微分積分学第二 ６類Uクラス 第１７回

10 月 8 日 (火) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

1　次の命題が真なら証明し, 偽なら反例をあげよ.

(1)　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば無限和 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ は収束する.

(2)　$1 < a_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ ならば無限乗積 $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots$ は 1 に収束する.

教科書　笠原晧司著「サイエンスライブラリ数学=12 微分積分学」サイエンス社

問題集　「大学院入試問題から学ぶシリーズ 微分積分」日本評論社

今日やること　第 1 章 集合と関数 1 頁〜19 頁

上限と下限 (6 頁)　閉区間 $I : a \leqq x \leqq b$ に対して, I の上限値 $\sup I$, 最大値 $\max I$ は共に b である.
I の下限値 $\inf I$, 最小値 $\min I$ は共に a である.
開区間 $I : a < x < b$ に対して, I の上限値 $\sup I$ は b であり, 最大値 $\max I$ は存在しない.
I の下限値 $\inf I$ は a であり, 最小値 $\min I$ は存在しない.

問 1　2 つの数列 $a_n = i^n + (-i)^n + \dfrac{1}{n}$ と $b_n = i^n + (-i)^n - \dfrac{1}{n}$ に対して, 最大値, 最小値があれば求めよ. また, 上限, 下限, 上極限, 下極限を求めよ.

数列の収束 (8 頁)　a_n が α に収束する. $\Longleftrightarrow$ n が限りなく大きくなると, a_n が限りなく α に近づく.
$\Longleftrightarrow$ n が限りなく大きくなると, $a_n - \alpha$ が (したがって, $|a_n - \alpha|$ が) 限りなく 0 に近づく.
$\Longleftrightarrow$ どんなに小さな $\epsilon > 0$ に対しても, 十分大きなすべての n に対して, $|a_n - \alpha| < \epsilon$.
$\Longleftrightarrow$ どんなに小さな $\epsilon > 0$ に対しても, N を十分大きく選ぶと, すべての $n \geqq N$ に対して, $|a_n - \alpha| < \epsilon$.

問 2　$0 < a_1 < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $a_{n+1} = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos a_n$ のとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\pi}{6}$ を示せ.

収束の判定法 (13 頁)　実数 $\mathbb{R}$ の世界では, 上に有界な単調増加数列は収束する. また, 下に有界な単調減少数列は収束する. 有理数の世界だと, 3, 3.1, 3.14, 3.141, $\cdots$ などは収束しない (収束先を持たない).

問 3　$0 < a_1 < 1$ かつ $a_{n+1} = {a_n}^2 - a_n + 1$ を満たす数列の極限を求めよ.

2 重添え字のある数列の収束　$a_{m,n}$ が α に収束する.
$\Longleftrightarrow$ m, n がどのような方法で限りなく大きくなっても, $a_{m,n}$ が α に限りなく近づく.
$\Longleftrightarrow$ どんなに小さな $\epsilon > 0$ に対しても, N を十分大きく選ぶと, すべての $m \geqq N$ とすべての $n \geqq N$ に対して, $|a_{m,n} - \alpha| < \epsilon$.

注　$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{m,n}\right)$ と $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{m,n}\right)$ が存在しても一致するとは限らない. 一致しても, $a_{m,n}$ の極限が存在するとは限らない. 例えば $a_{m,n} = \dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ の極限は存在しない.

コーシー列 (14 頁)　$|a_n - a_m|$ が 0 に収束する数列 $\{a_n\}$ をコーシー列という.
収束する数列はコーシー列である. 実数 $\mathbb{R}$ の世界では逆も成り立つ. つまり, コーシー列は収束する.

ボルツァノ・ワイエルシュトラス (15 頁)　有界閉集合 (コンパクト集合) $m \leqq x \leqq M$ 内の数列 $\{a_n\}$ を考える. それを適切に間引きした数列 $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots$ は収束する ($\{a_n\}$ は収束する部分列を含む).

例　$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ は $2 \leqq a_n \leqq 3 - \dfrac{1}{n!}$ を満たすので, 収束する部分列を含む. (実は e に収束する.)

点列の収束 (17 頁) ベクトルの絶対値 (長さ) の定義より $|(x,y) - (p,q)| = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}$ だった.
点列 $\mathrm{P}_n(a_n, b_n)$ が $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$ に収束する. $\Longleftrightarrow$ n が限りなく大きくなると, P_n が P に限りなく近づく.
$\Longleftrightarrow$ N を十分大きく選ぶと, すべての $n \geqq N$ に対して, $|(a_n, b_n) - (\alpha, \beta)| < \epsilon$.
このとき, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n = \mathrm{P}$ などと書く. これは, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とも同値である.

