部分空間

V をベクトル空間 (幾何ベクトル空間 V^2, V^3 または数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$) とし, $V^2, V^3, \mathbb{R}^n$ ではスカラー倍として実数倍のみを考え, $\mathbb{C}^n$ では複素数倍を考える.

V の部分集合 W が, 零ベクトル $\mathbf{0}$ を含み和とスカラー倍に関して閉じているとき, 即ち, 次の性質 [**S**]:

[S0] $\mathbf{0} \in W$.

[S1] $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \implies \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$.

[S2] $\boldsymbol{a} \in W$, s がスカラー $\implies s\boldsymbol{a} \in W$

をみたすとき, W を**部分ベクトル空間** 又は**線型部分空間**, 略して**部分空間**という.
尚, V 自身や 零ベクトルのみからなる集合 $\{\mathbf{0}\}$ も部分空間とする.

[S1]+ [S2] は次の [S3] と同値:

[S3] $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$, s, t がスカラー $\implies s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b} \in W$.

($\because$) ([S3] $\Rightarrow$[S1]:) [S3] で, $s=t=1$ とすれば $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ 等より [S1]. ([S3] $\Rightarrow$[S2]:) $t=0$ とすれば $s\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{b}=s\boldsymbol{a}$ より [S2].
([S1],[S2] $\Rightarrow$[S3]:) [S2] より $s\boldsymbol{a}$, $t\boldsymbol{b} \in W$. [S1] より $s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b} \in W$.

[S3] より帰納的に:

[S4] $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in W$, $s_1, \ldots, s_k$ がスカラー $\implies (s_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+s_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1})+s_k\boldsymbol{a}_k \in W$.

• W が部分空間であることを示すには, [S0], [S1],[S2] を満たしているかどうかを順に調べれば良い. [S1],[S2] の代りに [S3] を確かめても良い. なお, W が空集合でないときは, [S2] において $s=0$ とおけば $\mathbf{0}=0\boldsymbol{a} \in W$ より [S0] が分かるので, [S1],[S2] または [S3] を確かめればよい. また, 部分空間でないことを示すには反例を挙げれば良い.

例題 1(部分空間の判定) 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合が部分空間になるかどうかを調べよ.

(1) $W_1=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \,\middle|\, x+y=0\right\}$, (2) $W_2=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \,\middle|\, x+y=1\right\}$, (3) $W_3=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \,\middle|\, x+y \geqq 0\right\}$, (4) $W_4=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \,\middle|\, x^2-y^2=0\right\}$

解答 以下, $\boldsymbol{x}={}^t[x,y]$, $\boldsymbol{a}={}^t[a_1,a_2]$, $\boldsymbol{b}={}^t[b_1,b_2]$, $s,t \in \mathbb{R}$ とする. $\mathbf{0}={}^t[0,0]$ である.

(1) [S0]: $0+0=0$ より $\mathbf{0}={}^t[0,0] \in W_1$. 以下, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W_1$ とする, 即ち, $a_1+a_2=0$, $b_1+b_2=0$.
[S1]: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ は $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)=0+0=0$ より $x+y=0$ を満たすので $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W_1$.
よって W_1 は和に関して閉じている.
[S2]: $s\boldsymbol{a}={}^t[sa_1, sa_2]$ は $sa_1+sa_2=s(a_1+a_2)=0$ より実数倍で閉じている. よって W_1 は部分空間になる.
(2) $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}={}^t[0,0]$ は $x+y=1$ を満たさない. よって W_2 は $\mathbf{0} \in W_2$ を満たさないので部分空間ではない.
(3) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1={}^t[1,0]$ は $x+y \geqq 0$ を満たすので $\boldsymbol{e}_1 \in W_3$ だが, $(-1)\boldsymbol{e}_1={}^t[-1,0]$ は $x+y \geqq 0$ を満たさないので W_3 はスカラー倍に関して閉じていない. よって W_3 は部分空間ではない.
(4) $\mathbf{0} \in W_3$, $\boldsymbol{a}_1={}^t[1,1], \boldsymbol{a}_2={}^t[1,-1] \in W_4$ だが, $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2={}^t[2,0]$ は $x^2-y^2=0$ を満たさないので W_4 は和に関して閉じてない. よって W_4 は部分空間ではない.

問 (1) $W:=\{\boldsymbol{x}={}^t[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leqq 1\}$ は部分空間でないことを示せ.
(2) $W:=\{\boldsymbol{x}={}^t[x_1,\ldots,x_n] \in \mathbb{R}^n \,|\, x_{k+1}=\cdots=x_n=0\}$ は部分空間であることを示せ.

生成する部分空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\}$ の一次結合全体の集合

$$W:=\langle \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\rangle=\{s_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+s_k\boldsymbol{a}_k \,|\, s_1,\ldots,s_k \text{ はスカラー}\}$$

は V の部分空間になる.

