# ベクトル空間

**数の性質**　$K=\ \mathbb{C}$ (複素数体),　$\mathbb{R}$ (実数体),　$\mathbb{Q}$ (有理数体) とする.
$K=\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}$ に共通する四則演算の基本的性質 **[F]**(**体の公理**という) は,　$x,y,z\in K$ に対し
**[F1]**　和 $x+y$ について:　(i) **結合法則**:　$(x+y)+z=x+(y+z)$,　(ii) **交換法則**:　$x+y=y+x$,
(iii) **零の存在**: 全 $x\in K$ に対し $x+0=x=0+x$ となる $0\in K$ が (唯1つ) ある,
(iv) $-x$ **の存在**:　各 $x\in K$ に対し $x+y=0=y+x$ となる $y\in K$ が (唯1つ) ある,
(この $y$ は $-x$ と表される.　$\therefore\ x+(-x)=0=-x+x$.　差 $x-z$ は $x+(-z)$ と定められている.)
**[F2]**　積 $x\cdot y$ について:　(i) **結合法則**:　$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$.　(ii) **交換法則**:　$x\cdot y=y\cdot x$,
(iii) 1 **の存在**: 全 $x\in K$ に対し,　$x\cdot 1=x=1\cdot x$ となる $1\in K$ $(1\neq 0)$ が (唯1つ) ある,
(iv) **逆数** $x^{-1}$ **の存在**:　各 $x\in K$, $x\neq 0$ に対し,　$x\cdot y=1=y\cdot x$ となる $y\in K$ が (唯1つ) ある,
( この $y$ は $x^{-1}$ と表され, $x$ の逆数といわれる.　$\therefore\ x\cdot x^{-1}=1=x^{-1}\cdot x$.　商 $x/z$ は $x\cdot z^{-1}$ と定められている.)
**[F3]**　**分配法則**　(i)　$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$,　(ii)　$(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$.　(通常, 積 $x\cdot y$ は $xy$ と表される.)

**注意 1**　(唯1つ) の部分は逆行列の一意性と同様に証明できる. (例えば, [F1(iii)] をみたす $0'$ があれば, $0'\underset{x=0'}{=}0+0'\underset{x=0}{=}0$.)
他の性質, 例えば $0x=0$ もこれらを用いて証明できる.
($\because\ 0x=(0+0)x=0x+0x$.　両辺に $-0x$ を加えて,　$0=0x+(-0x)=(0x+0x)+(-0x)=0x+(0x+(-0x))=0x+0=0x$. )

**注意 2**　一般に, 集合 $K$ 上に性質 **[F]**(体の公理という) をみたす演算 $+,\cdot$ が与えられているとき, $K$ を**体** (詳しくは可換体) という. (積の可換性 [F2(ii)] をみたさないときは非可換体, または斜体という.) また一般に, $K$ は和 $+$ により, $K^{\times}:=\{x\in K\,|\,x\neq 0\}$ は積 $\cdot$ により (可換) **群** になるという. 0 は加法の**単位元**, $-x$ は $+$ に関する $x$ の**逆元**,　1 は乗法の**単位元**, $x^{-1}$ は $\cdot$ に関する $x$ の**逆元**といわれる. (詳しくは, 集合 $G$ 上に結合法則をみたす演算が定められていて, (iii) をみたす単位元と, 各 $x$ に対し (iv) をみたす逆元が存在するとき $G$ を群といい, さらに演算が交換法則をみたすとき可換群または Abel 群という.)

