像は存在する.

問1 次のうち, 常に成立するものはどれか.
(a) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$. **(b)** $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
(c) $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$. **(d)** $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
(e) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. **(f)** $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.
$f : X \to Y$ において, $X \subset Y$ のとき, 常に $f(x) = x$ となる写像 f を包含写像といい ι などで表す.
$f : X \to Y$ において, $A \subset X$ のとき, f の定義域を A に制限した写像を $f|_A$ と書く.

線形写像

K を体とし, V, W を K ベクトル空間とする. 写像 $f : V \to W$ が, 任意の $k_1, k_2 \in K$ と任意の $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V$ に対して, $f(k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2}) = k_1f(\overrightarrow{v_1}) + k_2f(\overrightarrow{v_2})$ を満たすとき, K 線形写像と呼ぶ, とくに $V = W$ のとき, K 上の一次変換と呼ぶ.

例6 $A \in M_{n,m}(K)$ とする. $f : K^m \to K^n$ を $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ で定めると, f は K 線形写像になる.
逆に, 任意の K 線形写像 $f : K^m \to K^n$ に対して, ある $A \in M_{n,m}(K)$ が存在して, $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ と表わすことができる.

例7 K 係数の多項式全体を $K[x]$ とおく. $K[x]$ の元に対して, その微分を対応させる写像 $f : K[x] \to K[x]$ は K 上の一次変換である.

例8 K の元を並べた数列 $k_1, k_2, k_3, \cdots,$ の番号を 1 つずらしたもの $k_2, k_3, k_4, \cdots$ にする写像 f は K 線形写像である. 無限次の行列で表すと, $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$

例9 K の元を並べた数列 $k_1, k_2, k_3, \cdots,$ のうち, 収束するもの全体を V とおく. V の元 (げん, 要素) に対して収束先を対応させる写像 $f : V \to K$ は K 線形写像である. これは無限次の行列では書けない.

問2 次を示せ.
(1) $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の間の $f(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = f(\overrightarrow{v_1}) + f(\overrightarrow{v_2})$ を満たす写像は $\mathbb{Q}$ 線形写像になる.
(2) $\mathbb{R}$ ベクトル空間の間の $f(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = f(\overrightarrow{v_1}) + f(\overrightarrow{v_2})$ を満たす連続写像は $\mathbb{R}$ 線形写像になる.

次回やること 第 3.8 節 線形写像全体のなす線形空間・双対空間, 第 3.9 節 射影と鏡映, 第 3.10 節 直和と直積, 第 3.11 節 商線形空間など. 中間試験は 12 月 11 日 (水)

線形代数学第二 4類Rクラス 第23回

12 月 4 日 (水) の復習テスト 制限時間 15 分 出欠の確認をするので出来なくても出すこと.
$\boxed{1}$ **(1)** 5 で割った余りの世界 (mod 5 の世界) $\mathbb{F}_5$ の掛算と割り算の表を作れ.
(2) $\mathbb{F}_5$ 成分の 2 次正方行列の全体 $M_2(\mathbb{F}_5)$ の元の個数はいくつか. そのうち, 逆行列を持つものの全体 $GL_2(\mathbb{F}_5)$ の元の個数はいくつか.
(3) ある自然数 n が存在して, 全ての $A \in GL_2(\mathbb{F}_5)$ に対して, $A^n = E$ となる. このような n を一つ求めよ.

今日やること 第 3.8 節 線形写像全体のなす線形空間・双対空間, 第 3.9 節 射影と鏡映, 第 3.10 節 直和と直積, 第 3.11 節 商線形空間など. など.

線形写像の成す空間 K を体, V, W を K ベクトル空間とする. K 線形写像 $f : V \to W$ 全体を $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ と書く. V と W の基底が定まっていて $V = K^m$, $W = K^n$ と書ける場合は, $\mathrm{Hom}_K(V, W) = M_{n,m}(K)$ である.
$k, \ell \in K$ $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ に対して, $(kf + \ell g)(\vec{v})$ $(\vec{v} \in V)$ を $kf(\vec{v}) + \ell g(\vec{v})$ で定めることにより, $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ は K ベクトル空間になる.
V と W の基底が定まっていて, f, g の表現行列が順に A, B と書ける場合は, $kf + \ell g$ の表現行列は $kA + \ell B$ である.

