解析入門IId 第１６回

10 月 7 日 (月) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.
1　**(1)**　a, b を実数, $i = \sqrt{-1}$ とする. $a + bi = 0$ ならば $a = 0, b = 0$ を示せ.
(2)　**ド・モアブルの公式** (12 頁)「n が整数のとき $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$」を示せ.
n が有理数のときも偏角 θ を一般角 $\theta + 2k\pi$　(k は任意の整数) にすれば成立する.

教科書　R.V. チャーチル, J.W. ブラウン著「複素関数入門 原書第４版新装版」数学書房
今日やること　第 1 章 複素数 1 頁〜14 頁
実部・虚部 (1 頁)
複素数 $z = a + bi$ の a を実部といい $\mathrm{Re}(z)$ と書く. b を虚部といい $\mathrm{Im}(z)$ と書く.
加減乗除 (1,3 頁)　足し算, 引き算は実部同士, 虚部同士を足す. 平面ベクトルと同様に図示できる.
$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$. 和は (a, b) と (c, d) で張られる平行四辺形の対角線に対応.
$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$. 差はもう一方の対角線; (a, b) と (c, d) を結ぶ線分に対応する.
$(a+bi)(c+di) = ac+(ad+bc)i+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$.　i^2 が出てきたら -1 に置き換える.
$c + di \neq 0$ のとき $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \dfrac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$.　分母を有理化する.
複素平面 (4 頁)
点 (a, b) を複素数 $a + bi$ と思った平面を複素平面という.
絶対値 (4 頁)
原点と点 (a, b) の距離 $\sqrt{a^2 + b^2}$ を $z = a + bi$ の絶対値といい $|z|$ で表わす.
共役複素数 (5 頁)
$z = a + bi$ に対して, $a - bi$ を z の共役 (共軛) 複素数といい, $\overline{z}$ で表わす.
絶対値と共役 (6 頁)
ベクトルの場合は $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ だったが, 複素数では, $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ が成り立つ.
絶対値の性質 (6 頁)
ベクトルでは $|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}| \leqq |\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}|$ だったが, 複素数では, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ となる.
三角不等式 (7 頁)
ベクトルの $|\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}| \leqq |\overrightarrow{v_1}| + |\overrightarrow{v_2}|$ は, 複素数では $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ となる.
極形式 (8 頁)
点 (x, y) の極座標を (r, θ) とおくと, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ が成り立つ. よって, 複素数 $z = x + yi$ は $r\cos\theta + (r\sin\theta)i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおける. これを複素数 z の極形式という.
偏角　(8 頁)
複素数 z を極形式で表した時の θ を z の偏角といい, $\arg(z)$ と書く. r は $|z|$ に等しい.
偏角の性質 (9 頁)
$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2n\pi$　(n は任意の整数) が成り立つ.
回転 (10 頁)
α, z を複素数とする. αz は z を, 原点を中心に $\arg\alpha$ だけ回転し, $|\alpha|$ 倍に伸ばした点となる.
オイラーの公式 (11 頁)　$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ が成り立つ. e^z を $\exp z$ とも書く.
冪乗 (12 頁)　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の n 乗は, $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ となる.
冪乗根 (12〜14 頁)　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の n 乗根は,
$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$　$(k = 0, 1, 2, \cdots, n - 1)$ となる.
次回やること　第 1 章 複素数 第 5 節 複素平面上のトポロジー, 第 2 章 正則関数 14 頁〜

1966 年〜1975 年には, 数 IIB で複素平面を履修した. 挑戦してみよう.

1 次の $\boxed{}$ にあてはまる実数は何か. 複素数 z が実数 x, y を用いて $z = x + iy$ (i は虚数単位) と表わされるとき, z の絶対値 $|z|$ は $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ によって与えられる. いま, 条件 $2|z - 3 - 3i| = |z|$ を満足するあらゆる複素数 z のうちで $|z|$ が最大であるものを z_1, $|z|$ が最小であるものを z_2 で表わせば, $z_1 = \boxed{} + i\boxed{}$, $z_2 = \boxed{} + i\boxed{}$ である. 1967 年理系 1 次第 2 問

2 次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か. 複素数 z を表わす平面上で, 方程式 $z\overline{z} + 3i(z - \overline{z}) + 5 = 0$ は点 $\boxed{} + \boxed{}i$ を中心とする半径 $\boxed{}$ の円を表す. それは $|z + i| = \boxed{}|z - 2i|$ を満足する点 z の軌跡である. ただし, $\overline{z}$ は z に共役な複素数を意味する. 1970 年理系 1 次第 2 問

3 i を虚数単位とし $a = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおく. また, n はすべての自然数にわたって動くとする. このとき

(1) a^n は何個の異なる値をとりうるか.

(2) $\dfrac{(1-a^n)(1-a^{2n})(1-a^{3n})(1-a^{4n})(1-a^{5n})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)}$ の値を求めよ. 1970 年理系 2 次第 1 問

4 次の $\boxed{}$ にあてはまる実数は何か. 複素数 $z = \boxed{} + 2i$, $w = 5 + \boxed{}i$ に対して $z + w = \boxed{} + 6i$, $zw = 7 + \boxed{}i$ となる. 1971 年文系 1 次第 1 問

5 次の $\boxed{}$ にあてはまる実数は何か. 複素数平面上の正方形 ABCD がある. その 4 頂点 A, B, C, D を表す複素数をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする. $\alpha = i$, $\gamma = 10 + 25i$, $|\beta| > |\gamma|$ ならば $\beta = \boxed{} + \boxed{}i$, $\delta = \boxed{} + \boxed{}i$ である. 1972 年文系 1 次第 2 問

6 複素数 z, w の間に $w = z^2$ なる関係があり, 複素平面において点 z は 4 点 $1 + i$, $2 + i$, $2 + 2i$, $1 + 2i$ を頂点とする正方形の内部を動くものとする. このとき, 複素平面において, 点 w の動く範囲の面積を求めよ. ただし, i は虚数単位を表す. 1972 年文系 2 次第 4 問

7 次の $\boxed{}$ にあてはまる有理数は何か. 複素平面上に正 6 角形 ABCDEF がある. その頂点 A, B, C, D を表す複素数をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とするとき, $\alpha = 0$, $\beta = 4 - 3i$ であり, δ の実部 (実数部分ともいう) が正であれば $\gamma = (\boxed{} + \boxed{}\sqrt{3}) + (\boxed{} + \boxed{}\sqrt{3})i$ である. 1973 年理系 1 次第 2 問

8 次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か. 複素平面上で複素数 $z_1 = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$, $z_2 = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i)$, $z_3 = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ によって表される点をそれぞれ $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ とする. また, $\alpha = \dfrac{2 + 2\sqrt{3}i}{3}$ として, 複素数 αz_1, αz_2, αz_3 によって表される点をそれぞれ $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3$ とする. このとき $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 = \boxed{}\pi$, $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$の面積 $= \boxed{}\pi$, $\triangle \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3$の面積 $= \boxed{}\pi$ である. また原点を O とすると, 有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}_2}$ と実軸の正方向との間の角は $\boxed{}\pi$ である. ただし角がいずれも 0 以上かつ π 以下の値となるようにせよ. 1973 年文系 1 次第 1 問

9 次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か. 複素平面上で, 複素数 α は 2 点 $1 + i$ と $1 - i$ とを結ぶ線分上を動き, 複素数 β は原点を中心とする半径 1 の円周上を動くものとする.

(1) $\alpha + \beta$ が複素平面上を動く範囲の面積は $\boxed{} + \boxed{}\pi$ である.

(2) $\alpha\beta$ が複素平面上を動く範囲の面積は $\boxed{}\pi$ である.

(3) α^2 が複素平面上で描く曲線と虚数軸とで囲まれた範囲の面積は $\boxed{}\pi$ である.

1974 年理系 1 次第 4 問

10 次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か. n を正の整数, $\alpha_n = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とする. p, q が整数を表すとき, $p + q\alpha_n$ の形の複素数で表される点のうちで, 原点を中心とする半径 1 の円周上にあるものの個数を A^n とすれば, $A_3 = \boxed{}$, $A_4 = \boxed{}$, $A_5 = \boxed{}$ である. また, $n = 3$ のとき, それら A_3 個の点を頂点とする凸多角形の面積は $\sqrt{\boxed{}}$ である. 1975 年理系 1 次第 2 問

解析入門IId 第１７回

10 月 14 日 (月) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

1　次の式を満たす複素数 z の全体を複素平面上に図示せよ.

(1)　$|z-1| = |z+i|$.　　**(2)**　$z^3 + 8i = 0$.

今日やること　第 1-5 節 複素平面上のトポロジー, 第 2 章 正則関数第 2-1 節 複素変数の関数

位相空間論の用語より　• 複素数 α の近くを α の近傍という.

• z を複素数の変数, r を正の実数である定数とする. 開円板 $|z-\alpha| < r$ のように境界を含まない集合を開集合という. α の近傍の正確な定義は, α を中心とする十分小さな開円板 $|z-\alpha| < \epsilon$ を含む集合ということ.

• 閉円板 $|z-\alpha| \leqq r$ のように境界を含む集合を閉集合という.

• 円環 $A : r < |z-\alpha| \leqq R$ を円環 $B : r \leqq |z-\alpha| \leqq R$ にするように境界を付け加えて新しい図形を作ることを閉包を取るという. 記号で $\overline{A} = B$ と書く.

• $|z| \leqq 1$ または $|z-2| \leqq 1$ のように図形がくっついている場合を連結という.

• $|z| < 1$ または $|z-2| < 1$ のように図形が離れている場合を連結でないという.

• $3 < \mathrm{Re}\, z < 4$ のように $1 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 2$ のように有限の大きさの場合を有界であるという.

• $\dfrac{\pi}{3} \leqq \arg z < 2\pi$ のように無限の大きさの場合を有界でないという.

• $\left\{ \dfrac{i^n}{n} \;\middle|\; n \text{ は自然数} \right\} = \left\{ i, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{-i}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots \right\}$ の原点のように集合の点が無限個集まっている点を集積点という. 集合 S の閉包 $\overline{S}$ とは, S にその集積点を付け加えた図形に他ならない.

複素関数の図形的意味　(i)　$f(z) = z + \alpha$ は z を α だけ平行移動した点である.

(ii)　$\alpha \neq 0$ とする. $g(z) = \alpha z$ は z を $\arg \alpha$ だけ回転して, $|\alpha|$ 倍に拡大した点である.

(iii)　$h(z) = \overline{z}$ は z を実軸 (x 軸) で折り返した点である.

例１　$\arg(-1) = \pi + 2\pi n$, $|-1| = 1$ であるから, 点 z を π 回転させた点は $-z$ である.