開集合 (19 頁)　開円板 $U_r(a,b) : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ のように境界を含まない集合を開集合という.

閉集合 (19 頁)　閉球体 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqq r^2$ のように境界を含む集合を閉集合という.

次回やること　第 1 章 集合と関数 20 頁〜

微分積分学第二 ６類Uクラス 第１８回

10 月 15 日 (火) の復習テスト 制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

1 (36 頁 4(i)) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} = \alpha$ となることを示す.

(1) $b_n = a_n - \alpha$ とおいて, 示すべきことを b_n に関する命題に書き直せ.

(2) $\epsilon > 0$ を好きに小さくとる. $n > N_1$ のとき $|b_n| < \dfrac{\epsilon}{2}$ になるとして, (1) の答の命題を示せ.

今日やること　第 1.3 節 $\mathbb{R}^2$ の点集合, 第 1.4 節 関数, 第 1.5 節 連続関数.

位相空間論の用語より　平面内の開円板 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を $B_r(a,b)$ とおく. A を集合とする.

• 点 (a,b) の近傍とは, 点 (a,b) の近くのこと. 厳密に書くと, 半径 $r>0$ を十分小さく選んだら, $B_r(a,b)\subset N$ となる集合 N のこと.

• 半径 r や 中心 (a,b) を変化させてできる $B_r(a,b)$ たちの 0 個, 1 個または複数 (無限個を含む) の合併で表わされる集合 U を開集合という. 0 個の場合は空集合 ϕ を表わすとする.

• A の外側 $\mathbb{R}^2\setminus A$ を A の補集合といい A^c と書く. 補集合 F^c が開集合となる集合 F を閉集合という.

• 集合 A の内部の点 (a,b) を内点という. 厳密には, $r>0$ を十分小さくとると $B_r(a,b)\subset A$ となる点.

• A の外部の点 (a,b) を外点という. 厳密には, $r>0$ を十分小さくとると $B_r(a,b)\cap A=\phi$ となる点.

• 内点でも外点でもない点のことを A の境界点という. $r>0$ をどんなに小さくとっても $B_r(a,b)\cap A\neq\phi$ かつ $B_r(a,b)\cap A^c\neq\phi$ となる点といっても同じである. 境界点の全体を ∂A と書く. (境界点の全体)$\cap A$ のことを ∂A と書くこともある. 以下に説明する集積点は (境界点)$\cup$(内点) である.

• A の点 (自分自身を除く) がいくらでも近くにある点 (a,b) を A の集積点という. 厳密には, $r>0$ をどんなに小さくとっても ($B_r(a,b)$ から中心を除いたもの)$\cap A\neq\phi$ となる点のこと.

• A を含む最小の閉集合を A の閉包といい $\overline{A}$ と書く. $\overline{A}=A\cup(A$ の集積点$)=A\cup(A$ の境界点$)$.

• r を十分大きくとると, $A\subset B_r(a,b)$ となるとき, A を有界であるという.

定理 1.25 (20 頁)　有界閉集合 K を開集合 $U_1,U_2,U_3,\cdots$ で覆ったとする. このとき, この中の有限個の開集合をうまく選ぶと, K が覆えている.

全射と単射　X,Y を集合とする. $\mathbb{R}_+$ を非負実数の全体とする.

• $f:X\to Y$ が写像 (関数, 変換) とは, X の各元 x に対して, Y の元 y が一つ定まること. この y を $f(x)$ と書く. ある 1 つの x に対して y が複数対応してしまう場合は, well-defined ではない (良く定義されない) と言う. この場合は関数ではない.

例１　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ を $y=x^2$ で定めると, 逆 $f^{-1}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ は $y=\pm\sqrt{x}$ となり, 関数にならない.

• $f:X\to Y$ が全射とは, f によって, X が Y 全体に写ってくることである. 言い換えると, 任意の Y の元 y に対して, それに写ってくる x が存在すること.

例２　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $y=x^2$ で定めると, 負の数には写って来ないので, 全射ではない.
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ を $y=x^2$ で定めると, 全射になる.

• $f:X\to Y$ が単射とは, Y の各元 y に写って来る x が複数は存在しないことを言う. 言い換えると, $f(x_1)=f(x_2)$ ならば $x_1=x_2$ となること.