一次変換の成す空間 K 上の一次変換 (K 上の線形変換) $f : V \to V$ 全体を $\mathrm{End}_K(V)$ と書く. V の基底が定まっていて $V = K^m$ と書ける場合は, $\mathrm{End}_K(V) = M_n(K)$ である.
$\mathrm{Hom}_K(V, W)$ と同様にして, $\mathrm{End}_K(V)$ は K ベクトル空間になる. $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V)$ に対して, 積 fg を合成 $(f \circ g)(\vec{v}) = f(g(\vec{v}))$ で定めることにより, $\mathrm{End}_K(V)$ は K 多元環 (K 代数) になる. V の基底が定まっていて, f, g の表現行列が順に A, B と書ける場合は, fg の表現行列は AB である.

線形同型写像の成す空間 K 線形写像 $f : V \to W$ に対して, K 線形写像 $g : W \to V$ が存在して, $g \circ f : V \to V$ が V の恒等写像かつ $f \circ g : W \to W$ が W の恒等写像となるとき, g は f の逆写像といい, f^{-1} で表わす.
このような f が存在するとき, V と W は K 線形同型であるという. f は K 線形同型写像といい, この全体を $\mathrm{Iso}(V, W)$ と書く. V と W の基底が定まっていて $V = K^m$, $W = K^n$ と書ける場合は, $\mathrm{Iso}_K(V, W) = GL_{n,m}(K)$ (n 行 m 列の行列のうち逆行列を持つもの全体) である.
$\mathrm{Iso}_K(V, W)$ は K ベクトル空間にならないが, 合成によって積が定義でき, 乗法群になる.

可逆な一次変換の成す空間 K 線形同型写像 $f : V \to V$ の全体を $\mathrm{Aut}(V)$ と書く. V の基底が定まっていて $V = K^m$ と書ける場合は, $\mathrm{Aut}_K(V) = GL_m(K)$ である.
$\mathrm{Aut}_K(V)$ は K ベクトル空間にならないが. 合成によって積が定義でき, 乗法群になる.

定理 (105 頁 定理 3.5.18) K 線形写像 $f : V \to W$ に対して, 次が成り立つ.
f は全単射である. $\Longleftrightarrow$ f は同型写像である.

核と像 K 線形写像 $f : V \to W$ に対して, f の核 (kernel) $\mathrm{Ker} f$ を $f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\}$ で, f の像 (image) $\mathrm{Im} f$ を $f(V) = \{f(\vec{v}) \in W \mid \vec{v} \in V\}$ で定義する.
$\mathrm{Ker}\, f$ は V の K 線形部分空間になる. $\mathrm{Im}\, f$ も V の K 線形部分空間になる.

定理 (108 頁 補題 3.6.4) K 線形写像 $f : V \to W$ に対して, 次が成り立つ.
(i) f は単射である. $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, f = \{\vec{0}\}$. (ii) f は全射である. $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, f = W$.

双対空間 K 線形写像 $f : V \to K$ の全体 $\mathrm{Hom}_k(V, K)$ を V の双対(そうつい)空間といい, V^* で表わす. 共役転置と同じ記号だが, まったく別のものである.
<u>例 1</u> K^n を縦ベクトルで表すと, $(K^n)^* = \mathrm{Hom}(K^n, K)$ は内積で表わされる. つまり, 横ベクトルをかけることで表わされるので, $(K^n)^* = \{(k_1, k_2, \cdots, k_n) \mid k_1 \sim k_n$ は K の元 $\}$ となる.