例２　$\arg(i) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $|i| = 1$ であるから, 点 z を $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させた点は iz である.

例３　$\arg(1+\sqrt{3}i) = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $|1+\sqrt{3}i| = 2$ であるから, 点 z を $\dfrac{\pi}{3}$ 回転させて 2 倍した点は $(1+\sqrt{3}i)z$ である. 特に $(1,1)$ を $\dfrac{\pi}{3}$ 回転させて 2 倍した点は $(1+\sqrt{3}i)(1+i) = (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i$ より $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$.

例４　3 点 A(α), B(β), C(γ) において, 符号付きの角 ABC は $\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$ となる.

例５　3 点 A(α), B(β), C(γ) が正三角形 (1 点を含む) になる必要十分条件は, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

例６　4 点 A(α), B(β), C(γ), D(δ) において, 符号付きの角 DAC と符号付きの角 DBC が等しいことは, $\arg\left(\dfrac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha}\right) = \arg\left(\dfrac{\delta-\beta}{\gamma-\beta}\right)$ と表わせる. これは, 正の実数 r が存在して, $\dfrac{\delta-\alpha}{\gamma-\alpha} = r\dfrac{\delta-\beta}{\gamma-\beta}$ となることと同じである.

例７　円に内接する 4 角形 ABCD に対して, AB × CD + BC × DA = AC × BD が成り立つ.

例８　角 O を直角とする 2 つの直角 2 等辺三角形 OAB と OCD に対して, BC の中点を M とおく. AD は OM と垂直であり, 長さは 2 倍になる.

例９　四角形 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA を一辺とする 4 つの正方形を四角形 ABCD の外側に作る. これらの重心を順に E, F, G, H とおく. EG は FH と垂直であり, 長さは等しい.

例１０　三角形 ABC の辺 AB, BC, CA を一辺とする 3 つの正三角形を三角形 ABC の外側に作る. これらの重心を順に D, E, F とおく. 三角形 DEF が正三角形になることが複素数を用いて証明できる.

次回やること　第 2-4 節 導関数と微分公式, 第 2-5 節 コーシー・リーマンの方程式, 第 2-6 節 正則関数

余談　1997年〜2005年には, 数Bで複素数平面を履修した. 2015年〜は数Cで複素数平面を履修する. 挑戦してみよう.

$\boxed{1}$　複素数 $z_n \quad (n=1,2,\cdots)$ を $z_1=1,\ z_{n+1}=(3+4i)z_n+1$ によって定める. ただし i は虚数単位である.

(1)　すべての自然数 n について

$\dfrac{3\times 5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$ が成り立つことを示せ.

(2)　実数 $r>0$ に対して, $|z_n|\leqq r$ を満たす z_n の個数を $f(r)$ とおく. このとき, $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{\log r}$ を求めよ.　1999年理系前期第2問

$\boxed{2}$　複素数平面上の原点以外の相違なる2点 $\mathrm{P}(\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta)$ を考える. $\mathrm{P}(\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta)$ を通る直線を ℓ, 原点から ℓ に引いた垂線と ℓ の交点を $\mathrm{R}(w)$ とする. ただし, 複素数 γ が表わす点 C を $\mathrm{C}(\gamma)$ と書く. このとき,

「$w=\alpha\beta$ であるための必要十分条件は, $\mathrm{P}(\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta)$ が中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあることである.」

を示せ.　2000年理系前期第2問

$\boxed{3}$　複素数平面上の点 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ を $\begin{cases} a_1=1, a_2=i, \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$ により定め

$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n=1,2,\cdots)$ とおく. ただし, i は虚数単位である.

(1)　3点 b_1,b_2,b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ.

(2)　すべての点 $b_n \quad (n=1,2,\cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ.

2001年理系前期第4問

$\boxed{4}$　O を原点とする複素数平面上で6を表す点を A, $7+7i$ を表わす点を B とする. ただし, i は虚数単位である. 正の実数 t に対し, $\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる.

(1)　$\angle\mathrm{APB}$ を求めよ.

(2)　線分 OP の長さが最大になる t を求めよ.　2003年理系前期第2問

2004年理系後期数学第1問でも出ている.

$\boxed{5}$　$|z|>\dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても, $w=z^2-2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする. すなわち, $T=\left\{w \,\middle|\, w=z^2-2z \text{ ならば } |z|\leqq\dfrac{5}{4}\right\}$ とする. このとき, T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大になるような w の値を求めよ.

2005年理系前期第2問

$\boxed{6}$　実数 a,b に対し平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,y_n)$ を $(x_0,y_0)=(1,0)$, $(x_{n+1},y_{n+1})=(ax_n-by_n,bx_n+ay_n) \quad (n=0,1,2,\cdots)$ によって定める. このとき, 次の条件 (i), (ii) がともに成り立つような (a,b) をすべて求めよ.

(i) $\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_6$.　　(ii) $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4,\ \mathrm{P}_5$ は相異なる.

2013年理系前期第1問

解析入門 IId 第１８回

10 月 21 日 (月) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

$\boxed{\mathbf{1}}$　**(1)**　$\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおく. $z^5 = 1$ を因数分解せよ.

(2)　外接円の半径が 1 の正 5 角形 ABCDE について, 積 $\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}$ を求めよ.

前回の訂正　**解析入門 IIb** は誤りで, **解析入門 IId** に訂正する.

「$r < |z-\alpha| \leqq r$ を円環 $B : r \leqq |z-\alpha| \leqq r$」を「$r < |z-\alpha| \leqq R$ を円環 $B : r \leqq |z-\alpha| \leqq R$」に訂正.

「Aα, Bβ, Cγ において, 符号付きの角 B」を「A(α), B(β), C(γ) において, 符号付きの角 ABC」に.

「符号付きの角 A と符号付きの角 B」を「符号付きの角 DAC と符号付きの角 DBC」に訂正する.

「$\mathrm{ABCD} + \mathrm{BCDA} = \mathrm{ACBD}$」を「$\mathrm{AB}\times\mathrm{CD} + \mathrm{BC}\times\mathrm{DA} = \mathrm{AC}\times\mathrm{BD}$」に訂正する.

今日やること　第 2-4 節 導関数と微分公式, 第 2-5 節 コーシー・リーマンの方程式, 第 2-6 節 正則関数

複素微分　$f(z)$ の導関数 $f'(z)$ を $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ で定義する. 実関数の場合の定義と同じに見えるが, h が複素数である所が異なる. $h = k+\ell i$, $z = x+yi$, $f(z) = f(x,y)$ とおくと,
$f'(z) = \displaystyle\lim_{(k,\ell)\to(0,0)}\frac{f(x+k,y+\ell)-f(x,y)}{k+\ell i}$ ……① となる. この極限は, (k,ℓ) が $(0,0)$ 以外の値を取りながら, どのような行き方で $(0,0)$ に近づいても, $\dfrac{f(x+k,y+\ell)-f(x,y)}{k+\ell i}$ が同じ値に限りなく近づくことを要求する. したがって, 実関数の導関数 $f'(x)$ より条件がかなり厳しい. しかし, 見かけは同じ定義式なので, 積の微分, 商の微分, 合成関数の微分など高校で習った種々の公式が成立する.

コーシー・リーマンの関係式　① において, $\ell = 0$ のときは, $f'(z) = \displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{f(x+k,y)-f(x,y)}{k}$
$= \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y)$. ……②　$k = 0$ のときは, $f'(z) = \displaystyle\lim_{\ell\to 0}\frac{f(x,y+\ell)-f(x,y)}{\ell i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
$= \dfrac{1}{i}f_y(x,y)$ ……③ となる. ② = ③ より $f_x = \dfrac{1}{i}f_y$. 実部と虚部に分けて $f(z) = u(x,y)+v(x,y)i$ とおくと, ② は $u_x + v_x i$, ③ は $\dfrac{1}{i}(u_y + v_y i) = -u_y i + v_y$ となる. これらの実部が等しいことから, $u_x = v_y$ ……④, 虚部が等しいことから $u_y = -v_x$ ……⑤ を得る. ④, ⑤を, コーシー・リーマンの関係式という. $z_0 = x_0 + y_0 i$ とおく $f'(z_0)$ があるなら, (x_0,y_0) でこれらが成り立つ (必要性). もし, (x_0,y_0) で u, v が C^1 級 (u_x, u_y, v_x, v_y が連続) なら, ④, ⑤ と合わせて, $f'(z_0)$ の存在が出る (十分性).

例１　$z = x+yi$ とおく. $f(z) = |z|^2 = x^2+y^2$ のとき, $u(x,y) = x^2+y^2, v(x,y) = 0$ である. $u_x = 2x$, $u_y = 2y$, $v_x = 0$, $v_y = 0$ はすべて連続である. ④ より $x = 0$, ⑤ より $y = 0$. よって, $f(z)$ は原点でのみ複素微分可能. 実際, $f'(0) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|^2-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\overline{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\overline{h} = 0$ となる.

例２　$z = x+yi$, $h = k+\ell i$ とおく. $f(z)$ を $z = 0$ のとき 0, $z \neq 0$ のとき次式で定める. $\dfrac{z^2-(\overline{z})^2}{|z|} = \dfrac{(x+yi)^2-(x-yi)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{4xyi}{\sqrt{x^2+y^2}}$. このとき, 原点 $(x,y) = (0,0)$ で $u_x = 0$, $u_y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 0$ であるから, ④, ⑤ が成り立つ. しかし, v_x, v_y は原点で不連続であり, $f'(0)$ は存在しない. 実際, $f'(0) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{k+\ell i\to 0}\frac{f(k+\ell i)-0}{k+\ell i} = \lim_{(k,\ell)\to(0,0)}\frac{\dfrac{4k\ell i}{\sqrt{k^2+\ell^2}}}{k+\ell i}$ は収束しない.

正則　連結な開集合のことを領域という. 領域 D 全体で微分可能な関数を D で正則という. 正則関数は, 無限回微分可能で, 解析的 (テーラー展開可能) である. 実関数では成立しない著しい性質である.

極座標形　$z = x+yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $f(z) = u+vi = R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ の時④, ⑤ は次式になる.
(i)　$R_x = R\Theta_y,\ R_y = -R\Theta_x$.　(ii)　$ru_r = v_\theta,\ u_\theta = -rv_r$.　(iii)　$rR_r = R\Theta_\theta,\ R_\theta = -rR\Theta_r$.

調和関数　$u(x,y)$ が $u_{xx}+u_{yy} = 0$ を満たすとき, u を調和関数という. u, v がコーシー・リーマンの関係式を満たすなら, u, v は調和関数になる. 一方を他方の共役調和関数という.