例３　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ を $y=x^2$ で定めると, $y>0$ に写ってくる x は $x=\pm\sqrt{y}$ の 2 つがあり単射でない.
$g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ を $y=x^2$ で定めると, 単射になる.

• $f:X\to Y$ が全単射とは, 全射かつ単射であることを言う.

例４　$f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ を $y=x^2$ で定めると, 全単射になる.

2 変数関数の極限　$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=c$ とは, (x,y) が (a,b) 以外の値を取りながら如何なる近づき方で (a,b) に近づいても c に限りなく近づくことを意味する. $\epsilon-\delta$ 論法で書くと, 次のようになる.

どんなに小さな $\epsilon > 0$ に対しても, 十分小さな $\delta > 0$ を選ぶと, $0 < |(x,y)-(a,b)| < \epsilon$ ならば $|f(x,y)-c| < \delta$ が成り立つ. ここで, $|(x,y)-(a,b)|$ はベクトルの長さ $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ である. $|f(x,y)-c|$ は中学校で習った通常の絶対値である.

注 $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$ と $\displaystyle\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$ が存在しても一致するとは限らない. 一致しても, $f(x,y)$ の極限が存在するとは限らない. 例えば $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ は存在しない.

連続 x をちょっとだけ動かしたとき, $f(x)$ がちょっとだけ動く関数 $f(x)$ を連続関数という. ……②

例 5 実数 x は $3.14159\cdots = 3 + 0.14159\cdots$ のように (整数) + (小数) の形で表わされる. ここで, $0 \leqq$ (小数) < 1 である. $[x]$ を x の整数部分とする. 関数 $[x]$ は x が整数のところで, $y = [x]$ のグラフが切れているので, x が整数のところで $[x]$ は不連続である.
このような点を第 1 種不連続点という.

例 6 関数 $f(x)$ を $x = 0$ のとき 0, $x \neq 0$ のとき $\sin\dfrac{1}{x}$ で定める. $x = 0$ の近くで, $f(x)$ は激しく揺れるので, $x = 0$ で この $f(x)$ は不連続である. このような点を第 2 種不連続点という.

2 変数関数の連続 $f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で連続とは, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ が成り立つことである. $\epsilon - \delta$ 論法で書くと, 次のようになる. どんなに小さな $\epsilon > 0$ に対しても, 十分小さな $\delta > 0$ を選ぶと, $|(x,y)-(a,b)| < \epsilon$ ならば $|f(x,y)-f(a,b)| < \delta$ が成り立つ.

注 1 左右, あるいは上下方向から $(x,y) \to (a,b)$ としたとき, $f(x,y) \to f(a,b)$ であっても, $f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で連続とは限らない. 例えば $f(x,y)$ を $(x,y) = (0,0)$ で 0, $(x,y) \neq (0,0)$ で $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ と定義すると, $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で連続でない.

中間値の定理 (32 頁) $f(x)$ を $a \leqq x \leqq b$ で定義された連続関数とする. $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 ℓ に対して, $f(c) = \ell$ かつ $a \leqq c \leqq b$ を満たす c が存在する.

問 (37 頁 15) 円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上の連続関数 $f(x,y)$ は, 必ずある対蹠点で同じ値を持つことを示せ.

注 2 これを拡張した次の定理も成り立つ. 「地球上で, 気温と湿度が等しい対蹠点が必ず存在する.」

② の「ちょっとだけ動く」とは, x を動かす分量 $\pm\delta$ を 0 に近づけると $f(x)$ が動く分量 $\pm\epsilon$ が 0 に近づくことを意味する. この書き方だと, $\delta > 0$ が先にあって, δ (と x) の式で $\epsilon > 0$ が表わせて, $\displaystyle\lim_{\delta\to+0} \epsilon = +0$ ということになる. 極限の定義を思い出すと, これは, 十分小さい $\epsilon > 0$ を先に決めておいて, $f(x)$ の動く幅が $\pm\epsilon$ 未満になるように x の動く幅 $\pm\delta$ を定めることができることに他ならない.
このとき, x を動かすことのできる限界の幅 $\pm\delta$ は, x 毎に変わる. つまり, δ を式で表わすと ϵ だけでなく x も混じった式になる.

一様連続 上で定めた δ が場所 x に依らず ϵ のみで決まるとき, 関数 $f(x)$ は一様連続であるという.

