線形写像

[写像]: 写像は概念としては関数や変換と同じで, 集合 X の各元 x に集合 Y の元 y を 1 つずつ対応させる規則 f を X から Y への **写像** といい, y を $f(x)$ や $y=f(x)$ などと表し, x の f による**像** という. X を f の **定義域** (始域), Y を f の **値域** (終域) といい, 写像 f はこれらを明示して $f:X\to Y$ と表す. (なお, 値が数のときは関数といわれ, そうでないとき（例えばベクトルのとき）写像といわれることが多い.) $X{=}Y$ のときには**変換**ともいう.
2 つの写像 $f,g:X\to Y$ が, 全ての $x{\in}X$ について $f(x){=}g(x)$ となるとき, f と g は**等しい** といい, $f{=}g$ と表す. また, $f(x)$ と $g(x)$ は**恒等的に等しい**ともいい, (方程式 $f(x){=}g(x)$ と区別する為) $f(x)\equiv g(x)$ とも表す.
$1_X(x)=x$ $(x{\in}X)$ で定められる写像 $1_X:X\to X$ は **恒等写像** (identity map(ping)) または **恒等変換** といい, $\mathrm{Id},\mathrm{Id}_X$ (または I) とも表される. 写像 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ に対し, $h(x)=g(f(x))$ で定まる写像 $h:X\to Z$ を f と g の **合成写像** ($X{=}Y{=}Z$ のときは **合成変換**) といわれ, $g{\circ}f$ と表す. 即ち

$$(g{\circ}f)(x):=g(f(x))\qquad (x\in X)$$

写像 $f:X\to Y$ に対し, $g(f(x))=x$, $g(f(y))=y$ $(x{\in}X,\,y{\in}Y)$ をみたす写像 $g:Y\to X$ が存在するとき (即ち, $g{\circ}f=1_X$, $f{\circ}g=1_Y$ のとき), g を f の **逆写像** ($X{=}Y$ のときは **逆変換**) といい, f^{-1} と表す. (このとき, f は g の逆写像で, $g^{-1}{=}f$ である.) また f,g を (集合の) **同型写像** という.

[線型写像]: $m{\times}n$ K-行列 H に対し, n 次元数空間 K^n から m 次元数空間 K^m への写像

$$f=f_H:K^n\to K^m\quad が\quad f_H(\boldsymbol{x})=H\boldsymbol{x}\quad (\boldsymbol{x}\in K^n)$$

で定まる. これを行列 H の定める **線形写像** といい, H を f_H の**表現行列**という. $m{=}n$ のとき f_H は **一次変換** 又は **線形変換** ともいう. 恒等変換 1_{K^n} の表現行列は単位行列 E_n. $\ell{\times}m$ K-行列 G の定める線形写像 $g(\boldsymbol{y}):=G\boldsymbol{y}$ との合成写像 $g{\circ}f:K^n\to K^\ell$ の表現行列は, $(g{\circ}f)(\boldsymbol{x})=g(H\boldsymbol{x})=G(H\boldsymbol{x})=(GH)\boldsymbol{x}$ より積 GH.
$f(\boldsymbol{x})=f_H(\boldsymbol{x})=H\boldsymbol{x}$ は行列の積だから次の性質 **[L]** を持つ : $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K^n$, $s\in K$ として,

[L1] $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=H(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=H\boldsymbol{x}+H\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$, [L2] $f(\boldsymbol{x}s)=H(\boldsymbol{x}s)=(H\boldsymbol{x})s=f(\boldsymbol{x})s$

$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=H\boldsymbol{x}$ $(H=[h_{ij}])$ は次の様に n 変数の定数項のない一次関数の m 個の組である:

$$\begin{cases} y_1 = h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \cdots + h_{1n}x_n \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_m = h_{m1}x_1 + h_{m2}x_2 + \cdots + h_{mn}x_n \end{cases}$$

一般に, K 上のベクトル空間 V から W への写像 $f:V\to W$ が上記の性質 **[L]**(=[L1], [L2]) をもつ, 即ち

[L1] $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})$ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V)$

[L2] $f(\boldsymbol{a}s)=f(\boldsymbol{a})s$, $f(s\boldsymbol{a})=sf(\boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{a}\in V,\ s\in K)$

をみたすとき f を (K 上の) **線形写像** (一次写像) といい, この性質を **線形性** という. **和**, **スカラー倍を保つ**, あるいは **和**, **スカラー倍と交換する** ともいう. $V=W$ のとき $f:V\to V$ は V の **一次変換**, **線形変換** ともいう.
[L2] で $s{=}0,-1$ として次の [L0] を得る.