次回やること　第 3 章 初等関数 第 3-1 節 指数関数, 第 3-2 節 三角関数, 双曲線関数, 第 3-3 節 対数関数

解析入門IId 第１９回

10 月 28 日 (月) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.
1 (46 頁 2-34)　x, y を実数, u, v を x, y の実数関数とする. $z = x + yi$, $f(z) = u + vi$ とおく. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u_x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = u_y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = v_x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = v_y$ と略記する. $f(z)$ が正則関数のとき, 次の問に答えよ.
(1) $|f(z)|$ を u, v で表わせ.　**(2)** $|f(z)|$ が定数のとき, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y の関係式を求めよ.
(3)　コーシー・リーマンの関係式を用いて (2) の答えを変形し, $f(z)$ が定数であることを示せ.

今日やること　第 3 章 初等関数 第 3-1 節 指数関数, 第 3-2 節 三角関数, 双曲線関数, 第 3-3 節 対数関数

マクローリン展開の例　全ての実数 z に対し, 次が成り立つ.　(i)　$e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^4}{4!} + \dfrac{z^5}{5!} + \cdots$, (ii) $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{4!} - \cdots$, (iii) $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \cdots$. これらは全ての複素数 z に対しても成立.

オイラーの公式　θ を複素数とする. (i) は絶対収束する (項を絶対値にしても和が収束する) ので, 和は足す順番によらない. したがって, 実部と虚部を分けて整理し, (ii), (iii) を用いると次式を得る.

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots + i\frac{\theta^5}{5!} + \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right) = \cos\theta + i\sin\theta.$$

例 1　$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

極形式　z の絶対値 $|z|$ を r, z の偏角 $\arg z$ を θ とおく. オイラーの公式より
$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ とおける.

一次関数　$w = \alpha z + \beta$ は, z を原点を中心に反時計回りに $\arg(\alpha)$ だけ回転して $|\alpha|$ 倍した後, β だけ平行移動したものである.

反比例　$w = \dfrac{1}{z}$ は, 極形式で書くと, $\dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$ となる. これは, z を実軸で折り返して, 原点からの距離を $\dfrac{1}{|z|}$ にしたものである.　$\dfrac{1}{\overline{z}}$ は反転になる.　どちらも円々対応である.

指数関数　上の (i) 式で e^z を定義する. e^z を $\exp z$ とも書く. $e^{z+w} = e^z e^w$ が成り立つ. したがって, $e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$ や $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi i + i\sin 2\pi i) = e^z$ が成り立つ.
n が整数のとき, $(e^z)^n = e^{nz}$ が成り立つ. n が整数でないときは一般に不成立.
例 2　$\left(e^{\pi i}\right)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}} = \pm i$ だが, $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$.　$(e^z)' = e^z$ や $(e^{\alpha z})' = \alpha e^{\alpha z}$ が成り立つ.

双曲線関数　$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ をハイパボリックサイン,　$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ をハイパボリックコサイン,　$\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$ をハイパボリックタンジェントという.
$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$,　$(\sinh z)' = \cosh z$,　$(\cosh z)' = \sinh z$,　$(\tanh z)' = \dfrac{1}{\cosh^2 z}$ が成り立つ.

三角関数　オイラーの公式 $e^z = \cos z + i\sin z$ ……① の z を $-z$ に置き換えると,
$e^{-z} = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos z - i\sin z$ ……② であるから,
$\dfrac{①+②}{2}$ より $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$,　$\dfrac{①-②}{2i}$ より $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ を得る.
$\cos(iz) = \dfrac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \dfrac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh(z)$,
$\sin(iz) = \dfrac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \dfrac{e^{-z} - e^z}{2i} = i\dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = i\sinh(z)$ が成り立つ. したがって,
$\cos(x + yi) = \cos x\cos(yi) - \sin x\sin(yi) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$,
$\sin(x + yi) = \sin x\cos(yi) + \cos x\sin(yi) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$ となる.

対数関数　$w = \log z$ を $e^w = z$ で定義する. 任意の整数 n に対して, $e^{w+2\pi n} = e^w$ であるから, $w = \log z$ は z を 1 つ決めても $+2\pi n$ の不定性がある. z を極形式で書くと,
$\log z = \log re^{i\theta} = \log r + \log e^{i\theta} = \log r + i\theta = \log|z| + i\arg(z)$ となる.
例 3　$\log(-1) = \log|-1| + i\arg(-1) = \log 1 + i(\pi + 2\pi n) = (2n+1)\pi$.

次回やること　第 3-4 節 複素数のべき, 第 3-5 節 三角関数・双曲線関数の逆関数, 第 4 章 積分

解析入門 IId 第２０回

11 月 11 日 (月) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.
1 (67 頁 3-31)　複素数の対数を $\log z = \log|z| + i\arg z$ で定義する. ただし, 右辺の対数は高 2 で習った実数関数としての対数である. 円周 $|z| = 2$ 上の次に示す点における $\log z$ の値を求めよ.
(1)　$z = 2$　(2)　$z = -2$　(3)　$z = -2i$　(4)　$\sqrt{2} - \sqrt{2}i$　(5)　$\sqrt{3} - i$　(6)　$z = 2$

今日やること　第 3-4 節 複素数のべき, 第 3-5 節 三角関数・双曲線関数の逆関数, 第 4 章 積分

対数法則 (59,60 頁)　$\log z + \log w = \log(zw)$ や $\log z^\alpha = \alpha \log z$ が成り立つ.

例 1　$\log(-1)+\log i = (1+2\ell)\pi i + \left(\frac{1}{2} + 2m\right)\pi i = \left\{\frac{3}{2} + 2(\ell + m)\right\}\pi i$. 一方, $\log(-i) = \left(\frac{3}{2} + 2n\right)\pi i$ であり, 両者の値の集合は一致する.

例 2　$\log 1^2 = \log 1 = 2m\pi i$ と $2\log 1 = 2(2n\pi i) = 4n\pi i$ の値の集合は一致しないと一瞬思う. しかし, 以下に書くように, 1 の 2 乗は $1^2 = e^{2\log 1}$ で計算し, $\log 1^2 = \log e^{2\log 1} = 2\log 1$ とするのが正しい.

複素数の冪 (62 頁)　$z = e^{\log z}$ の両辺を α 乗して, z^α を $e^{\alpha \log z}$ で定義する.

例 3　実数関数の場合 $\sqrt{1} = 1$ となる. しかし, 複素関数の場合 $\frac{1}{2}\log 1 = \frac{1}{2}(2n\pi i) = n\pi i$ より $\sqrt{1} = 1^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log 1} = e^{n\pi i} = \cos n\pi + i \sin n\pi = \pm 1$ となる.

指数法則　$z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}$ や $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$ は成り立たない.　例 4　$1^{\frac{1}{2}} = \pm 1$, $1^{\frac{3}{2}} = \pm 1$ であるから, $1^{\frac{1}{2}} \cdot 1^{\frac{3}{2}}$ はこれら 2 つずつの $2^2 = 4$ 通りをかけて, $1^{\frac{1}{2}} \cdot 1^{\frac{3}{2}} = \pm 1$ となる. 一方, $1^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 1^2 = 1$.

例 5　$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく. $1^{\frac{2}{3}} = 1, \omega, \omega^2$, $1^{\frac{3}{2}} = \pm 1$ である. $(1^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = \pm 1$ と $(1^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 1, \omega, \omega^2$ と $1^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} = 1^1 = 1$ の値の集合は 3 つとも異なる.

正弦の逆関数 (64 頁)　$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ の両辺に $2ie^{iz}$ をかけて整理すると, $(e^{iz})^2 - 2iwe^{iz} - 1 = 0$. 2 次方程式の解の公式より $e^{iz} = iw + \sqrt{-w^2+1} \iff iz = \log\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right)$. i で割り, z と w を入れ替えて, $\arcsin z = \frac{1}{i}\log\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right)$. 複素数の $\sqrt{z}$ は 2 乗して z になる数すべてを表す 2 価関数なので, $\pm\sqrt{1-w^2}$ の $\pm$ は不要となる.

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{i} \cdot \frac{\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right)'}{iw + \sqrt{1-w^2}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i \pm \frac{-w}{\sqrt{1-w^2}}}{iw + \sqrt{1-w^2}} = \left(1 + \frac{iw}{\sqrt{1-w^2}}\right)\frac{1}{iw + \sqrt{1-w^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{1-w^2} + iw}{\sqrt{1-w^2}} \cdot \frac{1}{iw + \sqrt{1-w^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}.$$

正接の逆関数　$w = \tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$ を逆算して, $z = \mathrm{Arctan}\, w = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iw}{1-iw}$.　$z' = \frac{1}{w^2+1}$.

実数から複素数への関数の積分 (71 頁)　t を実数, $u(t), v(t)$ を実数値関数とすると次の式が成り立つ. $\left|\int_a^b \{u(t) + iv(t)\}\,dt\right| \leqq \int_a^b |u(t) + iv(t)|\,dt$. 証明は, 曲線 $(U(t), V(t)) = \left(\int_a^t u(s)\,ds, \int_a^t v(s)\,ds\right)$ の長さを考えればできる. これが直線のとき, つまり, $u(t), v(t)$ が定数関数のときのみ.

複素平面上の曲線 (73 頁)　点 (a, b) を中心とする半径 R の円周上の点は $(x, y) = (a + R\cos\theta, b + R\sin\theta)$ と書ける. これを複素数で表すと, $z = x + iy = (a + R\cos\theta) + i(b + R\sin\theta) = (a + bi) + R(\cos\theta + i\sin\theta) = z_0 + Re^{i\theta}$ となる.

実積分　$a \leqq x \leqq b$ を $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ と分け, 各小区間 $x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$ から t_k を選ぶ. 各小区間の長さの最大値を Δ とおく. 実積分の定義は, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$.

複素積分 (74 頁)　曲線 C 上の点を $\alpha = z_0 < z_1 < \cdots < z_{n-1} < z_n = \beta$ と分け, 各小さな弧 z_{k-1}〜z_k から τ_k を選ぶ. $|z_k - z_{k-1}|$ の最大値を Δ とおく. 複素積分の定義は, $\int_C f(z)\,dz = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^n f(\tau_k)(z_k - z_{k-1})$. 具体的な計算は C をパラメーター表示して置換積分で行う.

次回やること　第 4–4 節 コーシー・グルサの定理など　　中間試験は 12 月 2 日 (月)

解析入門IId 第２１回

11月18日(月)の復習テスト　制限時間15分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.
1　(1) (65頁(3),(4))　$w = \arctan z = \dfrac{i}{2}\log\dfrac{i+z}{i-z}$ を示せ.　また, $w' = \dfrac{1}{1+z^2}$ を示せ.
(2) (69頁3-46)　$\sin z = 2$ を解け.

