微分積分学 期末試験の練習問題

2013 年 1 月 10 日 (金) 作成, 11 日 (土) 改訂

1 (直線の式・平面の式) 曲面 $S : \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{6} - 18 = 0$ 上の点 $\mathrm{A}(1, 4, 9)$ を考える.

(1) A における S の法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ であることを示せ.

(2) A における S の法線が $x - 1 = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-9}{3}$ であることを示せ.

(3) A における S の接平面の式が $x + 2y + 3z = 36$ であることを示せ.

2 (2 変数関数の合成関数の微分の公式, 連鎖律)

$z = f(x, y)$ において, $x = u\cos\theta - v\sin\theta$, $y = u\sin\theta + v\cos\theta$ とおく.

(4) ヤコビ行列 $J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ であることを示せ.

また, ヤコビアン $\det J = x_u y_v - x_v y_u$ の値が 1 であることを示せ.

(5) $z_u = z_x \cos\theta + z_y \sin\theta$, $z_v = -z_x \sin\theta + z_y \cos\theta$ であることを示せ.

3 (2 変数のテーラー展開)

(6) $|r| < 1$ のとき, $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-r}$ であることを示せ.

(7) $\dfrac{1}{1+x}$ のマクローリン展開が $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ であることを示せ.

(8) $\cos y$ のマクローリン展開が $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}$ であることを示せ.

(9) $\dfrac{\cos y}{1+x}$ のマクローリン展開の 2 次の項までが $1 - x + x^2 - \dfrac{y^2}{2}$ であることを示せ.

4 (2 変数関数の極値の判定) $f(x, y) = 3x - 3y - x^3 + y^3$ とおく.

(10) ヤコビベクトル $\vec{J} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 3 - 3x^2 \\ -3 + 3y^2 \end{pmatrix}$ であることを示せ.

(11) $\vec{J} = \vec{0}$ の解が $(x, y) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ の 4 つであることを示せ.

(12) ヘッセ行列 $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ であることを示せ.

(13) $f(x, y)$ は, $(-1, 1)$ のとき極小値 -4, $(1, -1)$ のとき極大値 4, $(1, 1), (-1, -1)$ のときは鞍点で 0 となることを示せ.

5 (ラグランジュの未定乗数法) x, y, z は正の実数であるとする. 関数 $f(x, y, z) = x^3 y^4 z^5$ の, 条件 $g(x, y, z) = x + y + z - 12 = 0$ のもとでの最大値を求めたい. 最大値が存在し, それが極大値にもなっていることは証明なしに認めることにする. $h(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$ とおく. 次を示せ.

(14) $h_x = 3x^2 y^4 z^5 - \lambda$, $h_y = 4x^3 y^3 z^5 - \lambda$, $h_z = 5x^3 y^4 z^4 - \lambda$, $h_\lambda = -(x + y + z - 12)$ である.

(15) $h_x = 0$, $h_y = 0$, $h_z = 0$, $h_\lambda = 0$ を満たす (x, y, z) を (a, b, c) とおく. $a = 3$,$b = 4$,$c = 5$ である. また, このときの λ が $3^3 4^4 5^5$ である.

(16) $f(x, y, z)$ の最大値は $3^3 4^4 5^5$ である. (λ と等しいのは偶然.)

6 (重積分の計算)

xy 平面上の領域 D を $D : x^2 + y^2 \leqq 25,\ y \leqq 2x - 5$ で定め, $I = \displaystyle\iint_D x\,dxdy$ とおく.

(17) I を累次積分に直すと, $\displaystyle\int_{-5}^{3} \left(\int_{\frac{y+5}{2}}^{\sqrt{25-y^2}} x\,dx \right) dy$ となることを示せ.

(18) $I = \displaystyle\int_{-5}^{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{y+5}{2}}^{\sqrt{25-y^2}} dy = \int_{-5}^{3} \left(-\frac{5}{8}y^2 - \frac{5}{4}y + \frac{75}{8} \right) dy = \frac{160}{3}$ を示せ.

7 (重積分の極座標による計算)

xy 平面上の領域 D を $D : x^2 + y^2 \leqq x,\ y \geqq 0$ で定め, $I = \displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ とおく.

(19) I を極座標に直すと $I=\displaystyle\iint_E (r\cos\theta)(r\sin\theta)\,rdrd\theta$ となることを示せ.
ここで, $E: r \leqq \cos\theta,\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である.