以下, $K=\mathbb{C}$ 又は $\mathbb{R}$ とする. ($K=\mathbb{Q}$ でも同様だが, ここでは $\mathbb{C}$,$\mathbb{R}$ に限定して考える.)
ベクトル空間 $V$ (数ベクトル空間 $K^n$, 幾何ベクトル空間) は和, スカラー倍に関し次の性質 **[V]** (**ベクトル空間の公理** という) をもっている:
**ベクトル空間の公理 [V]**　$K=\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とし, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in V$ とするとき
**[V1]** 和について:　(i)(結合法則)　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,　(ii) (交換法則)　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,
(iii) (零ベクトルの存在) 全 $\boldsymbol{a}\in V$ に対し $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$ となる $\boldsymbol{0}\in V$ が (唯1つ) ある,
(iv) (逆ベクトルの存在)　各 $\boldsymbol{a}\in V$ に対し $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{b}\in V$ が (唯1つ) ある.
この $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**といい, $-\boldsymbol{a}$ と表す. ($\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.) 差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ と定める.
**[V2]** スカラー倍について:　$s,t\in K$ に対し,　$\boldsymbol{a}s=s\boldsymbol{a}$ であり,
(i) (結合法則)　$(st)\boldsymbol{a}=s(t\boldsymbol{a})$,　(ii) (単位性)　$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,
**[V3]** (i) (分配法則1)　$s(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=s\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}$,　(ii) (分配法則2)　$(s+t)\boldsymbol{a}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{a}$.

幾何ベクトルにおいては図を描くことにより [V] が示される. 数ベクトル (より一般に行列) の和, スカラー倍が各成分の数の和, 積により定義されていることから数ベクトル空間が公理 [V] をみたすことは 公理 [F] より直接示される. このことは前期に述べた. この様に和, スカラー倍が定められる集合は, $m\times n$ 行列全体の集合を含め, たくさんある.

一般に集合 $V$ の各元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in V$ に, 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in V$ とスカラー倍　$t\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}t\in V$　$(t\in K)$ が定められていて上の公理 **[V]** をみたすとき, $V$ を $K$ 上の **ベクトル空間**, あるいは**線型空間** であるといい, $K=\mathbb{C}$ のとき $V$ を**複素ベクトル空間 (複素線形空間)**, $K=\mathbb{R}$ のとき $V$ を**実ベクトル空間 (実線形空間)** という.　また, ベクトル空間の元 (= 要素) を **ベクトル** という.　($K=\mathbb{R}$ のときはスカラー倍として実数倍しか考えていないということである.)
このとき ベクトルの和は **[V1]** より数の和と同様の, ベクトルのスカラー倍は **[V2]** と **[V3]** より数の積と同様の性質を持つ. 例えば, 結合法則が成り立つので　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,　$s\boldsymbol{a}$ の様に括弧は省略され, 数学的帰納法により [V] の関係式は多項の関係式に拡張され, 交換法則により和, スカラー倍の順序は変えてよい. 例えば　[V1(iii)] $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}+\cdots+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}$,

$$\textbf{[V3']}:\ \Big(\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_j\Big)s=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_j s,\quad \boldsymbol{a}\Big(\sum_{i=1}^{m}s_i\Big)=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{a}s_i,\quad \Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}s_j\Big)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{a}_i s_j.$$

また, 次も成り立つ:

$$\textbf{[V2(iii)]}\quad 0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\qquad t\,\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}.\qquad \textbf{[V4]}\quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

($\because$)　$0\boldsymbol{a}=(0+0)\boldsymbol{a}\underset{\text{V3(ii)}}{=}0\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a}$.　左右両辺に $-0\boldsymbol{a}$ を加えて,　$0\boldsymbol{a}+(-0\boldsymbol{a})=0\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{a}+(-0\boldsymbol{a})$.
左辺 $=0\boldsymbol{a}+(-0\boldsymbol{a})\underset{\text{V1(iv)}}{=}\boldsymbol{0}$,　右辺 $=0\boldsymbol{a}+(0\boldsymbol{a}+(-0\boldsymbol{a}))\underset{\text{V1(iv)}}{=}0\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}\underset{\text{V1(iii)}}{=}0\boldsymbol{a}$.　$\therefore\ \boldsymbol{0}=0\boldsymbol{a}$.　$t\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ も $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}$ より同様.
[V4]: $\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}\underset{\text{V2(ii)}}{=}1\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a}\underset{\text{V3(ii)}}{=}(1+(-1))\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}\underset{\text{V2(v)}}{=}\boldsymbol{0}$ より $(-1)\boldsymbol{a}$ が [V1(iv)] をみたすので $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.
(唯1つ) の部分は: [V1(iii)] をみたす $\boldsymbol{0}'$ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}'=\boldsymbol{a})$ があれば $\boldsymbol{0}'\underset{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}}{=}\boldsymbol{0}'+\boldsymbol{0}\underset{\text{V1(ii)}}{=}\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}'\underset{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}'}{=}\boldsymbol{0}$.
[V1(iv)] をみたす $\boldsymbol{c}$ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0})$ があれば $\boldsymbol{c}\underset{\text{V1(iv)}}{=}\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\underset{\text{V1(i,ii)}}{=}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\underset{\text{V1(iv)}}{=}\boldsymbol{0}+\boldsymbol{b}\underset{\text{V1(ii,iii)}}{=}\boldsymbol{b}$.
従って**ベクトルの演算は数ベクトルと同様に計算してよい.** また, 逆ベクトルは [V4] により $(-1)\boldsymbol{a}$ と定めればよい.