今日やること　第4章 積分 第4–4節 コーシー・グルサの定理など

実積分の定義　曲線 $y = f(x)$　$(a \leqq x \leqq b)$ と x 軸の間の部分を D とおく. 区間 $a \leqq x \leqq b$ を $n-1$ 個の点で分割して, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ とする. ξ_k を小区間 $x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$ 上から選ぶ. D の符号付き面積 S は, 長方形の符号付き面積和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ で近似できる. 底辺の長さ $|x_k - x_{k-1}|$ の最大値を Δ とする. 長方形の個数 n を限りなく大きくして, $\Delta \to 0$ とした極限 $\displaystyle\lim_{\Delta\to 0} S_n$ で, 定積分 $S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を定めるのであった.

複素積分の定義　曲面 $w = f(z)$ のうち, z 平面上の曲線 C との間の部分を D とおく. C を t でパラメーター表示して, $z = z(t)$　$(a \leqq t \leqq b)$ とおく. C を n 個の点で分割して,
$z_k = z_k(t_k)$　$(a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b)$ とする. ζ_k を小さな弧 $z = z(t)$　$(t_{k-1} \leqq t \leqq t_k)$ の上から選ぶ. D の "複素数面積" S は, 長方形の "複素数面積"和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$ で近似できる. 底辺の長さ $|z_k - z_{k-1}|$ の最大値を Δ とする. 長方形の個数 n を限りなく大きくして, $\Delta \to 0$ とした極限 $\displaystyle\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$ で, 複素関数 $f(z)$ の曲線 C 上の複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を定める.

複素積分の計算　曲線 C のパラメータ表示 $z = z(t)$　$(a \leqq t \leqq b)$ を用いて置換積分し,
$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\frac{dz}{dt}dt$ と変形して計算する.

例1　原点中心, 半径 r の上半円上を $-r$ から r まで時計回りに進む積分路を C_1 とおく.
$C_1 : z = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$　(θ は π から 0 まで動く) とおける.
$$\int_{C_1}\frac{1}{z}\,dz = \int_\pi^0 \frac{1}{re^{i\theta}}\,rie^{i\theta}d\theta = \int_\pi^0 i\,d\theta = [i\theta]_\pi^0 = -i\pi.$$

例2　原点中心, 半径 r の下半円上を $-r$ から r まで反時計回りに進む積分路を C_2 とおく.
$$\int_{C_2}\frac{1}{z}\,dz = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{re^{i\theta}}\,rie^{i\theta}d\theta = \int_{-\pi}^0 i\,d\theta = [i\theta]_{-\pi}^0 = i\pi.$$

複素積分と線積分 (74頁)　$z = x + yi$, $z_k = x_k + y_k i$, $\zeta_k = \xi_k + \eta_k i$, $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ とおくと, 定積分の定義式は, 線積分に変形できる. $\displaystyle\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}(u(\xi_k,\eta_k) + v(\xi_k,\eta_k)i)\{(x_k + y_k i) - (x_{k-1} + y_{k-1}i)\}$
$$= \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}\{u(\xi_k,\eta_k)(x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k,\eta_k)(y_k - y_{k-1})\} + \{v(\xi_k,\eta_k)(x_k - x_{k-1}) + u(\xi_k,\eta_k)(y_k - y_{k-1})\}i$$
$$= \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy).$$

グリーンの定理 (82頁)　xy 平面上の図形 D が円板と同相な (伸ばしたり縮めたりすると円板と重なる) 図形とする. D の周 C が $(x,y) = (x(t), y(t))$　$(a \leqq t \leqq b)$ と表わせるとする. ただし, $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$ とする. このとき $\displaystyle\int_C \{f(x,y)dx + g(x,y)dy\} = \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)dxdy$ が成り立つ.

コーシーの積分定理　z 平面上の図形 D が上と同じ条件を満たすとする. D を含む領域で $f(z)$ が正則のとき, $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ となる.

証明　グリーンの定理とコーシー・リーマンの関係式より, C が囲む領域を D とおくと,
$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) = \iint_D (-u_y - v_x)dxdy + i\iint_D (-v_y + u_x)dxdy$$
$$= \iint_D 0dxdy + i\iint_D 0dxdy = 0.$$

次回やること　第4–7節 コーシーの積分公式など. 中間は12/2

解析入門IId 第２２回

11月25日(月)の復習テスト　制限時間15分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

1　n を整数, $a>0$ とする. $I_n=\int_C z^n\,dz$ とおく. 積分路 C が以下の場合に, I_n を求めよ.

(1)　$|z|=a$ を反時計まわりに1周.　**(2)**　$|z-2a|=a$ を反時計まわりに1周.

今日やること　第4章 積分 第4–7節 コーシーの積分公式など.

複素積分の性質

(i) k,ℓ が定数のとき, $\int_C (kf(z)+\ell g(z))dz=k\int_C f(z)dz+\ell\int g(z)dz$. (線形性)

(ii) C_1 の終点と C_2 の始点が一致しているとき, この2つをつなげてできる積分路 C を $C=C_1+C_2$ と書く. $\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz=\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{C_2} f(z)\,dz$.　(有限加法性)

(iii) C 上を終点から始点へ向けて逆向きに進む積分路を $-C$ と書く. $\int_{-C} f(z)\,dz=-\int_C f(z)\,dz$.

(iv) C の始点と終点が一致しているとき, C を閉曲線という. C 上を反時計回りに n 周 ($n<0$ のときは時計回りに $-n$ 周) する積分路を nC と書く. $\int_{nC} f(z)\,dz=n\int_C f(z)\,dz$.

(iv) C が閉曲線で, その内部および周を含む領域で $f(z)$ が正則のとき,
$\int_C f(z)\,dz=0$.　(コーシーの積分定理)

(v) α と β を結ぶ2つの積分路 C_1, C_2 で囲まれた部分とその周を含む領域で $f(z)$ が正則のとき, $\int_{C_1} f(z)\,dz=\int_{C_2} f(z)\,dz$. したがって, $f(z)$ が正則な領域内で, 始点 α を固定して, 終点を z とおくと, $\int_\alpha^z f(t)\,dt$ は z の1価関数となる. これを $F(z)$ とおくと, $F'(z)=f(z)$ となる.　(不定積分の存在)

(vi) 閉曲線 C_1 とその内側にある閉曲線 C_2 の間の部分と周を含む領域で $f(z)$ が正則なら,
$\int_{C_1} f(z)\,dz=\int_{C_2} f(z)\,dz$ となる. このように, 正則な範囲では, 積分路を動かしても積分の値は不変.

問1　n を整数, 閉曲線を反時計まわりに一周する積分路を C とし, $I_n=\int_C (z-\alpha)^n\,dz$ とおく.

(3)　α が C の外部にあるとき I_n を求めよ.　**(4)**　α が C の内部にあるとき I_n を求めよ.

コーシーの積分公式 (101頁 (1))

閉曲線 C とそれが囲む部分を含む領域で $f(z)$ が正則とする. α が C の内部なら, $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(z)}{z-\alpha}\,dz$ となる.

注　α が C の外部にあるなら, 閉曲線 C とそれが囲む部分を含む領域で $\dfrac{f(z)}{z-\alpha}$ は正則となるので, $\dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(z)}{z-\alpha}\,dz=0$ となる.

証明　α を中心とする十分小さい半径 ϵ の円周 C_1 は C に含まれる. 公式の右辺は C_1 上での積分と等しいので, $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha+\epsilon e^{i\theta})d\theta$ となる. $\epsilon\to+0$ としても積分値は不変なので,

$$\lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha+\epsilon e^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{\epsilon\to+0} f(\alpha+\epsilon e^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}[f(\alpha)\theta]_0^{2\pi}=f(\alpha).$$

問2　**(5)**　$|z|=\sqrt{3}$ 上を $\sqrt{3}$ から出発して, 反時計回りに n 周する積分路を $C(n)$ とおくとき, $\int_{C(n)}\dfrac{1}{z+1}\,dz$ を求めよ.

コーシーの微積分公式 (105頁 (7))　閉曲線 C とそれが囲む部分を含む領域で $f(z)$ が正則とする. α が C の内部なら, $f^{(n)}(\alpha)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{n!f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz$ となる. ここで, $f^{(n)}(z)$ は $f(z)$ を n 回微分したもの.

問3　次を求めよ.　**(6)** $\int_C \dfrac{e^{\pi z}}{z+i}dz$　**(7)** $\int_C \dfrac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}dz$　**(8)** $\int_C \dfrac{e^{\pi z}}{(z+i)^3}dz$

次回やること　中間試験

解析入門IId 第２３回 中間試験 問題用紙

1 (関数の値)

次の値を求めよ. 答えに文字 n などを用いる所があるが, n の動く範囲を明示すること.

(1) $\dfrac{\pi}{6}$ を度で表した値. **(2)** $\cos\dfrac{\pi}{6}$. **(3)** $\sin\dfrac{\pi}{6}$. **(4)** $e^{\frac{\pi}{6}i}$.

(5) $\left|\sqrt{3}+i\right|$. **(6)** $\arg\left(\sqrt{3}+i\right)$. **(7)** $\log(\sqrt{3}+i)$.

(8) $e^{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}$. **(9)** $\cosh\left\{\log\left(2+\sqrt{3}\right)\right\}$. **(10)** $\sinh\left\{\log\left(2+\sqrt{3}\right)\right\}$.

(11) $\cos\left\{\dfrac{\pi}{6}+i\log\left(2+\sqrt{3}\right)\right\}$.

2 (コーシー・リーマンの関係式)

x, y を実数, $i=\sqrt{-1}$, $z=x+yi$ とおく. Arctan を $\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする. Tan^{-1} と書く人もいる. $v=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ とおき, v を虚部にもつ複素関数 $f(z)$ の実部を u とおく.

(12) v の x による偏導関数 v_x を求めよ. **(13)** v の y による偏導関数 v_y を求めよ.

(14) u_x を求めよ. **(15)** u_y を求めよ.

(16) u を求めよ.

(17) $f(z)$ を求めよ.

3 (図形問題)

複素平面上で, 複素数 α は 2 点 $1+i$ と $1-i$ とを結ぶ線分上を動き, 複素数 β は原点を中心とする半径 1 の円周上を動くものとする. 次を求めよ.

(18) $\alpha+\beta$ が複素平面上で描く図形の絵. **(19)** (18) の面積.

(20) $\alpha\beta$ が複素平面上で描く図形の絵. **(21)** (20) の面積.

(22) α と α^2 の t $(-1\leqq t\leqq 1)$ によるパラメーター表示.

(23) α^2 が複素平面上で描く曲線と虚数軸とで囲まれた範囲の絵.

(24) (23) の面積 1974 年理系 1 次第 4 問

4 (複素積分)

α を複素数の定数, r を正の定数, z を複素数, n を整数の定数とする.