押し出し　K 線形写像 $g_1 : W \to V_1$, $f : V_1 \to V_2$ を考える．対応 $g_1 \mapsto f \circ g_1$ によって, $f_* : \mathrm{Hom}_k(W, V_1) \to \mathrm{Hom}_k(W, V_2)$ が定まる．これを f による押し出しという．

引き戻し　K 線形写像 $g_2 : V_2 \to W$, $f : V_1 \to V_2$ を考える．対応 $g_2 \mapsto g_2 \circ f$ によって, $f^* : \mathrm{Hom}_k(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_k(V_1, W)$ が定まる．これを f による引き戻しという．

射影行列　n 次正方行列 P で $P^2 = P$ を満たすものを射影行列という．K^n の一次変換を $\vec{v} \mapsto P\vec{v}$ で定めると, $\mathrm{Ker}\, P = \mathrm{Im}(E - P)$ であり, $K^n = (\mathrm{Im}\, P) \oplus (\mathrm{Ker}\, P)$ となる．

鏡映変換　P が n 次の射影行列のとき, $2E - P$ は, K^n の部分空間 $\mathrm{Im}\, P$ に関する鏡映変換を表す．

商空間　K を体とし, V を K ベクトル空間, W を V の K 部分ベクトル空間とする．V/W を V で W の元の差を無視した空間とする．W で割った余りの世界とか mod W の世界と思うとわかり易い．自然な射影 $V \to V/W$ で $\vec{v}$ に対応するベクトルを角括弧をつけて $[\vec{v}]$ と表わすことにすると, 任意の $\vec{w} \in W$ に対して, $[\vec{v}] = [\vec{v} + \vec{w}]$ であり, 特に $[\vec{w}] = [\vec{0}]$ となる．面倒なので, 括弧を省略することがある．

中間模擬問題

$\boxed{1}$　σ, τ を次表で定める．

n	1	2	3	4	5	6
$\sigma(n)$	3	4	5	6	1	2

n	1	2	3	4	5	6
$\tau(n)$	2	1	4	3	6	5

次を計算せよ．

(1)　$\sigma \circ \tau$　　**(2)**　$\tau \circ \sigma$　　**(3)**　$\mathrm{sign}\, \sigma$

$\boxed{2}$　n 次多項式を次式で定める．

$$f_n(x) = \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

(4)　$f_{n+2}(x)$ を $f_{n+1}(x)$ と $f_n(x)$ で表わせ．

(5)　$f_n(2\cos\theta)\sin\theta$ を正弦で表せ．

$\boxed{3}$　**(6)**　次の 4 つのうち, 体であるものはどれか．　**(a)**　$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{x + \sqrt{2}y \mid x, y$ は整数 $\}$　**(b)**　$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + \sqrt{2}y \mid x, y$ は有理数 $\}$　**(c)**　$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$　**(d)**　$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

(7)　次の 4 つのうち, 実ベクトル空間であるものはどれか．

(a)　$\mathbb{C}$　**(b)**　実数の数列で, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ を満たすもの全体　**(c)**　$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数で, $y'' = 5y' - 6y$ を満たすもの全体　**(d)**　2 次実行列で, $A^2 = 5A - 6E$ を満たすもの全体

(8)　次の 4 つのうち, 実係数多項式全体 $\mathbb{R}[x]$ の実部分ベクトル空間になるものはどれか．

(a)　$f(0) = 0$ を満たすもの全体．　**(b)**　$f(0) = 1$ を満たすもの全体．　**(c)**　$f(1) = 0$ を満たすもの全体．　**(d)**　$f(1) = 1$ を満たすもの全体．

(9)　次の 4 つのうち, 実係数多項式全体 $\mathbb{R}[x]$ からそれ自身への実一次変換になるものはどれか．

(a)　$f(x) \mapsto (x-1)f(x)$．　**(b)**　$f(x) \mapsto f'(1)$．　**(c)**　$f(x) \mapsto f'(x)$．

(d)　$f(x) \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\, dt$．

$\boxed{4}$ **(10)**　実数の有界な数列 (項が有限の範囲に収まっている数列) の全体を V とおく．V^* の元になるものはどれか．　**(a)**　$(a_n) \mapsto ((n-1)a_n)$．　**(b)**　$(a_n) \mapsto a_2 - a_1$．　**(c)**　$(a_n) \mapsto (a_{n+1} - a_n)$．