例 7 関数 x^2 $(x \geqq 0)$ は連続だが一様連続ではない. なぜなら, x が 0 に近い所では, x を大きく動かしても x^2 はちょっとしか動かないが, x が 大きくなると, x をほんの少し動かしただけでも x^2 が大きく動いてしまう. よって, x^2 の動く幅を $\pm\epsilon$ にしようと思ったとき, x の動く幅 $\pm\delta$ は, x が大きくなるほど 0 に近づき, ϵ の値だけでは定まらない.

例 8 実数全体で定義された関数 $\sin 5x$ は一様連続である. 証明は, 次の, 定理 2.8(45 頁) を用いる.

ラグランジュの平均値の定理 $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$ を満たす c が a と x の間にある

$\sin 5x - \sin 5a = (5\cos 5c)(x-a)$ より $|\sin 5x - \sin 5a| = |(5\cos 5c)(x-a)| \leqq 5|x-a|$. よって, $\sin 5x$ の動きを幅 $\pm\epsilon$ 未満に抑え込むには, x の動きを幅 $\pm\delta = \pm\dfrac{\epsilon}{5}$ 未満にすればよい. この δ は ϵ のみによって決まり, 場所 x には無関係である.

注 3 $\sqrt{x}$ のように, 導関数が ∞ になる所があっても一様連続になる関数もある.

次回やること 第 2 章 微積分の基礎

微分積分学第二 ６類Uクラス 第１９回

10 月 22 日 (火) の復習テスト 制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.
1 (46 頁 定理 2.9)　$a < x < b$ で定義された関数 $f(x)$ について次を示せ.
(1)　$f'(x) = 0$ ならば, $f(x)$ は定数.　　**(2)**　$f'(x) > 0$ ならば, $f(x)$ は狭義単調増加になる.
注　1 点 $x = c$ で $f'(c) > 0$ でも, $x = c$ の近傍で $f(x)$ が単調増加とは限らない.

後期にやること　前期は, 理系の他教科で必要な数学の用語や計算技術を学んだ.
後期では, 極限の定義, 微分の諸公式や定積分の定義など, 計算の根拠となる理論を中心に学習する.
今日やること　第 2 章節 微積分の基礎, 第 2.1 節 微分と導関数, 第 2.2 節 平均値の定理, 第 2.3 節 高階導関数, 第 2.4 節 連続関数の定積分, 第 2.5 節 導関数と積分の関係, 第 2.6 節 有理関数の不定積分
ランダウの記号 (85 頁)　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a} = 0$ を満たす関数 $f(x)$ は, $x \fallingdotseq a$ のとき, $\dfrac{f(x)}{x-a} \fallingdotseq 0$ となるので, $f(x) \fallingdotseq 0(x-a)$ という気持ちから, $f(x) = o(x-a)\quad(x \to a)$ と書く.
$\left|\dfrac{f(x)}{x-a}\right|$ が $x = a$ の近傍で有界の場合は, $f(x) = O(x-a)\quad(x \to a)$ と書く.
o や O はローマ字のオーではなく, ギリシア文字のオミクロンである.
微分係数の定義の変形 (38,39 頁)　微分係数の定義より, $0 = \displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right)$
$= \displaystyle\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}\right\}$. したがって, $r(x)$ を $x \neq a$ のとき, $\dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}$, $x = a$ のとき 0 で定義すると, $r(x)$ は連続関数であり, $f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+r(x)(x-a)$ とおける.
$r(x)(x-a) = o(x-a)\quad(x \to a)$ であるから, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)\quad(x \to a)$ ……①
と書いてもよい.　　逆に $r(a) = 0$ となる連続関数 $r(x)$ を用いて $f(x) = f(a)+b(x-a)+r(x)(x-a)$ とおけるなら, $b = f'(a)$ となる. 40 頁命題 2.6 や 41 頁命題 2.7 やの証明はこの表示の方が簡単にできる.
導関数 (40 頁)　微分係数 $f'(a)$ ($x = a$ での接線の傾き) を a の関数と思った $f'(x)$ を導関数と呼ぶ.
微分 (40 頁)　① 式は, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, つまり接線の式が $y = f(x)$ の $x = a$ における近似式になることを示している. $dx = x - a$, $dy = f(x) - f(a)$ とおくと, 接線の式は $dy = f'(a)dx$ となる. これを $y = f(x)$ の微分とか, 全微分, 1 次微分形式と呼ぶ.
有界閉区間の性質 (31 頁)　$f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続なら, この区間で最大値, 最小値を取る.
ロルの定理　$f(x)$ が有界閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とする. $f(a) = f(b)$ のとき, $f'(c) = 0$ を満たす c が $a < x < b$ に存在する.
これを使うと 定理 2.8(45 頁) のラグランジュの平均値の定理が証明できる.
例　$f(x)$ が 2 次以下の多項式のとき, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ を満たす c として $c = \dfrac{a+b}{2}$ がある. 逆に, 常に $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ を満たす関数 $f(x)$ は 2 次以下の多項式のみである.
コーシーの平均値の定理 (46 頁)　$f(x)$ と $g(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能かつ $(f'(x), g'(x)) \neq (0, 0)$ ならば $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ を満たす c が $a < x < b$ に存在する. ……②
これも, ロルの定理を使って証明できる.
② を用いて, ロピタルの定理 (82 頁) やテーラーの定理 (90 頁) が証明できる.
高校での定積分の定義　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の幾何的意味は,
$y = f(x)\quad(a \leqq x \leqq b)$ のグラフと x 軸の間の部分 D の符号付き面積であった.
　高校では, この値を, D を縦に細長い短冊型に切って, 長方形の符号付き面積で近似して求めた. 長方形の底辺は $a \leqq x \leqq b$ を n 等分したので, 底辺の長さは $\dfrac{b-a}{n}$ であり, k 個目の長方形の右下の部分の x 座標は $a + k\dfrac{b-a}{n}$ になる.