($\because$) $\boldsymbol{x}:=s_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+s_k\boldsymbol{a}_k$, $\boldsymbol{y}:=t_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+t_k\boldsymbol{a}_k \in W$, $t_1,\ldots,t_k$, t はスカラーとする.
[S0]: $s_1=\cdots=s_k=0$ とおくと $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ になるので $\mathbf{0} \in W$.
[S1]: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(s_1+t_1)\boldsymbol{a}_1+\cdots+(s_k+t_k)\boldsymbol{a}_k$. $(s_1+t_1),\ldots,(s_k+t_k)$ はスカラーなので $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$.
[S2]: $t\boldsymbol{x}=(ts_1)\boldsymbol{a}_1+\cdots+(ts_k)\boldsymbol{a}_k$. $ts_1,\ldots,ts_k$ はスカラーなので $t\boldsymbol{x} \in W$.

この W を $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\}$ の**生成する** (又は **張る**) **部分空間**といい, $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\}$ を W の **生成系** という. さらに, 生成系 $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\}$ が一次独立のとき, $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\}$ を W の **基底** という.

例 1 (座標空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を $\mathbb{R}^3$ の基本ベクトルとするとき,
• $\langle \boldsymbol{e}_1\rangle$ は x 軸, $\langle \boldsymbol{e}_2\rangle$ は y 軸, $\langle \boldsymbol{e}_3\rangle$ は z 軸, • $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\rangle$ は xy 平面, $\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\rangle$ は yz 平面, $\langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1\rangle$ は zx 平面. (図)

例 2 (幾何ベクトルの組の張る部分空間) 零でない幾何ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について,
(1) $\langle \boldsymbol{a}\rangle$ は原点 O と $\boldsymbol{a}$ を通る直線. (図) (2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が一次独立のとき, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ は原点 O と $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平面. (図)
(3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立のとき, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle$ は (3 次元) 空間全体.

生成系, 基底 ベクトル空間 V の部分空間 W が与えられたとき, $W=\langle \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\rangle$ となるベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\}$ を W の**生成系** といい, 更に $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\}$ が一次独立のとき $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\}$ は W の**基底** であるという. 即ち, W のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\}$ が W の**基底** であるとは次の条件 **[B]** をみたすときをいう:

[B1] $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\}$ は一次独立 $(\boldsymbol{a}_1s_1+\cdots+\boldsymbol{a}_ks_k=\boldsymbol{0} \implies s_1=\cdots=s_k=0\ (\Leftrightarrow \boldsymbol{s}:={}^t[s_1,\dots,s_k]=\boldsymbol{0}))$.

[B2] $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\}$ W の生成系 $(W=\langle \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\rangle \Leftrightarrow W$ のベクトルは $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\}$ の一次結合で表せる).

順序を付けたベクトルの組 $A=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k]$ については $\langle A\rangle:=\langle \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\rangle$ とし, $W=\langle A\rangle$ 等と表す.

• 以下 数空間 $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ を同時に扱う為, K を $\mathbb{C}$ 又は $\mathbb{R}$ とし, K^n は $\mathbb{C}^n$ 又は $\mathbb{R}^n$ を表すとする. また K-行列で, $K=\mathbb{C}$ のときは複素行列, $K=\mathbb{R}$ のときは実行列を表すものとする.

数空間 K^n の基底 基本ベクトルの組 $E_n=[\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n]$ は K^n の基底になる. これを K^n の**標準基底** という.
数ベクトルの n 個の組 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ は $A:=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]$ が正則行列のとき基底になる. 実際, rank $A{=}n$ より一次独立で, 任意の $\boldsymbol{b}\in K^n$ に対し $\boldsymbol{b}'={}^t[b'_1,\dots,b'_n]:=A^{-1}\boldsymbol{b}$ とおけば, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}=AA^{-1}\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{a}_1b'_1+\cdots+\boldsymbol{a}_nb'_n$ と $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ の一次結合で表せるので生成系, 従って基底になる.

同次連立 1 次方程式の解空間 $m{\times}n$ K-行列 A に対し, 未知数 n 個の同次連立 1 次方程式の解空間を W_A と表す:

$$W_A=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\} \qquad (A \text{ が実行列のとき } W_A=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}).$$

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解 $(A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\ A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0})$ のとき, スカラー $s,t\in K$ に対し

$$A(\boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b}t)=(A\boldsymbol{a})s+(A\boldsymbol{b})t=\boldsymbol{0}s+\boldsymbol{0}t=\boldsymbol{0}. \qquad \therefore\ \boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b}t\in W_A$$

より [S3] をみたすので W_A は部分空間になる. また, その基本解 $\{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_{n-r}\}$ $(r=\text{rank } A)$ は, 一次独立かつ 全ての解は基本解の一次結合で表せるので W_A の生成系, 即ち, 基本解 $\{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_{n-r}\}$ は解空間 W_A の基底である.

• 数空間 K^n の部分空間は, (1) 生成系, (2) 同次連立 1 次方程式の解空間, のいずれかにより与えられることが多い. (2) から (1) は方程式を解くことにより得られるが, 逆に生成系から方程式を求める事も出来る. 例題参照.

共通部分, 和空間

ベクトル空間 V の与えられた部分空間 W_1,W_2 から新たに部分空間を作り出す方法として次の 2 種がある.