(d)　$(a_n) \mapsto \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$．

$\boxed{5}$　K 線形写像 $g_1 : W \to V_1$, $f : V_1 \to V_2$ $f_* : \mathrm{Hom}_k(W, V_1) \to \mathrm{Hom}_k(W, V_2)$ を考える．

(11)　f が単射なら f_* は単射か．　**(12)**　f が全射なら f_* は全射か．

$\boxed{6}$　K 線形写像 $g_2 : V_2 \to W$, $f : V_1 \to V_2$ $f^* : \mathrm{Hom}_k(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_k(V_1, W)$ を考える．

(13)　f が単射なら f^* は単射か．　**(14)**　f が全射なら f^* は全射か．

$\boxed{7}$ $\mathbb{R}^3$ 内の平面 Π を $x + 2y + 3z = 0$ で定める．次の行列を求めよ．

(15)　Π 上への正射影を表す行列．　**(16)**　Π での鏡映を表す行列．

$\boxed{8}$ **(17)**　次の 4 つのうち $\mathbb{R}$ の無限個の直和と同型なものはどれか．

(18)　次の 4 つのうち $\mathbb{R}$ の無限個の直積と同型なものはどれか．　**(a)**　$\mathbb{R}[x]$．　**(b)**　実係数冪級数の全体．　**(c)**　実数の数列全体．　**(d)**　実数の数列で途中から 0 になるもの全体．

$\boxed{9}$ **(19)** (112 頁)　K を体とし, $f : K^m \to K^n$ を K 線形写像とする．$g : K^m/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ が K 線形同型写像であることを示せ．　**次回やること**　中間試験．

線形代数学第二 4類Rクラス 第24回 中間試験 問題用紙

1 (81 頁 定義 2.7.3) $\sigma : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$ を全単射とする．この全体を $\mathfrak{S}_6$ と書き 6 次の対称群という．$\mathfrak{S}_6$ の任意の 2 元 σ, τ には, 関数の合成 $\sigma \circ \tau$ 積が定まる．これを $\sigma\tau$ と略記する．$\mathfrak{S}_6$ の元のうち, 2 文字を入れ替えて, 残りは動かさないものを互換という．異なる 2 文字 i と j の互換を (ij) と略記する．例えば, 2 と 3 の互換

n	1	2	3	4	5	6
$\sigma(n)$	1	3	2	4	5	6

は (23) と略記する．

写像 $f : \mathfrak{S}_6 \to \mathfrak{S}_6$ が $\mathfrak{S}_6$ の任意の 2 元 σ, τ に対して $f(\sigma\tau) = f(\sigma)f(\tau)$ を満たすとする．さらに, $f((12)) = (12)(34)(56)$, $f((13)) = (13)(25)(46)$, $f((14)) = (13)(26)(35)$, $f((15)) = (15)(24)(36)$, $f((16)) = (16)(23)(45)$ であるとする．

(1) $\{1,2,3,4,5,6\}$ 内の異なる 2 文字 i, j に対して, $(1i)(1j)(1i)$ を計算せよ．

(2) $f((23))$ を求めよ．

(3) $\mathrm{sign}\,(23)$ と $\mathrm{sign}\, f((23))$ は同じか異なるか．

2 n 次多項式を次式で定める．
$$f_n(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

(4) 第 $n+1$ 列で展開することにより, $f_{n+1}(x)$ を $f_n(x)$ で表わせ．

(5) $f_n(x)$ を求めよ．

(6) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ で張られる立体の 4 次元体積を求めよ．

3

(7) m, n を 2 以上の整数とする．mn での剰余類 (余りの世界) $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \cdots, mn-1\}$ においては, $1 \div n$ に解がないことを示せ．

(8) p を正の素数, a を p と互いに素な整数とする．$1 \leqq i < j \leqq p$ のとき, $ia - 1$ を p で割った余りと $ja - 1$ を p で割った余りが異なることを示せ．