(25) $|z-\alpha|=r$ を図示せよ.

(26) $|z-\alpha|=r$ を反時計回りに一周する積分路 C_1 を θ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ でパラメータ表示せよ.

(27) (26) の C_1 に対して, n の値で場合分けして, $\displaystyle\int_{C_1}(z-\alpha)^n\,dz$ を求めよ.

(28) 複素数 α を反時計回りに一周する積分路を C_2 とおく.
$\displaystyle\int_{C_2}\left\{\cdots+\frac{a_{-3}}{(z-\alpha)^3}+\frac{a_{-2}}{(z-\alpha)^2}+\frac{a_{-1}}{z-\alpha}+a_0+a_1(z-\alpha)+a_2(z-\alpha)^2+\cdots\right\}dz$ を求めよ.

(29) C_3 を $|z-1|=3$ を反時計回りに一周する積分路とする. $\displaystyle\int_{C_3}\left(\frac{a}{z-2}+\frac{b}{z-3}+\frac{c}{z-5}\right)dx$ を求めよ.

(30) C_4 を $|z-7|=3$ を反時計回りに一周する積分路とする. $\displaystyle\int_{C_4}\left(\frac{a}{z-2}+\frac{b}{z-3}+\frac{c}{z-5}\right)dx$ を求めよ.

5 (複素積分)

複素数 α を反時計回りに一周する積分路を C とおく. C 及びその内部を含む領域で $f(z)$ が正則であるとする. このとき, $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz$ が成り立つ.

(31) 上の式を α で微分することにより, $f'(\alpha)$ を複素積分で表わせ.

(32) $z=\pi$ を反時計回りに一周する積分路を C とおく. $\displaystyle\int_C\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}\,dz$ を求めよ.

解析入門IId 第２３回 中間試験 解答用紙

氏名	番号	得点

答えのみ書くこと．量が多いのでできるところから解くこと．教科書などを見てはいけません．

1 (1)	(2)	(3)	(4)
(5)	(6)	(7)	(8)
(9)	(10)	(11)	**2** (12)
(13)	(14)	(15)	(16)
(17)	**3** (18)	(19)	(20)
(21)	(22)	(23)	(24)
4 (25)	(26)	(27)	(28)
(29)	(30)	**5** (31)	(32)

解析入門IId 第２３回 中間試験 解答例

$\boxed{1}$ **(1)** 30 度	**(2)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**(3)** $\dfrac{1}{2}$	**(4)** $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$
(5) 2	**(6)** $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$ (n は任意の整数)	**(7)** $\log 2+\left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right)i$ (n は任意の整数)	**(8)** $2+\sqrt{3}$
(9) 2	**(10)** $\sqrt{3}$	**(11)** $\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$	$\boxed{2}$ **(12)** $v_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$
(13) $v_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$	**(14)** $u_x=\dfrac{x}{x^2+y^2}$	**(15)** $u_y=\dfrac{y}{x^2+y^2}$	**(16)** $\log\sqrt{x^2+y^2}+C$
(17) $\log z+C$　(C は実数)	$\boxed{3}$ **(18)**　正方形 $0\leqq x\leqq 2,\ -1\leqq y\leqq 1$ の上下に半円を付けた形	**(19)** $4+\pi$	**(20)** $1\leqq \lvert z\rvert\leqq\sqrt{2}$
(21) π	**(22)** $\alpha=1+it$ $\alpha^2=(1-t^2)+2ti$	**(23)** x 軸を軸とし, 頂点が $(1,0)$ で, 2 点 $(0,\pm 2)$ を通る放物線.	**(24)** $\dfrac{1}{6}$ 公式より $\dfrac{8}{3}$
$\boxed{4}$ **(25)** α を中心とする 半径 r の円周	**(26)** $z=\alpha+re^{i\theta}$	**(27)** $n\neq -1$ のとき 0 $n=-1$ のとき $2\pi i$	**(28)** $2\pi a_{-1}$
(29) $2\pi(a+b)i$	**(30)** $2\pi ci$	$\boxed{5}$ **(31)** $f'(\alpha)=$ $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{f(z)}{(z-\alpha)^2}\,dz.$	**(32)** $-2\pi i$

解析入門IId 第２４回

中間試験 解答例の訂正　**(28)**　$2\pi a_{-1}$ を $2\pi a_{-1}i$ に訂正する.

中間試験の講評　$\boxed{1}$で, 整数に負の数が入らないと思っている人がたくさんいた.
$\boxed{2}$で, タンジェントの逆関数を逆数と勘違いしている人がかなりいた.　積分定数を忘れずに.
$\boxed{3}$の図示はほとんどできていなかった. $\boxed{4}$の複素数 α を実軸上にとっている人がいた.

12 月 9 日 (月) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.
$\boxed{\mathbf{1}}$　複素平面上で, 複素数 α は線分 $1+it$　$(-1 \leqq t \leqq 1)$ 上を動き, 複素数 β は円周 $|z|=1$ 上を動くものとする. 次を図示せよ.　**(1)**　$\alpha+\beta$ が複素平面上で描く図形.
(2)　$\alpha\beta$ が複素平面上で描く図形.　**(3)**　α^2 が複素平面上で描く曲線.
$\boxed{\mathbf{2}}$　**(4)**　α を複素数の定数, r を正の定数, z を複素数とする. $|z-\alpha|=r$ を図示せよ.

今日やること　第 4 章 積分 第 4.4 節 コーシー・グルサの定理など

単純閉曲線 (73 頁)　ゴム板上の円周を伸び縮みさせてできる曲線を単純閉曲線という.

単連結 (84 頁)　上と同様にして円板を伸ばしたり縮めたりしてできる図形は単連結であるという.

コーシーの積分定理 (84 頁 定理 3)　$f(z)$ は単連結な領域 D で正則であるとする. D 内の任意の閉曲線 (始点と終点が同じ曲線) C に対して, $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ となる.

注 1　C は任意と書いたが, 実際は, $z(t)=x(t)+iy(t)$ と表わした時, $x'(t)$ $y'(t)$ が存在する弧を途中の点でつなぎ合わせてできる閉曲線, つまり, 区分的に微分可能な閉曲線であることが必要である. 勿論, つなぎ合わせる箇所が 0 個, つまり, C 全体で $x'(t), y'(t)$ が存在する場合も含む.

系 1 (85 頁 定理 4)　$f(z)$ は単連結な領域 D で正則であるとする. D 内の曲線 C_1 と曲線 C_2 は始点と終点が一致しているとする. このとき, $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$ となる.

系 2 (87 頁 定理 5)　閉曲線 C_1 内の閉曲線を C_2 とする. C_1 と C_2 で挟まれた部分を含む領域で $f(z)$ は正則であるとする. C_1 と C_2 の回転数が一致しているなら $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$ となる.

注 2　回転数が一致とは, C_1 と C_2 が共に反時計回りに 3 周してるとか, 共に時計回りに 1 周してる etc. ということである.

モレラの定理 (107 頁 定理 4)　コーシーの積分定理の逆が成り立つ. $f(z)$ は領域 D で連続であるとする. D 内の任意の閉曲線 C に対して $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ なら $f(z)$ は D で正則となる.

コーシーの積分公式 (101 頁)　$f(z)$ は単連結な領域 D で正則であるとする. D 内の任意の閉曲線 (始点と終点が同じ曲線) C に対して, C が α の周りを反時計回り 1 周するなら $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz$.

注 3　C が α の回りを n 周するなら $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz = nf(\alpha)$ となる.

コーシーの積分公式の拡張 (105 頁 (1))　上のとき, $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz$ の両辺を α で n 回微分することにより, $f^{(n)}(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{n!f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz$ を得る.

問　次を求めよ. 積分路 C は曲線上を反時計回りに 1 周するものとする.

(5) (110 頁 4-20(c))　$a \neq 0$ を実数とし, z^{a-1} は主値を考える. $\displaystyle\int_{|z|=1} z^{a-1}\,dz$.

(6) (113 頁 4-33(d))　C を正方形 $|x| \leqq 2$, $|y| \leqq 2$ とする. $\displaystyle\int_C \frac{\tan\frac{z}{2}}{z^2}\,dz$.

(7) (113 頁 4-34(b))　C を円周 $|z-i|=2$ とする. $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z^2+4)^3}\,dz$.

(8) (113 頁 4-33(e))　C を正方形 $|x| \leqq 2$, $|y| \leqq 2$ とする. $\displaystyle\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\,dz$.

次回やること　第 5 章 級数 第 5.1 節 数列・級数, 第 5.2 節 テーラー級数, 第 5.3 節 ローラン級数など.

解析入門IId 第２５回

12 月 16 日 (月) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

1　次を求めよ. 積分路 C は曲線上を反時計回りに 1 周するものとする.

(1)　$\displaystyle\int_{|z-i|=2} \frac{1}{(z^2+4)^3}\,dz.$　**(2)**　C を正方形 $|x| \leqq 2$, $|y| \leqq 2$ の周とする. $\displaystyle\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\,dz.$

今日やること　第 5 章 級数 第 5.1 節 数列・級数, 第 5.2 節 テーラー級数, 第 5.3 節 ローラン級数など.

テーラー展開　関数 $f(z)$ を $f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \cdots$ ……① の形で表すことを $f(z)$ の $z = z_0$ を中心とするテーラー展開という. 特に $z_0 = 0$ の場合の $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ をマクローリン展開という. 両辺を微分しては, $z = z_0$ を代入することにより, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ を得る.

収束半径　① が $|z = z_0| < \rho$ で絶対収束し, $|z - z_0| > \rho$ では発散する ρ が存在する. この ρ を $f(x)$ の収束半径という. $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (ダランベールの公式) や $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ (コーシー・アダマールの公式) で計算できる.

正則関数の解析性　α を C 内の点とする. グルサの定理より $f^{(n)}(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{n!f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz.$ ……①

特に $n = 0$ の場合がコーシーの積分公式で, $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz$ ……② となる. $C : |z - z_0| = r$ のとき, $|\alpha - z_0| < |z - z_0|$ であるから, $\left|\dfrac{\alpha - z_0}{z - z_0}\right| < 1$. よって, $\dfrac{1}{z-\alpha} = \dfrac{1}{(z-z_0)-(\alpha-z_0)}$

$= \dfrac{1}{z-z_0}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{\alpha-z_0}{z-z_0}} = \dfrac{1}{z-z_0}\left\{1 + \left(\dfrac{\alpha-z_0}{z-z_0}\right) + \left(\dfrac{\alpha-z_0}{z-z_0}\right)^2 + \cdots\right\} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$. これを ② に代入して, ① を用いると, $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \times (\alpha - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(\alpha - z_0)^n$.