[L0] $f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, $f(-\boldsymbol{a})=-f(\boldsymbol{a})$. (より詳しくは $f(\boldsymbol{0}_V)=\boldsymbol{0}_W$, $\boldsymbol{0}_V,\boldsymbol{0}_W$ は V,W の零ベクトル.)
$(\because)$ $f(\boldsymbol{0}_V)=f(\boldsymbol{0}_V0)\overset{\mathrm{L2}}{=}f(\boldsymbol{0}_V)0=\boldsymbol{0}_W$. $f(-\boldsymbol{a})=f((-1)\boldsymbol{a})\overset{\mathrm{L2}}{=}(-1)f(\boldsymbol{a})=-f(\boldsymbol{a})$.

例 1 次の写像 $f_1,f_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ において f_1 は線形写像であり, f_2 は線形写像ではない.

$$f_1\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+y\\2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\qquad f_2\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x^2+y\\x+1\end{bmatrix}$$

f_1 が行列で表されるので [L1],[L2] をみたす事は容易に確かめられる: $\boldsymbol{a}={}^t[a_1,a_2]$, $\boldsymbol{b}={}^t[b_1,b_2]$, $s{\in}\mathbb{R}$ とするとき,

$$f(\boldsymbol{a}{+}\boldsymbol{b})=f\left(\begin{bmatrix}a_1{+}b_1\\a_2{+}b_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}(a_1{+}b_1){+}(a_2{+}b_2)\\2(a_2{+}b_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1{+}a_2\\2a_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1{+}b_2\\2b_2\end{bmatrix}=f(\boldsymbol{a}){+}f(\boldsymbol{b}),$$

$$f(s\boldsymbol{a})=f\left(\begin{bmatrix}sa_1\\sa_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}sa_1{+}sa_2\\2sa_2\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}a_1{+}a_2\\2a_2\end{bmatrix}=sf(\boldsymbol{a}).$$

f_2 は 第 2 成分に定数項があるので $f_2(\boldsymbol{0})={}^t[0,1]\neq\boldsymbol{0}$ より [L0] を満たさない.
また, 第 1 成分は 1 次関数ではないので, 次の例の様に [L1],[L2] を満たさない: $\boldsymbol{a}{=}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}{=}2\boldsymbol{a}{=}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$, $s{=}3$ のとき
$f_2(\boldsymbol{a}{+}\boldsymbol{b}){=}f_2(3\boldsymbol{a}){=}f_2\left(\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right){=}\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}$. $f_2(\boldsymbol{a}){+}f_2(\boldsymbol{b}){=}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}{+}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}{=}\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}\neq f_2(\boldsymbol{a}{+}\boldsymbol{b})$. $3f_2(\boldsymbol{a}){=}3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}{=}\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}\neq f_3(3\boldsymbol{a})$
よって線形写像ではない.

例 2 K 上のベクトル空間 V と V のベクトルの組 $A{=}[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$ に対し, 写像 $\varphi_A:K^n\to V$ を

$$\varphi_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_1x_1{+}\cdots{+}\boldsymbol{a}_nx_n\quad (\boldsymbol{x}={}^t[x_1\cdots x_n]\in K^n)$$

で定めると線型写像になる. ([L1],[L2] をみたす事を確かめればよい.)
$(\because)$ [L1]: $\varphi_A(\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{x}'){=}A(\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{x}'){=}A\boldsymbol{x}{+}A\boldsymbol{x}'{=}\varphi_A(\boldsymbol{x}){+}\varphi_A(\boldsymbol{x}')$, [L2]: $\varphi_A(\boldsymbol{x}s){=}A(\boldsymbol{x}s)=(A\boldsymbol{x})s{=}\varphi_A(\boldsymbol{x})s$ による.