(9) p を正の素数, $a = 1, 2, 3, \cdots, p-1$ とする．$a-1,\ 2a-1,\ 3a-1,\ \cdots,\ pa-1$ の中に p の倍数がただ一つあることを示せ．

(10) p を正の素数, $a = 1, 2, 3, \cdots, p-1$ とする．p での剰余類 (余りの世界) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$ においては, $1 \div a$ に解があることを示せ．

(11) n を 2 以上の整数とする．n での剰余類 (余りの世界) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ が体となるための n の条件を書け．

4

(12) 次の 4 つのうち, 実ベクトル空間であるものはどれか．

(a) 複素数のうち $x^2 = -1$ を満たすもの全体.

(b) 実数の数列で, $a_{n+2} = -a_n$ を満たすもの全体

(c) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数で, $y'' = -y$ を満たすもの全体

(d) 2 次実行列で, $X^2 = -E$ を満たすもの全体

(13)　次の 4 つのうち, $\mathbb{F}_2{}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{F}_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ の $\mathbb{F}_2$ 部分ベクトル空間は, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と全体 $\mathbb{F}_2{}^2$ 以外に何個あるか.

(14)　次の 4 つのうち, 実係数多項式全体 $\mathbb{R}[x]$ からそれ自身への実一次変換になるものはどれか.

(a)　$f(x) \mapsto x^2 f(x)$.　　**(b)**　$f(x) \mapsto f(x^2)$.　　**(c)**　$f(x) \mapsto \{f(x)\}^2$.

(d)　$f(x) \mapsto f(f(x))$.

$\boxed{\textbf{5}}$　**(15)**　実数の数列 $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$ のうち, 収束するもの全体を V とおく. $(a_n) \in V$ とする. 次の 4 つの実線形写像 $V \to \mathbb{R}$ のうち V^* の元になる (値が定まる) ものはどれか.

(a)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ が収束する数列 (b_n) を用いて, $(a_n) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

(b)　$(b_n) \in V$ を用いて, $(a_n) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

(c)　0 に収束する数列 (b_n) を用いて, $(a_n) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

(d)　$(a_n) \mapsto \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$.

参考　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束する数列 (a_n) の全体 ℓ^1 の双対 $(\ell^1)^*$ は項が有界な数列の全体 ℓ^∞ になる.
0 に収束する数列の全体 $\ell_0{}^\infty$ の双対 $(\ell_0{}^\infty)^*$ は ℓ^1 になる.

$\boxed{\textbf{6}}$

(16)　X を 3 行 n 列の実行列, A を n 行 m 列の実行列とする. 実線形写像 $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ の実線形写像 $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ による引き戻し $X \circ A$ 全体 $A^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^3) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^3)$ を考える.
つまり, 3 行 n 列の実行列全体 $M_{3,n}(\mathbb{R})$ から 3 行 m 列の実行列全体 $M_{3,m}(\mathbb{R})$ への実線形写像
$A^* : X \mapsto XA$ を考える. 次のうち常に成り立つものはどれか.

(a)　A が単射なら A^* は単射である.　　**(b)**　A が単射なら A^* は全射である.

(c)　A が全射なら A^* は単射である.　　**(d)**　A が全射なら A^* は全射である.

$\boxed{\textbf{7}}$　$\mathbb{R}^3$ 内の平面 Π を $x + 2y + 3z = 0$ で定める. 点 P を通る, 方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の直線と Π の交点を Q とおく. P に Q を対応させる一次変換の表現行列を A とおく.

(17)　$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ.　　**(18)**　$\det A$ を求めよ.　　**(19)**　$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(20)　$\mathrm{tr}\, A$ を求めよ.　　**(21)**　$\mathrm{rank}\, A$ を求めよ.　　**(22)**　$A^2 - A$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{8}}$ (112 頁)　$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を 実線形写像とする.

(23)　$f(\vec{v}) = f(\vec{w})$ なら $\vec{v} - \vec{w} \in \mathrm{Ker}\, f$ を示せ.

