数学英語 第１６回 期末試験 模擬問題

1　次の語は授業でどのように翻訳されていたか書け.

(1) statement　**(2)** indirect proof　**(3)** mathematical induction　**(4)** p iff q.
(5) p implies q.　**(6)** infinite series　**(7)** hypothesis　**(8)** positive integer
(9) knot　**(10)** topologically equivalent　**(11)** elastic motions　**(12)** congruent
(13) plane geometry　**(14)** segment　**(15)** tangent　**(16)** perpendicular
(17) figure　**(18)** convex polygon　**(19)** concave　**(20)** planar network
(21) vertex　**(22)** edge　**(23)** faces of a tetrahedron　**(24)** odd
(25) even　**(26)** diagonals of a square　**(27)** cube　**(28)** regular octahedron
(29) regular dodecahedron　**(30)** regular icosahedron

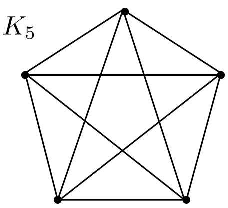
2　球面上の地図では, オイラーの公式 $V - E + F = 2$ が成り立つ. ここで, V は頂点の個数, E は辺の本数, F は面の枚数である. 必要ならば, これを証明なしに用いてよい.
5 頂点からなる完全グラフを K_5 とおく.

(31) K_5 の頂点の個数 V を求めよ.　**(32)** K_5 の辺の本数 E を求めよ.
(33) K_5 が球面に描けた仮定した場合の面の枚数 F を求めよ.
(34) K_5 が球面に描けた仮定した場合, $2E \geqq 3F$ が成り立つことを示せ.
(35) K_5 が球面には描けないことを授業でやったように証明せよ.

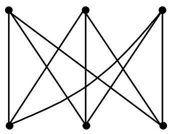
3 頂点ずつからなる完全 2 部グラフを $K_{3,3}$ とおく.

(36) $K_{3,3}$ の頂点の個数 V を求めよ.　**(37)** $K_{3,3}$ の辺の本数 E を求めよ.
(38) $K_{3,3}$ が球面に描けた仮定した場合の面の枚数 F を求めよ.
(39) $K_{3,3}$ が球面に描けた仮定した場合, $2E \geqq 4F$ が成り立つことを示せ.
(40) $K_{3,3}$ が球面には描けないことを授業でやったように証明せよ.

K_5



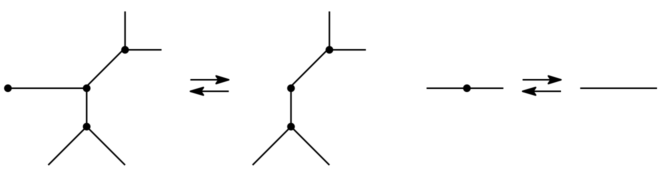
$K_{3,3}$



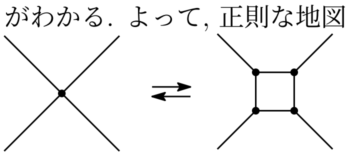
黒丸は頂点, それ以外の辺の交点は立体交差で, 頂点ではないとする.

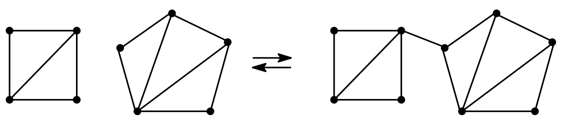
3　5 色定理 (地図が 5 色で彩色できる) を証明したい.

国境が作るグラフにおいて, 位数 1 の頂点や, 位数 2 の頂点は, 付け加えたり消去したりしても彩色数を不変に保つので, 無いとしてよい. よって, 各頂点の位数は 3 以上としてよい.



位数が 4 以上の頂点があった場合, 頂点を膨らませて (blowing up) 新しい国を作ることによって, すべての頂点の位数を 3 にできる. つまり, 正則な (3 正則な) 地図にできる. この場合に 5 色で塗り分けられれば, 新しい国を潰して (shrinking) 頂点に戻すことによって, もとの地図も 5 色で彩色されていることがわかる. よって, 正則な地図の場合を考察すればよい.





非連結な場合, 新しく 1 本の辺を加えて連結にした地図が 5 色で彩色されれば, 新しく加えた辺を除いても 5 色で彩色される. よって, 連結な地図の場合を考察すればよい.

(41) 以下の英文を参考に, 正則かつ連結な地図の 5 色定理を証明せよ (別紙に書くこと).