このように, 正則 (複素微分可能) な関数 $f(z)$ は, テーラー展開できる (解析的である).

注１　実関数の場合, 1 回微分できても, 2 回目ができるとは限らない. 例えば, $f(x)$ を $x \geqq 0$ で x^2, $x < 0$ で $-x^2$ と定めると, $f'(x) = 2|x|$ となるので, $f''(x)$ は $x = 0$ で存在しない.

注２　実関数の場合, 無限回微分できても, 解析的であるとは限らない. 例えば, $f(x)$ を $x \leqq 0$ で 0, $x > 0$ で $e^{-\frac{1}{x}}$ と定める. 任意の非負整数 n に対して, $x \leqq 0$ で $f^{(n)}(x) = 0$, $x > 0$ で $\dfrac{p_n(x)}{x^{2n}}e^{-\frac{1}{x}}$　($p_n(x)$ はある $n-1$ 次多項式) の形になる. ……③ マクローリン展開 (0 を中心とするテーラー展開) の公式 $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ に $f^{(n)}(0) = 0$ を代入すると, $f(x) = 0$. しかし, $x > 0$ で $f(x) > 0$ なので矛盾.

ローラン展開　テーラー展開を負冪を含むものに拡張した $f(z) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ を $f(z)$ の $z = z_0$ を中心とするローラン展開という. $R_1 < |z - z_0| < R_2$ で正則な関数は係数 $a_k = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz$ を用いてローラン展開できる.

特異点と極　ローラン展開の主要部 $f(z) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-z_0)^k = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{a_{-\ell}}{(z-z_0)^{\ell}}$ が無いとき $z = z_0$ を除去可能特異点, 主要部が無限和のとき, $z = z_0$ を真性特異点, 主要部が $-m$ 乗から始まるとき, $z = z_0$ を位数 k の極という.

解析接続　$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ は $|z| < 1$ で収束する. これを収束円という.

$g(z) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2}(z+1) + \dfrac{1}{2^3}(z+1)^2 + \dfrac{1}{2^4}(z+1)^3 + \cdots$ ……④ の収束円は $|z+1| < 2$ となる. 2 つの収束円は重なり, その上で, $f(z) = g(z)$ となる. このようにして, 関数の定義域を拡張していくと, 最終的に $z \neq 1$ で定義される $\dfrac{1}{1-z}$ が得られる. このようにして定義域を拡張していくことを解析接続という.

次回やること　第 6 章 留数と極 第 6-1 節 留数, 第 6-2 節 留数の求め方, 第 6-3 節 実関数の定積分

解析入門IId 第２６回

12 月 23 日 (月) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

$\boxed{\mathbf{1}}$　**(1)** (136 頁)　$|z|<1$ で $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$ となることを示せ.

(2) (137 頁)　$1<|z|<2$ で $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1}(-z^n)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}z^n$ となることを示せ.

(3) (138 頁)　$2<|z|$ で $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)z^n$ となることを示せ.

今日やること　第 6 章 留数と極 第 6-1 節 留数, 第 6-2 節 留数の求め方, 第 6-3 節 実関数の定積分

近傍 (14 頁)　ϵ を十分小さい正の数とする. 複素平面において, z_0 を中心とする半径 ϵ の円板を含む図形を z_0 の近傍という. z_0 の近所という感覚.

正則 (39 頁)　z_0 とその近傍で $f(z)$ が複素微分可能のとき, $f(z)$ は z_0 で正則であるという. z_0 で複素微分可能というだけではだめ.

特異点 (40 頁)　$f(z)$ が z_0 で正則でないが, z_0 のいくらでも近い所に正則な点があるとき, z_0 を特異点と呼ぶ.

孤立特異点 (147 頁)　z_0 は $f(z)$ の特異点とする. z_0 の十分小さい近傍では z_0 以外の点で $f(z)$ が正則のとき, z_0 を $f(z)$ の孤立特異点と呼ぶ.

孤立特異点のまわりでのローラン展開 (148 頁)　$f(z)$ が $z=z_0$ を孤立特異点に持つとき, 適当な正の定数 R_1 があって, 中心を抜いた半径 R_1 の円板 $0<|z-z_0|<R_1$ 内で $f(z)$ は正則である. よって, $f(z)$ はローラン展開できる. つまり

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\cdots\cdots①$$

とおける.

留数 (149 頁)　n を整数とする. z_0 を反時計回りに 1 周する積分路を C とおく.
$\displaystyle\int_C(z-z_0)^n\,dz=\begin{cases}2\pi i & (n=-1\text{ のとき})\\ 0 & (n\neq-1\text{ のとき})\end{cases}$ であった. よって, C が $0<|z-z_0|<R_1$ 内にあるとき. ① において,

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i a_{-1}.$$

となる. 積分すると, a_{-1} だけが残って出て来るので, ローラン展開 ① において, -1 乗の係数 a_{-1} を留数という.

単純閉曲線 (73 頁)　端点が一致する以外, 自分自身と共有点を持たない曲線を単純閉曲線という. これを反時計回りに回る向きを正の向きという.

留数定理 (149 頁)　単純閉曲線を正の向きに進む積分路を C とおく. C 内にある $f(z)$ の特異点が z_1 だけであるとする. z_1 以外では, C とその内部を含むある領域で $f(z)$ が正則のとき,

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i(z_1\text{における } f(z)\text{ の留数}).$$

問１ (173 頁)　C を, $|z|=3$ を正方向に回る積分路とする. 次を示せ.

(4)　$\displaystyle\int_C\frac{1}{z^2e^z}\,dz=-2\pi i$　　**(5)**　$\displaystyle\int_C z^2e^{\frac{1}{z}}\,dz=\frac{\pi}{3}i$　　**(6)**　$\displaystyle\int_C\frac{z+1}{z^2-2z}\,dz=2\pi i$

問２ (176 頁 6-19(a)(e))　次を示せ.

(7)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+4\sin\theta}\,d\theta=\frac{2}{3}\pi$　　**(8)**　$-1<a<1$ のとき $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+a\cos\theta}\,d\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$

円弧上の積分　半径が R の円周 $|z|=R$ 上で, 偏角が $\alpha \leqq \arg\theta \leqq \beta$ を満たす円弧を $C(R)$ とおく. $f(z), g(z)$ を多項式とする. ($g(z)$ の次数) $>$ ($f(z)$ の次数)+1 ……① なら, $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C(R)}\frac{f(z)}{g(z)}\,dz=0$ となる. 分子 $f(z)$ を $f(z)\sin z$, $f(z)\cos z$, $f(z)e^{-x}$, $f(z)\log z$ などに取り換えても, 極限は 0 になる.

無限区間での実積分　$f(z), g(z)$ を多項式とし, $g(z)=0$ に実数解が無いとする. もし ① なら

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\,dx = 2\pi(g(z)=0 \text{ の解のうち, 上半平面内にあるものの留数の和})$$

となる. 分子 $f(z)$ を $f(z)\sin z$, $f(z)\cos z$, $f(z)e^{-x}$, などに取り換えても, 同じことが成り立つ.

問 3 (175 頁 6-14)　次を示せ.

(9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$　**(10)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}\,dx=\frac{\pi}{3}.$　**(11)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{\pi}{2}.$

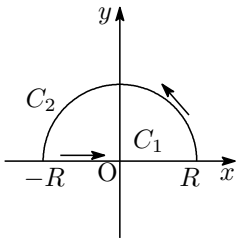
2012 年度後期の期末試験

1　$a>0, b>0, R>b$ とする. 次の積分値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\,dz.$　**(2)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\,dz.$　**(3)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx.$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx.$　**(5)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx.$

結論 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\pi.$



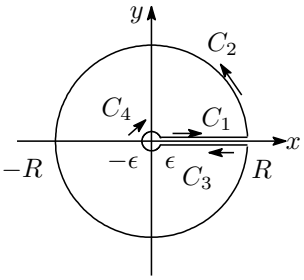
$C=C_1+C_2$

2　$0<a<1,\ -1<b<1,\ c>0,\ 0<\epsilon<1<R$ とする. 次の積分値を求めよ.

(6) $\displaystyle\int_C f(z)\,dz.$　**(7)** $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}}{z+1}\,dx.$　**(8)** $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^b}{x^2+1}\,dx.$

(9) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^b\log x}{x^2+1}\,dx.$　**(10)** $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^b}{x^2+c}\,dx.$

(11) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^b}{(x^2+c)^2}\,dx.$　**結論** $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^b}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{\pi(1-b)}{4\cos\frac{\pi}{2}b}.$



$C=C_1+C_2+C_3+C_4$

3　$\alpha=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とおき, $0<R$ とする. 次の積分値を求めよ.

(12) $\displaystyle\int_C\frac{e^{-z^2}}{e^{\sqrt{\pi}\alpha z}-e^{-\sqrt{\pi}\alpha z}}\,dz.$　**(13)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt.$

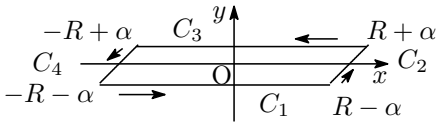
(14) $\displaystyle\int_{C'}e^{-z^2}\,dz.$　**(15)** $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_5}e^{-z^2}\,dz.$

(16) $\displaystyle\int_{C_7}e^{-z^2}\,dz.$

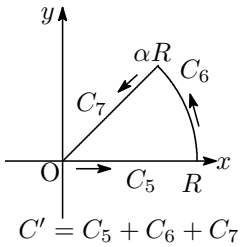
(17) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_7}e^{-z^2}\,dz$ を $\displaystyle\int_0^{\infty}\cos(u^2)\,du$ と $\displaystyle\int_0^{\infty}\sin(u^2)\,du$ で表わせ.

(18) $\displaystyle\int_0^{\infty}\cos(u^2)\,du-\int_0^{\infty}\sin(u^2)\,du$ の値を求めよ.

結論 $\displaystyle\int_0^{\infty}\cos(u^2)\,du=\int_0^{\infty}\sin(u^2)\,du=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$



$C=C_1+C_2+C_3+C_4$

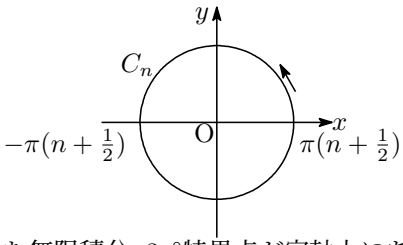


$C'=C_5+C_6+C_7$

4　m を 0 でない整数とし, n を自然数とする.

(19) $\displaystyle\int_{C_n}\frac{1}{z^2\tan z}\,dz$ を求めよ.