例 3 $M_{m.n}(K)$ を $m{\times}n$ K-行列全体のつくるベクトル空間, A,B をそれぞれ $\ell{\times}m$ K-行列, $n{\times}k$ K-行列とするとき, A,B を左右から掛ける写像 f は線型写像になる.

$$f:M_{m.n}(K)\to M_{\ell.k}(K),\qquad f(X)=AXB$$

$(\because)$ $X, Y \in M_{m.n}(K)$, $s \in K$ に対し,
[L1]: $f(X+Y) = A(X+Y)B = (AXB)+(AYB) = f(X)+f(Y)$. [L2]: $f(sX) = A(sX)B = s(AXB) = sf(X)$.

[L1]+[L2] は次の [L3] と同値であり, [L3] を繰り返し使えば次の [L4] を得る:

[L3] $f(\boldsymbol{a}s + \boldsymbol{b}t) = f(\boldsymbol{a})s + f(\boldsymbol{b})t$

[L4] $f(\boldsymbol{a}_1 s_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_n s_n) = f(\boldsymbol{a}_1)s_1 + \cdots + f(\boldsymbol{a}_n)s_n, \quad f\big(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i s_i\big) = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{a}_i)s_i$

$(\because)$ [L1]+ [L2]⇒[L3]: $f(\boldsymbol{a}s + \boldsymbol{b}t) \overset{[L1]}{=} f(\boldsymbol{a}s) + f(\boldsymbol{b}t) \overset{[L2]}{=} f(\boldsymbol{a})s + f(\boldsymbol{b})t$.
[L3]⇒[L1]: t=0 とすれば, $f(\boldsymbol{a}s) = f(\boldsymbol{a}s + \boldsymbol{0}_V 0) \overset{[L3]}{=} f(\boldsymbol{a})s + f(\boldsymbol{0}_V)0 = f(\boldsymbol{a})s + \boldsymbol{0}_W = f(\boldsymbol{a})s$ より [L1] を得る.
[L3] ⇒ [L2] : s=t=1 とすれば, $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}1 + \boldsymbol{b}1) \overset{[L3]}{=} f(\boldsymbol{a})1 + f(\boldsymbol{b})1 = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$ より [L2] を得る.
[L4]: 左辺 $\overset{[L3]}{=} f(\boldsymbol{a}_1 s_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_{n-1}s_{n-1}) + f(\boldsymbol{a}_n)s_n \overset{[L3]}{=} \cdots \overset{[L3]}{=} f(\boldsymbol{a}_1)s_1 + \cdots + f(\boldsymbol{a}_n)s_n =$ 右辺.
$\therefore$ $f(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i s_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{a}_i)s_i$ (一次結合の像は像の一次結合になる.)
[L4] は, $A = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$, $\boldsymbol{s} = {}^t[s_1 \cdots s_n]$, $\boldsymbol{a}_1 s_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_n s_n = A\boldsymbol{s}$ とすれば,

$$f(A\boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{a}_1 s_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_n s_n) \overset{[L4]}{=} f(\boldsymbol{a}_1)s_1 + \cdots + f(\boldsymbol{a}_n)s_n = [f(\boldsymbol{a}_1) \cdots f(\boldsymbol{a}_n)] \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_1 \end{bmatrix} = [f(\boldsymbol{a}_1) \cdots f(\boldsymbol{a}_n)]\boldsymbol{s}.$$

ここで便宜的に $[f(\boldsymbol{a}_1) \cdots f(\boldsymbol{a}_n)]$ を $f(A)$ と表すと (通常 $(\prod_{i=1}^{n} f)(A)$ や $(f \times \cdots \times f)(A)$ と表すが略した)

[L5] $\quad f(A\boldsymbol{s}) = f(A)\boldsymbol{s} \qquad (\, f(A) := [f(\boldsymbol{a}_1) \cdots f(\boldsymbol{a}_n)]\,)$

H=$[\boldsymbol{h}_1 \cdots \boldsymbol{h}_k]$ を $n \times k$ K-行列 とするとき, ベクトルの組 AH=$[A\boldsymbol{h}_1 \cdots A\boldsymbol{h}_n]$ についても,
$f(AH) = f([A\boldsymbol{h}_1 \cdots A\boldsymbol{h}_k])$:=$[f(A\boldsymbol{h}_1) \cdots f(A\boldsymbol{h}_k)] \overset{[L5]}{=} [f(A)\boldsymbol{h}_1 \cdots f(A)\boldsymbol{h}_k]$=$f(A)[\boldsymbol{h}_1 \cdots \boldsymbol{h}_k] = f(A)H$ より,