(20) I を累次積分に直すと, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos\theta} r^3\cos\theta\sin\theta\,dr\right)d\theta$ となることを示せ.

(21) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\cos\theta\sin\theta\right]_0^{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5\theta}{4}\sin\theta\,d\theta=\left[-\frac{\cos^6\theta}{24}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{24}$ であることを示せ.

8 (3 重積分の計算, 教科書 208 頁 5.12)

$T: x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0, x+y+z \leqq 1$ とし, $I=\displaystyle\iiint_T xyz(1-x-y-z)\,dxdydz$ とおく.

(22) 累次積分に直すと, $I=\displaystyle\int_0^1\left\{\int_0^{1-z}\left(\int_0^{1-y-z} xyz(1-x-y-z)\,dx\right)dy\right\}dz$ となる事を示せ.

(23) $I=\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{1-z}\frac{yz(1-y-z)^3}{6}\,dy\right)dz=\int_0^1\frac{z(1-z)^5}{120}\,dz=\frac{1}{5040}$ となることを示せ.

9 (3 重積分の球面座標による計算, 教科書 203 頁)

$R>0$ とする. $A: x^2+y^2+z^2 \leqq R^2$ とし, $I=\displaystyle\iiint_A (x^2+y^2)\,dxdydz$ とおく. 次を示せ.

(24) I を球面座標に直すと $I=\displaystyle\iiint_B (r\sin\theta)^2\,r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ となる.
ここで, $B: 0 \leqq r \leqq R,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi\ \ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ である.

(25) I を累次積分に直すと, $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left(\int_0^R r^4\sin^3\theta\,dr\right)d\theta\right\}d\varphi$ となる.

(26) $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\sin^3\theta\right]_0^R d\theta\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{R^5}{5}\sin^3\theta d\theta\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{4R^5}{15}d\varphi=\frac{8R^5\pi}{15}.$

解説

(1) 曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点 (a,b,c) における法線ベクトルは $\begin{pmatrix} f_x(a,b,c)\\ f_y(a,b,c)\\ f_z(a,b,c)\end{pmatrix}$ で計算できる.

(5) $z_u=\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}=z_xx_u+z_yy_u,\quad z_v=\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}=z_xx_v+z_yy_v.$

(9) $\dfrac{\cos y}{1+x}=\dfrac{1}{1+x}\cos y=(1-x+x^2-x^3+\cdots)\left(1-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y^4}{4!}-\cdots\right)$ を展開する.

(13) $\det H=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}>0$ のとき極値となり, $f_{xx}>0$ なら極小, $f_{xx}<0$ なら極大である.
$\det H=-36xy<0$ のときは鞍点となる.

(14) $f(x,y,z)$ の, 条件 $g(x,y,z)=0$ のもとでの極値は $h(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$ とおいて,
$h_x=0,\quad h_y=0,\quad h_z=0,\quad h_\lambda=0$ を解くことによって出る.

(17) 円周 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=2x-5$ の交点は $(0,-5)$ と $(4,3)$ である. D の図より $-5 \leqq y \leqq 3$.
$x=\pm\sqrt{25-y^2}$, $x=\dfrac{y+5}{2}$ である. y を固定すると, D の図より $\dfrac{y+5}{2} \leqq x \leqq \sqrt{25-y^2}$.

(19) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ である. $dxdy$ は $r\,dr\,d\theta$ になる.

(22) T は $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ を頂点とする四面体なので, $0 \leqq z \leqq 1$. z を固定すると,
$x \leqq 0$, $y \leqq 0$, $x+y \leqq 1-z$. これを xy 平面上に図示することにより, $0 \leqq y \leqq 1-z$, $0 \leqq x \leqq 1-y-z$.

(23) 部分積分より $\displaystyle\int_0^c t(c-t)^n\,dt=\left[t\frac{-(c-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^c-\int_0^c\frac{-(c-t)^{n+1}}{n+1}\,dt=\frac{c^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$

(24) $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$ である. $dxdydz$ は $r\sin^2\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$ になる.

(26) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\{-(\cos\theta)'\}\,d\theta=\int_0^{\pi}(\cos^2\theta-1)(\cos\theta)'\,d\theta$
$=\left[\dfrac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right]_0^{\pi}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{-2}{3}=\dfrac{4}{3}.$ $\quad n$ が 0 以上の整数とする. $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^n\theta\,d\theta$ は
n が偶数のとき, $\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}I_0=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\pi.$
n が奇数のとき, $\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}I_1=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}2$ となる.