数ベクトル空間 $K^n$ は $K$ 上の, 幾何ベクトル空間は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になるが, その他にも次の様な例がある:

**$m\times n$ 行列全体のつくるベクトル空間**　$m\times n$ 行列全体の集合 $M_{m,n}(\mathbb{C})$, $m\times n$ 実行列全体の集合 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (纏めて $M_{m,n}(K)$) は 行列の和, スカラー倍, 零ベクトルは零行列 $O$ として $K$ 上のベクトル空間になる. 即ち, $M_{m,n}(\mathbb{C})$ は複素ベクトル空間, $M_{m,n}(\mathbb{R})$ は実ベクトル空間である. (複素) 行列は $\mathbb{C}$-行列, 実行列は $\mathbb{R}$-行列と表し, 纏めて $K$-行列と表す. 特に $n$ 次正方行列全体の空間を ($M_{n,n}(K)$ の代わりに) $M_n(K)$ と表す.

**零ベクトル空間 $\{\mathbf{0}\}$**: $\mathbf{0}$ だけからなる集合 $\{\mathbf{0}\}$ に $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $s\mathbf{0}=\mathbf{0}$ $(s\in K)$ と定めるとベクトル空間になる.

**多項式の空間** $K$ 係数一変数多項式全体の空間 $K[x]$: ($\mathbb{R}[x]$ は実係数, $\mathbb{C}[x]$ は複素係数の多項式全体) 多項式の和, 定数倍（各係数の和, 定数倍) でベクトル空間になる. 定数や単項式も多項式とする. 特に零ベクトルは定数 0.

**無限次元数空間 (数列空間)** $K^\infty$: 無限項の数ベクトル $\boldsymbol{x}={}^t[x_1,x_2,\ldots]$ 全体の集合 $K^\infty$ も項ごとの和, 定数倍により $K$ 上のベクトル空間になる. $\boldsymbol{x}$ は数列 $\{x_n\}$ と見なされる.

- 一次結合, 一次独立 (従属), 部分空間, 生成系, 基底等の用語も数ベクトル等のときと同じ定義とする.

ベクトル空間 $V$ の部分空間 $W$ においては, ベクトルの和, スカラー倍は $V$ での演算なので公理 [V] をみたしており, これらの演算で閉じているので, ベクトル空間の**部分空間** $W$ も**ベクトル空間**になる.
**注**　$V$ 自体も $V$ の部分空間とする. また, 零ベクトル空間 $\{\mathbf{0}\}$ はすべてのベクトル空間の部分空間と考える.

**部分空間の例**　これまでに挙げた $K^n$ や幾何ベクトル空間の部分空間以外に次の様な例がある.
**$n$ 次以下の多項式の空間**　$K[x]_n:=\{a_0+\cdots+a_nx^n\,|\,a_0,\ldots,a_n\in K\}$ は $K[x]$ の部分空間になる.
**$n$ 次実対称行列全体の空間**　$H_{\mathbb{R}}(n):=\{A\in M_n(\mathbb{R})\,|\,{}^tA=A\}$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間になる. (**問** これらを確かめよ.)

ここでは詳しくは扱わないが, ベクトル空間の例として次の様なものがある.