[L5]' $f(AH) = f(A)H \quad (A$=$[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$, H=$[\boldsymbol{h}_1 \cdots \boldsymbol{h}_k]$ ($n \times k$ 行列))

例 4 数ベクトル空間の間の線形写像 $f : K^n \to K^m$ (V=K^n, W=K^m) は, 基本ベクトルの組 $[\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_n]$=$E_n$ に対し, $\boldsymbol{h}_1$=$f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \boldsymbol{h}_n$=$f(\boldsymbol{e}_n)$, H=$[\boldsymbol{h}_1 \cdots \boldsymbol{h}_n]$ ($m \times n$ 行列) ($f(E_n) = H$) とおくとき ,

$$f(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} = f_H(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in K^n)$$

即ち, 数ベクトル空間の間の線型写像は行列によって表される.
$(\because)$ [L5] より $f(\boldsymbol{x}) = f(E_n\boldsymbol{x}) = f(E_n)\boldsymbol{x} = H\boldsymbol{x}$. より詳しくは $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1 \cdots, x_n] = \boldsymbol{e}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_n x_n$ と [L4] より,

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{e}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_n x_n) \overset{L4}{=} f(\boldsymbol{e}_1)x_1 + \cdots + f(\boldsymbol{e}_n)x_n = \boldsymbol{h}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{h}_n x_n = H\boldsymbol{x}$$

線型写像の表現行列 一般の場合にも, 基底を定めれば線形写像は上の例 4 と同様にして, 次の様に行列で表される:
以下, V, W を K 上のベクトル空間, $A = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ を V の基底 ($\dim V = n$), $B = [\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_m]$ を W の基底 ($\dim W = m$), $f : V \to W$ を線形写像とする.
このとき, 各 $f(\boldsymbol{a}_j)$ は W のベクトルだから基底 $B = [\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_m]$ の一次結合で表せて,

$$f(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i h_{ij} = \boldsymbol{b}_1 h_{1j} + \cdots + \boldsymbol{b}_m h_{mj} = [\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_m] \begin{bmatrix} h_{1j} \\ \vdots \\ h_{mj} \end{bmatrix} = B\boldsymbol{h}_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$H = [\boldsymbol{h}_1 \cdots \boldsymbol{h}_n] = [h_{ij}]$ ($m \times n$ 行列) とおけば,

$$f(A) = [f(\boldsymbol{a}_1)\, f(\boldsymbol{a}_2) \cdots f(\boldsymbol{a}_n)] = [B\boldsymbol{h}_1 \cdots B\boldsymbol{h}_n] = B[\boldsymbol{h}_1 \cdots \boldsymbol{h}_n] = BH. \qquad \therefore\ f(A) = BH$$

この行列 $H = H_f$ を 基底 A, B に関する f の**表現行列** という. f が一次変換 $f : V \to V$ のときは一組の基底 A に関する表現行列 $f(A) = AH$ を考え, n 次正方行列 H を, 一次変換 f の基底 A に関する**表現行列**という.
例 4 の行列 H は基底 E_n, E_m に関する線型写像 $f : K^n \to K^m$ の表現行列である.
注 表現行列 H は次の様に, $f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)$ を縦に並べ, 各 $f(\boldsymbol{a}_j)$ を横に展開してから**転置**をとっても求まる:

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) \\ \vdots \\ f(\boldsymbol{a}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 h_{11} + \boldsymbol{b}_2 h_{21} + \cdots + \boldsymbol{b}_m h_{m1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \boldsymbol{b}_1 h_{1n} + \boldsymbol{b}_2 h_{2n} + \cdots + \boldsymbol{b}_m h_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & \cdots & h_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1n} & h_{2n} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{bmatrix} = {}^t H\, {}^t B \quad \text{を転置して}$$

$$f(A) = [f(\boldsymbol{a}_1)\ f(\boldsymbol{a}_2)\ \cdots\ f(\boldsymbol{a}_n)] = BH = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_m] \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix}$$