(24)　$[\vec{v}] \in \mathbb{R}^m / \mathrm{Ker}\, f$ に対して $f(\vec{v})$ を対応させる実線形写像
$g : \mathbb{R}^m / \mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ が実線形同型写像であることを示せ.
ここで, $[\vec{v}]$ は自然な射影 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m / \mathrm{Ker}\, f$ による $\vec{v}$ の像である.

線形代数学第二 ４類Ｒクラス 第２４回 中間試験 解答用紙

氏名	番号	得点

答えのみ書くこと．量が多いのでできるところから解くこと．教科書などを見てはいけません．

1 (1)	(2)	(3)	**2** (4)
(5)	(6)	**3** (7)	(8)
(9)	(10)	(11)	**4** (12)
(13)	(14)	**5** (15)	**6** (16)
7 (17)	(18)	(19)	(20)
(21)	(22)	**8** (23)	(24)

線形代数学第二 ４類Ｒクラス 第２４回 中間試験 解答例

誤植があるかも知れません．
$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とする．

$\boxed{1}$ **(1)** $(1i)(1j)(1i) = (ij)$	**(2)** $f((23)) = (16)(24)(35)$. かける順番を変えても同じものになる	**(3)** $\mathrm{sign}\,(23) = -1$ $\mathrm{sign}\,f((23)) = -1$ で同じ	$\boxed{2}$ **(4)** $f_{n+1}(x) = a_{n+1}x^{n+1} + f_n(x)$
(5) $f_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$	**(6)** $f_3(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ となるので，体積は $\det(\vec{a},\vec{d},\vec{c},\vec{d}) = f_3(1) = 14$.	$\boxed{3}$ **(7)** $1 \div n = x \iff nx = 1$ である．$\mathbb{Z}$ に戻すと，$nx = 1 + knm$ $(k \in \mathbb{Z})$. 右辺は n で割りきれないので矛盾.	**(8)** もし余りが等しいとすると，$(ja-1)-(ia-1) = (j-i)a$ は p の倍数のはず．しかし，$1 \leqq j-i \leqq p-1$ より矛盾.
(9) p 個の数の余りが異なるので，余りは 0 から $p-1$ までが一つずつ出る．よって，p で割りきれるものがただ一つある．	**(10)** 前小問より $xa - 1 = 0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ となる x がただ一つある．よって，$ax = 1$ よりこの x が $1 \div a$ の答えとなる．	**(11)** n は正の素数	$\boxed{4}$ **(12)** (b),(c)
(13) 3 個	**(14)** (a),(b)	$\boxed{5}$ **(15)** (a),(d)	$\boxed{6}$ **(16)** (b),(c)
$\boxed{7}$ **(17)** $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$	**(18)** $\det A = 0$	**(19)** $A\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$	**(20)** $\mathrm{tr}\,A = 2$
(21) $\mathrm{rank}\,A = 2$	**(22)** $A^2 - A = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\boxed{8}$ **(23)** $f(\vec{v}) - f(\vec{w}) = \vec{0}$ より $f(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{0}$. よって，$\vec{v}-\vec{w} \in \mathrm{Ker}\,f$.	**(24)** $\mathrm{Im}\,f$ の元は $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ を用いて $f(\vec{v})$ と書ける．$\vec{v}$ に対応する $\mathbb{R}^m/\mathrm{Ker}\,f$ の元を $[\vec{v}]$ と書くと，g の定義より $g([\vec{v}]) = f(\vec{v})$ なので，g は全射である．$g([\vec{v}]) = g([\vec{w}])$ より $f(\vec{v}) = f(\vec{w})$. 前小問より $\vec{v}-\vec{w} \in \mathrm{Ker}\,f$ なので，$\mathbb{R}^m/\mathrm{Ker}\,f$ の定義より $[\vec{v}] = [\vec{w}]$. よって，g は単射である．

<u>(24) について</u>　線形性は問題文に書いてあるので，全射性と単射性を確認すればよい．