**[ベクトル空間の発展的例]**　(一般に無限次元になる.)
(1) $K$ 係数多変数多項式全体の空間 $K[x_1,\ldots,x_n]$ も $K[x]$ と同様に $K$ 上のベクトル空間になる.
(2) **関数空間**: 集合 $X(=\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\ldots$ 等) 上の $K$-値関数全体 $F(X,K)$. (定数も関数とみなす. 零ベクトルは定数 0.)
(微積分学では, $K$=$\mathbb{R}$ のとき, $X$=$\mathbb{R}$ は実数値 1 変数関数 $f(x)$, $X=\mathbb{R}^2$ は実数値 2 変数関数 $f(x,y)$, 等.)
和, 実数倍は例えば $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2+3x+1$ のときこれらの和は $f$+$g$, $s$ 倍は $sf$ と表され,
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sin x+x^2+3x+1$, $(sf)(x)=s\cdot f(x)=s\sin x$.
複素数値関数は ($\cos x+i\sin x(=e^{ix})$ の様に,) 一般に実数値関数 $f(x),g(x)$ を用いて $f(x)+ig(x)$ と表される.
一般に, 関数 $f,g$ の和 $f$+$g$ と $s$ $(\in K)$ 倍 $sf$ が, 各 $a\in X$ について　$(f+g)(a)=f(a)+g(a)$,　$(sf)(a)=s(f(a))$ で定められ, $f=g\Leftrightarrow$ 全 $a\in X$ について $f(a)=g(a)$. (このとき $f$ と $g$ は恒等的に等しいといわれ $f(x)\equiv g(x)$ とも表される.) 定数 $c$ は $c(x)\equiv c$. また, $(f+0)(x)\equiv f(x)+0=f(x)$, $-f(x)$ が $f(x)$ の逆ベクトル.
各 $f(a)$ は数なので, 数の性質 [F] により $F(X,K)$ は [V] をみたし, $K$ 上のベクトル空間になる.
(3) **写像空間**: 集合 $X$ からベクトル空間 $V$ への写像全体 $F(X,V)$. $(f+g)(x)$:=$f(x)$+$g(x)$, $(sf)(x)$:=$s$·$f(x)$.
例えば ($V$=$\mathbb{R}^3$ )　$f\in F(X,\mathbb{R}^3)$ は 3 つの関数の組 $f(x)={}^t[f_1(x),f_2(x),f_3(x)]$ で表され, ベクトル場といわれる.
$V$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ は $f(x)\equiv\boldsymbol{a}$ となる定値写像とみなされ, 特に $F(X,V)$ の零ベクトルは $\mathbf{0}$, 逆ベクトルは $-f(x)$ であり, 各 $a$∈$X$ に対し $f(a)$∈$V$ で, $V$ が公理 [V] をみたす事より $F(X,V)$ も [V] をみたし, ベクトル空間になる.
例えば, 各 $a$∈$X$ に対し $f(a)+g(a)=g(a)+f(a)$ より $f+g=g+f$, 等.
**[部分空間の例]**　以下の (1,2,3,4) の例は微分積分学における定理を用いて示される.
(1)　数列空間 $K^\infty$ の部分空間として, 収束数列全体.
(2)　$F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (実数値 1 変数関数全体) の部分空間として, 連続関数全体の空間 $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
(3) $r$ 回連続微分可能な関数全体　$C^r(\mathbb{R},\mathbb{R})$ .　$C^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ も同様に $F(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ の部分空間になる.
(4) 線型同次常微分方程式の解空間は常微分方程式論における定理により $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ の部分空間になる.
(5)　数列空間 $K^\infty$ の部分空間として, 同次線形漸化式 $(*)$ $x_{n+k}+a_{k-1}x_{n+k-1}+\cdots+a_0x_n=0$ $(a_i$∈$K)$ の解空間.
$(\because)$ $\{x_n\},\{y_n\}$ を $(*)$ の解 $(\sum_{i=0}^{k}a_ix_{n+i}=0,\ \sum_{i=0}^{k}a_iy_{n+i}=0\ (a_k$:=1, $n$=1, 2, …)) $s,t$∈$K$ とすると, $s\{x_n\}$+$t\{y_n\}=\{sx_n$+$ty_n\}$ は, $\sum_{i=0}^{k}a_i(sx_{n+i}$+$ty_n)=s(\sum_{i=0}^{k}a_ix_{n+i})+t(\sum_{i=0}^{k}a_iy_{n+i})=s$·0+$t$·0=0 より $(*)$ の解になるので [S3] をみたし, 部分空間になる.