共通部分 部分空間 W_1,W_2 の共通部分

$$W_1\cap W_2:=\{\boldsymbol{x}\in V \mid \boldsymbol{x}\in W_1 \text{ かつ } \boldsymbol{x}\in W_2\} \qquad (\text{「かつ」の代わりに 「,」を用いても良い.})$$

は V の部分空間になる. 実際, [S0] $\boldsymbol{0}\in W_1$, $\boldsymbol{0}\in W_2$ より $\boldsymbol{0}\in W_1{\cap}W_2$. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in W_1{\cap}W_2$, $s\in K$ とするとき

[S1] $\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{y}\in W_1$, $\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{y}\in W_2$ より $\boldsymbol{x}{+}\boldsymbol{y}\in W_1{\cap}W_2$. [S2] $\boldsymbol{x}s\in W_1$, $\boldsymbol{x}s\in W_2$ より $\boldsymbol{x}s\in W_1{\cap}W_2$.

和空間 W_1 のベクトルと W_2 のベクトルの和で表される V の部分集合

$$W_1{+}W_2:=\{\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2\in V \mid \boldsymbol{w}_1\in W_1,\ \boldsymbol{w}_2\in W_2\} \quad (\text{和の順序にはよらない})$$

は部分空間になる. これを W_1 と W_2 の **和 (空間)** という. ($\boldsymbol{w}_1{+}\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{w}_2{+}\boldsymbol{w}_1$ より $W_1{+}W_2=W_2{+}W_1$.)
($\because$) [S0] $\boldsymbol{0}{=}\boldsymbol{0}{+}\boldsymbol{0}{\in}W_1{+}W_2$. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W_1{+}W_2$ は $\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{w}_1{+}\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{y}{=}\boldsymbol{w}'_1{+}\boldsymbol{w}'_2$ $(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}'_1\in W_1,\ \boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}'_2\in W_2)$ と表せる.
[S3] $s\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}=(s\boldsymbol{w}_1+t\boldsymbol{w}'_1)+(s\boldsymbol{w}_2+t\boldsymbol{w}'_2)$ $(s,t\in K)$. W_1,W_2 は部分空間なので $s\boldsymbol{w}_1{+}t\boldsymbol{w}'_1\in W_1$, $s\boldsymbol{w}_2{+}t\boldsymbol{w}'_2\in W_2$ より, $s\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}=$ 右辺 $\in W_1{+}W_2$. $\therefore W_1{+}W_2$ は部分空間になる.

[和空間と共通部分の例 1] 座標空間において, $W_1:=\langle \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle$ (xy 平面), $W_2:=\langle \boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\rangle$ (yz 平面) とするとき,
共通部分 $W_1{\cap}W_2$ は $\langle \boldsymbol{e}_2\rangle$ (y 軸), 和空間は $\langle \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle{+}\langle \boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\rangle=\langle \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\rangle$ (全座標空間).
$\langle \boldsymbol{e}_1\rangle{+}\langle \boldsymbol{e}_2\rangle=\langle \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle$ (x 軸と y 軸の和空間は xy 平面), $\langle \boldsymbol{e}_1\rangle{\cap}\langle \boldsymbol{e}_2\rangle=\{\boldsymbol{0}\}$ (共通部分は原点 $\boldsymbol{0}$ のみ.)

[和空間と共通部分の例 2] ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ について

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle{+}\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle{+}\langle \boldsymbol{c}\rangle=\langle \boldsymbol{a}\rangle{+}\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\langle \boldsymbol{a}\rangle{+}\langle \boldsymbol{b}\rangle{+}\langle \boldsymbol{c}\rangle,\ \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cap\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\langle \boldsymbol{b}\rangle$$

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{0}$ でない空間の幾何ベクトルで, これらを空間の点と見なすとき, $\langle \boldsymbol{a}\rangle$ は原点 $\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{a}$ を通る直線,
$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle \boldsymbol{a}\rangle{+}\langle \boldsymbol{b}\rangle$ は $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の張る平面,
$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cap\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\langle \boldsymbol{b}\rangle$ は $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の張る平面と $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の張る平面の交線が $\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{b}$ を通る直線であることを表す.

• 一般に $W_1=\langle \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\rangle$, $W_2=\langle \boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_\ell\rangle$ と生成系で与えられたとき,

$$W_1{+}W_2=\langle \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_\ell\rangle \qquad (\text{重複があれば省いても同じ}).$$

• $m{\times}n$ 行列 A と $\ell{\times}n$ 行列 B (列の個数が同じ) に対し, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を同時にみたす解, つまりこれらを連立させた, 未知数 n 個, 方程式数 $m{+}\ell$ 個の連立方程式 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は 解空間 W_A,W_B の両方, 即ち W_A,W_B の共通部分 $W_A{\cap}W_B$ に属する. 従って

$$W_A{\cap}W_B=\left\{\boldsymbol{x}\in K^n \;\middle|\; \begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\}. \qquad (\text{和空間と共通部分の基底を求める例題はプリント参照.})$$