結論 $\displaystyle\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$



次回やること　第 6-3 節 1 °有理関数の無限積分, 2 °三角関数を含む無限積分, 3 °特異点が実軸上にある場合, 4 °多価関数の無限積分, 5 °三角関数を含む定積分

解析入門IId 第２７回

1 月 6 日 (月) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

$\boxed{\mathbf{1}}$　$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx$ とおく. $R>1$ とし, $|z|=R$ の実軸上の直径 C_1 と上半円 C_2 を結ぶ閉曲線を反時計回りに回る積分路を C とおく.　**(1)**　積分路 C を描け.

(2)　$\dfrac{1}{x^4+1}$ の特異点は $x=\dfrac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}}$(複号任意) のみであり, 4 つとも 1 位の極である事を示せ.

(3)　C 内の極は $x=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$ のみであり, 順にその留数 a_{-1}, b_{-1} は $\dfrac{-1-i}{4\sqrt{2}},\ \dfrac{1-i}{4\sqrt{2}}$ であることを示せ.

(4)　留数定理を用いて $\displaystyle\int_C\frac{1}{z^4+1}\,dz=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ を示せ.　**(5)**　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\frac{1}{z^4+1}\,dz=0$ を示せ.

(6)　$I=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ を示せ.　**一般化**　$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^n+1}\,dx=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}$.

今日やること　第 6-3 節 1 °有理関数の無限積分, 2 °三角関数を含む無限積分

例１ (159 頁)　$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx=[\mathrm{Arctan}\,x]_0^{\infty}=\mathrm{Arctan}\,\infty-\mathrm{Arctan}\,0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$ である. $a>0$ のとき, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+a}\,dx$ において $x=\sqrt{a}t$ とおくと, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{at^2+a}\sqrt{a}dt=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$.
よって, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+a}\,dx=\frac{\pi}{2}a^{-\frac{1}{2}}$. これを a で微分して -1 倍すると,
$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+a)^2}\,dx=\frac{\pi}{4}a^{-\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{4a\sqrt{a}}$. $a=1$ を代入して, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$. 再び a で微分して $-\dfrac{1}{2}$ 倍すると, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+a)^3}\,dx=\frac{3\pi}{16}a^{-\frac{5}{2}}=\frac{3\pi}{16a^2\sqrt{a}}$. $a=1$ を代入して, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{3\pi}{16}$.
同様に続けていって, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+a)^n}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{\pi}{2}a^{-\frac{2n-1}{2}}$. $a=1$ を代入して,
$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{\pi}{2}$.

例２ (160 頁)　$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx=\int_0^{\infty}\frac{2x^2-1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx=\int_0^{\infty}\left(\frac{-1}{x^2+1}+\frac{3}{x^2+4}\right)dx$
$\displaystyle=3\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+4}\,dx-\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx=3\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$.　(最後から 2 番目の等号で例 1 を用いた.)

例３ (162 頁)　$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+5x^2+4}\,dx=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\left(\frac{-1}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+4}\right)dx$
$\displaystyle=\frac{4}{3}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+4}\,dx-\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$.
(最後から 2 番目の等号で例 1 を用いた.)

例４　(STEP 1　積分路 C)　$I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx$ とおく. $R>1$ とし, 実軸上を O から R まで進む積分路を C_1, $|z|=R$ 上を R から Ri まで進む積分路を C_2, 虚軸上を Ri から O まで進む積分路を C_3, $C_1+C_2+C_3$ を C とおく.
(STEP 2　特異点)　$\dfrac{1}{x^4+1}$ の特異点は $x=\dfrac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}}$　(複号任意) で全部であり, 4 つとも 1 位の極である.
(STEP 3　C 内の極の留数)　C 内の極は $\alpha=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ のみである. 極の位数は 1 であるから, α を中心とするローラン展開は -1 乗から始まる. $\dfrac{1}{z^4+1}=\dfrac{a_{-1}}{z-\alpha}+a_0+a_1(z-\alpha)+a_2(z-\alpha)^2+\cdots$ とおくと, $\dfrac{z-\alpha}{z^4+1}=a_{-1}+a_0(z-\alpha)+a_1(z-\alpha)^2+a_2(z-\alpha)^3+\cdots$.
よって, $z\to\alpha$ とすると, 右辺は a_{-1} となる. つまり, $a_{-1}=\displaystyle\lim_{z\to\alpha}\frac{z-\alpha}{z^4+1}$.
α は $z^4+1=0$ の解であるから, この極限は $\dfrac{0}{0}$ 型である. よって, ロピタルの定理が使える.
$\displaystyle a_{-1}=\lim_{z\to\alpha}\frac{(z-\alpha)'}{(z^4+1)'}=\lim_{z\to\alpha}\frac{1}{4z^3}=\frac{1}{4\alpha^3}=\frac{\alpha}{4\alpha^4}=\frac{\alpha}{4(-1)}=-\frac{\alpha}{4}=\frac{-1-i}{4\sqrt{2}}$.

ここで, α は $z^4+1=0$ の解であるから, $\alpha^4=-1$ となることを用いた.
(STEP 4　留数定理)　$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^4+1}\,dz = 2\pi i(C\text{ 内の特異点の留数の和}) = 2\pi i\cdot\frac{-1-i}{4\sqrt{2}} = \pi\cdot\frac{1-i}{2\sqrt{2}}.$
(STEP 5　各積分路上の積分の処理)
C_1 上の点は $z=x\quad(0\leqq x\leqq R)$ とおけるので,
$\displaystyle\int_{C_1}\frac{1}{z^4+1}\,dz = \int_0^R \frac{1}{x^4+1}\,dx \to I\quad(R\to\infty).$
C_2 上の点は $z=R\cos\theta+iR\sin\theta=R(\cos\theta+i\sin\theta)=Re^{i\theta}\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおけるので,
$\displaystyle\int_{C_2}\frac{1}{z^4+1}\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(Re^{i\theta})^4+1}\frac{dz}{d\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{R^4e^{4i\theta}+1}(Re^{i\theta})'d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{R^4e^{4i\theta}+1}Rie^{i\theta}d\theta.$ よって,
$\displaystyle\left|\int_{C_2}\frac{1}{z^4+1}\,dz\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Rie^{i\theta}}{R^4e^{4i\theta}+1}\,d\theta\right| \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{Rie^{i\theta}}{R^4e^{4i\theta}+1}\right|d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|Rie^{i\theta}|}{|R^4e^{4i\theta}+1|}\,d\theta.$ ……☆
三角不等式 $|z+w|\leqq|z|+|w|$ より $|\alpha+\beta|\geqq|\alpha|-|\beta|$ である. また, 絶対値の定義 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ より $|e^{i\theta}|=|\cos\theta+i\sin\theta|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$ である. よって,
$\displaystyle☆ \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|Rie^{i\theta}|}{|R^4e^{4i\theta}|-|1|}\,d\theta \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R}{R^4-1}\,d\theta = \left[\frac{R}{R^4-1}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R}{R^4-1}\cdot\frac{\pi}{2}\to 0\quad(R\to 0).$
以上より $\displaystyle\lim_{R\to 0}\int_{C_2}\frac{1}{z^4+1}\,dz=0.$
C_3 上の点は $z=ix\quad(x$ は R から 0 まで動く$)$ とおけるので,
$\displaystyle\int_{C_3}\frac{1}{z^4+1}\,dz = \int_R^0\frac{1}{(ix)^4+1}\frac{dz}{dx}dx = \int_R^0\frac{1}{x^4+1}(ix)'dx = -i\int_0^R\frac{1}{x^4+1}\,dx\to -iI\quad(R\to\infty).$
(STEP 6　答え)　留数定理で求めた式より,
$\displaystyle\frac{1-i}{2\sqrt{2}}\pi = \int_C\frac{1}{z^4+1}\,dz = \int_{C_1}\frac{1}{z^4+1}\,dz + \int_{C_2}\frac{1}{z^4+1}\,dz + \int_{C_3}\frac{1}{z^4+1}\,dz.$
$R\to\infty$ とすると, $\displaystyle\frac{1-i}{2\sqrt{2}}\pi = I+0-iI=(1-i)I.$ よって, $\displaystyle I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$
復習テストの答えは $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx = 2\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx = 2I = 2\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ のようにしても出る.

例 5　(STEP 1　積分路 C)　m,n を 0 以上の整数とし, $m\geqq n+2$ とする. $\displaystyle I=\int_0^{\infty}\frac{x^n}{x^m+1}\,dx$ とおく. $R>1$ とし, 実軸上を O から R まで進む積分路を C_1, $|z|=R$ 上を R から $Re^{\frac{2\pi}{m}i}$ まで進む積分路を C_2, 虚軸上を $Re^{\frac{2\pi}{m}i}$ から O まで進む積分路を C_3, $C_1+C_2+C_3$ を C とおく.
(STEP 2　特異点)　$\dfrac{x^n}{x^m+1}$ の特異点は $x=e^{\frac{(2k-1)\pi}{m}i}\quad(k=1,2,3,\cdots,m)$ で全部であり, m 個とも 1 位の極である.
(STEP 3　C 内の極の留数)　C 内の極は $\alpha=e^{\frac{\pi}{m}i}$ のみである. 極の位数は 1 であるから, α を中心とするローラン展開は -1 乗から始まる. $\dfrac{z^n}{z^m+1}=\dfrac{a_{-1}}{z-\alpha}+a_0+a_1(z-\alpha)+\cdots$ とおくと, $\dfrac{z^n(z-\alpha)}{z^m+1}=a_{-1}+a_0(z-\alpha)+a_1(z-\alpha)^2+\cdots.$ よって, $\displaystyle a_{-1}=\lim_{z\to\alpha}\frac{z^n(z-\alpha)}{z^m+1}=\alpha^n\lim_{z\to\alpha}\frac{z-\alpha}{z^m+1}=$
$\displaystyle\alpha^n\lim_{z\to\alpha}\frac{1}{mz^{m-1}}=\alpha^n\cdot\frac{1}{m\alpha^{m-1}}=\alpha^{n+1}\cdot\frac{1}{m\alpha^m}=\alpha^{n+1}\cdot\frac{1}{m(-1)}=-\frac{\alpha^{n+1}}{m}.$
以下, 例 4 と同様にして, $\displaystyle I=\frac{\pi}{m}\cdot\frac{1}{\sin\frac{(n+1)\pi}{m}}$ を得る.

例 6　$a>0, b>0$ とする. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ibx}}{x^2+a}\,dx=\pi\frac{e^{-\sqrt{a}b}}{\sqrt{a}}$ となる. 実部を見て $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos bx}{x^2+a}\,dx=\pi\frac{e^{-\sqrt{a}b}}{\sqrt{a}}.$
(163 頁 例 5)
a で微分して -1 倍すると, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos bx}{(x^2+a)^2}\,dx=\pi\frac{e^{-\sqrt{a}b}(\sqrt{a}b+1)}{2a\sqrt{a}}.$　(162 頁 例 4)
a でなく b で微分して -1 倍すると, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin bx}{x^2+a}\,dx=\pi e^{-\sqrt{a}b}.$　(164 頁 例 6)
次回やること　2 °三角関数を含む無限積分, 3 °特異点が実軸上にある場合, 4 °多価関数の無限積分

解析入門IId 第２８回

1 月 20 日 (月) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

$\boxed{\mathbf{1}}$ (164 頁例 6)　$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx$ とおく. $R>1$ とし, $|z|=R$ の実軸上の直径 C_1 と上半円 C_2 を結ぶ閉曲線を反時計回りに回る積分路を C とおく.　**(1)**　積分路 C を描け.

(2)　$\dfrac{ze^{iz}}{z^2+1}$ の特異点は $z=\pm i$ で全部であり, 2 つとも 1 位の極であることを示せ.

(3)　C 内の極 $z=i$ の留数 a_{-1} は $\dfrac{1}{2e}$ であることを示せ.

(4)　留数定理を用いて $\displaystyle\int_C\frac{ze^{iz}}{z^2+1}\,dz=\frac{\pi i}{e}$ を示せ.　**(5)**　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\frac{ze^{iz}}{z^2+1}\,dz=0$ を示せ.

(6)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi i}{e}$ を示し, この虚部を見ることにより $I=\dfrac{\pi}{e}$ を示せ.

解説が長いと, どこをやっているかわからなくなると思うので, できるだけ短く書きます.

今日やること　2 °三角関数を含む無限積分, 3 °特異点が実軸上にある場合, 4 °多価関数の無限積分, 第 7 章 初等関数による写像, 第 8 章 等角写像とその応用

ジョルダンの不等式 (165 頁)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{2}{\pi}\theta\leqq\sin\theta$ が成り立つ.

証明　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で, $y=\sin\theta$ が上に凸なので, グラフ上の 2 点 $(0,0)$ と $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ を結ぶ線分 $y=\dfrac{2}{\pi}\theta$ はグラフの下側にある.

ジョルダンの不等式の応用 (165 頁)　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}e^{-R\sin\theta}\,d\theta=0.$

証明　$0\leqq e^{-R\sin\theta}$ であるから, $0\leqq\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-R\sin\theta}\,d\theta.$ ……①

$t=\pi-u$ とおくと, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-R\sin t}\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}e^{-R\sin(\pi-u)}(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin u}\,du$ である. これを用いると,

$$\int_0^{\pi}e^{-R\sin\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-R\sin\theta}\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}\,d\theta.$$

ジョルダンの不等式より, $-\sin\theta\leqq-\dfrac{2}{\pi}\theta$ であるから, $-R\sin\theta\leqq-\dfrac{2R}{\pi}\theta$. よって,

$$\leqq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\,d\theta=2\left[-\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\left(-\frac{\pi}{2R}e^{-R}+\frac{\pi}{2R}e^{0}\right)=\frac{\pi}{R}(1-e^{-R})\to 0\quad(R\to\infty).\ \cdots\cdots②$$

①, ②より, $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}e^{-R\sin\theta}\,d\theta=0.$

この事実を用いると, 次がわかる.

> $x^2+y^2=R^2$ $y\geqq 0$ 上を $(R,0)$ から $(-R,0)$ まで動く積分路を C とおく.
> $(g(x)$ の次数$)>(f(x)$ の次数$)+1$ のとき, $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_C\frac{f(z)}{g(z)}\,dz=0$ であった.
> 分子に e^{iz} があると, 等号が付いてもよく,
> $(g(x)$ の次数$)\geqq(f(x)$ の次数$)+1$ のとき, $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_C\frac{e^{iz}f(z)}{g(z)}\,dz=0$ となる.

積分路が扇型の場合の留数定理の応用 (167 頁例 8)　m,n を非負整数とし $n+1<m$ ……③ とする. $f(x)=\dfrac{x^n}{1+x^m}$ とおき, $I(m,n)=\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)\,dx$ とおく.

(Step 1)　積分路. $R>1$ とおく. 実軸上を 0 から R まで進む経路を C_1, 原点中心半径 R の円弧上を R から $Re^{\frac{2\pi}{m}i}$ まで進む経路を C_2, $Re^{\frac{2\pi}{m}i}$ から 0 まで線分上を進む経路を C_3, $C=C_1+C_2+C_3$ とおく.

(Step 2)　極と位数. $1+z^m=0$ より, $z=e^{\frac{(1+2k)\pi}{m}i}$ $(k=0,1,2,\cdots,m-1)$.　すべて, 位数は 1.

(Step 3)　C 内の特異点の留数. C 内の極は $z=e^{\frac{\pi}{m}i}$ のみ. これを α とおく. α を中心とするローラン展開 $f(z)=\dfrac{a_{-1}}{z-\alpha}+a_0+a_1(z-\alpha)+\cdots$ の分母を掃うと, $f(z)(z-\alpha)=a_{-1}+a_0(z-\alpha)+a_1(z-\alpha)^2+\cdots$.

よって, $a_{-1}=\displaystyle\lim_{z\to\alpha}\frac{z^n(z-\alpha)}{1+z^m}=\alpha^n\lim_{z\to\alpha}\frac{(z-\alpha)}{1+z^m}=\frac{\alpha^n}{m\alpha^{m-1}}=\frac{\alpha^{n+1}}{m\alpha^m}=\frac{\alpha^{n+1}}{m(-1)}.$

(Step 4) 留数定理. $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i(C\text{ 内の極の留数和}) = 2\pi i a_{-1} = -\frac{2\pi i\alpha^{n+1}}{m} = -\frac{2\pi i e^{\frac{(n+1)\pi}{m}}}{m}$.

(Step 5) 各積分路上の積分の処理. $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^R f(x)\,dx \to I(m,n) \quad (R\to\infty)$.

③ より $\displaystyle\int_{C_2} f(z)\,dz \to 0 \quad (R\to\infty)$.

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = \int_R^0 \frac{(te^{\frac{2\pi}{m}i})^n}{1+(te^{\frac{2\pi}{m}i})^m}\frac{dx}{dt}dt = \int_R^0 \frac{t^n e^{\frac{2\pi n}{m}i}}{1+t^m e^{2\pi i}}e^{\frac{2\pi}{m}i}dt = e^{\frac{2\pi(n+1)}{m}i}\int_R^0 \frac{t^n}{1+t^m}\,dt$$
$$\to -e^{\frac{2\pi(n+1)}{m}i}I(m,n) \quad (R\to\infty).$$

(Step 6) 答え. $\displaystyle -\frac{2\pi i e^{\frac{(n+1)\pi}{m}}}{m} = \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz.$ $R\to\infty$ とすると, $\displaystyle -\frac{2\pi i e^{\frac{(n+1)\pi}{m}}}{m} = I(m,n) + 0 - e^{\frac{2\pi(n+1)}{m}i}I(m,n)$. これを整理して, $\displaystyle I(m,n) = \frac{\pi}{m}\cdot\frac{1}{\sin\frac{(n+1)\pi}{m}}$.

積分路上に極がある場合の留数定理の応用 (168 頁例 9) $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ とおく. $\dfrac{\sin x}{x}$ は $f(x) = \dfrac{e^{ix}}{x}$ の虚部であることに注意する.

(Step 1) 積分路. $0<\epsilon<R$ とおく. 実軸上を $-R$ から $-\epsilon$ まで進む経路を C_1, 原点中心半径 ϵ の上半円上を $-\epsilon$ から ϵ まで進む経路を C_2, 実軸上を ϵ から R まで進む経路を C_3, 原点中心半径 R の上半円を R から $-R$ まで進む経路を C_4, $C = C_1+C_2+C_3+C_4$ とおく. 以下 $\displaystyle J = \int_C f(z)\,dz$ を考える.

(Step 2) 特異点と位数. $z=0$ のみ特異点で, 1 位の極である.

(Step 3) C 内の特異点の留数. C 内に特異点はない. (Step 4) コーシーの積分定理. $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$.

(Step 5) 各積分路上の積分の処理. $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\epsilon} f(x)\,dx \to \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx \quad (\epsilon\to+0,\ R\to\infty)$.

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_\pi^0 \frac{\exp(\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}}\cdot\frac{dz}{d\theta}d\theta = \int_\pi^0 \frac{\exp(\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}}i\epsilon e^{i\theta}d\theta = -i\int_0^\pi \exp(\epsilon e^{i\theta})d\theta \to -i\pi \quad (\epsilon\to+0).$$

ここで, e^z を $\exp(z)$ と書いた.

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = \int_\epsilon^R f(x)\,dx \to \int_0^\infty f(x)\,dx \quad (\epsilon\to+0,\ R\to\infty).$$

$$\int_{C_4} f(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{\exp(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}\cdot\frac{dz}{d\theta}d\theta = \int_0^\pi \frac{\exp(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta = i\int_0^\pi \exp(Re^{i\theta})d\theta \to 0 \quad (R\to\infty).$$

最後の極限でジョルダンの不等式の応用を用いる.

(Step 6) 答え. $\displaystyle 0 = \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz.$ $R\to\infty$ とすると, $\displaystyle 0 = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx - i\pi + \int_0^\infty f(x)\,dx + 0$. よって, $J = i\pi$. 両辺の虚部を見て, $I = \pi$.

多価関数の場合の留数定理の応用 (169 頁例 10) $\displaystyle I = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx \quad (0<p<1)$ とおく.

(Step 1) 積分路. $0<\epsilon<1<R$ とおく. 実軸上を ϵ から R まで進む経路を C_1, 原点中心半径 R の上半円上を反時計回りに R から 1 周する経路を C_2, 実軸上を R から ϵ まで進む経路を $-C_1$, 原点中心半径 ϵ の上半円を時計回りに ϵ から 1 周する経路を C_3, $C = C_1+C_2-C_1+C_3$ とおく. 以下略.

反転 $w = \dfrac{1}{\bar{z}}$ とおくと, z と w は 0 を端点とする半直線上に乗り, $|z||w| = 1$ を満たす. 円 $|z|=1$ 上の点は不動である. この性質を持つ写像を $|z|=1$ に関する反転という.

メビウス変換 (1 次分数変換) $w = \dfrac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc\neq 0)$ は円または直線を円または直線にうつす. この性質を円円対応という.

問 $C: x^2+y^2 = x$ とおく. C を極方程式で表わし, 次の 2 つを示せ.

(7) C が $w = z^2$ でカージオイドに写る. **(8)** C が $w = z^{\frac{1}{2}}$ でレムニスケートに写る.

次回やること 第 8 章 解析接続とリーマン面, 第 9 章 解析接続とリーマン面