よって, k 個目の長方形の符号付き高さは $f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ であり, k 個目の長方形の符号付き面積は $f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\dfrac{b-a}{n}$ となる. 長方形の符号付き面積和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$ である. この極限は D の符号付き面積に一致すると考えられるので, 高校では, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{nto\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$ と定義した.
しかし, この定義では不都合が生じることがある. 例えば, x が有理数のとき 1, 無理数のとき 0 という関数 $f(x)$ を考えると, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ だが, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 f(x)\,dx = 0+0=0$ となり面積の有限加法性が成り立たなくなる.

上ダルブー和と上積分　大学では, 等分しないで定める. 長方形の底辺は, 積分区間 $a \leqq x \leqq b$ を $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ のように n 分割して定める. 長方形の高さを右肩の高さでなく, 区間 $x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$ における $f(x)$ の上限値 (最大値) M_k で定めると, 長方形たちは D を外側から覆う ($f(x) \geqq 0$ のとき). この面積和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$ ……③ であり, D の真の面積以上の値を持つ. これを上ダルブー和という.
n をどんどん大きくしながら, $a \leqq x \leqq b$ の分割の仕方も動かしていったときの③ の下限値 (最小値) を上積分という.

下ダルブー和と下積分　長方形の高さを区間 $x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$ における $f(x)$ の下限値 (最小値) m_k で定めると, 長方形たちは D を内側から覆う ($f(x) \geqq 0$ のとき). この面積和は
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$ ……④ であり, D の真の面積以下の値を持つ. これを下ダルブー和という.
n を大きくして $a \leqq x \leqq b$ の分割を細かくし, 切り方も動かしていったときの④ の上限値 (最大値) を下積分という.

リーマン積分　上積分と下積分の値が一致するとき, その値を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と書き, $f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ でのリーマン積分という.

定理 (2.15) (51 頁)　$a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ でリーマン積分可能である.

「定理 1.36(35 頁)：連続関数は有界閉区間で一様連続になる」を用いる.

リーマン和 (50 頁)　$a \leqq x \leqq b$ を $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ のように n 分割する. D を近似する長方形の高さは, 右肩の高さでなく, 区間 $x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$ 内の任意の t_k を用いて $f(t_k)$ とする. このときの長方形の面積 $f(t_k)(x_k - x_{k-1})$ の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$ をリーマン和という. もし $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ でリーマン積分可能なら, n を限りなく大きくして, 分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ のすべての小区間の幅が 0 に収束するようにすると, リーマン和はリーマン積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ に収束する.

原始関数の定義 (54 頁)　$F'(x) = f(x)$ を満たす $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数といい, $\displaystyle\int f(x)\,dx$ と書く. $f(x)$ を最初に決めたとき, 本当にこんな $F(x)$ が存在するか心配だが, $f(x)$ が連続関数なら
$\left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$ となるので, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ が原始関数 $F(x)$ の一例となる.
$F_1(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ かつ $F_2(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ なら ${F_1}'(x) - {F_2}'(x) = f(x) - f(x) = 0$ であるから, $\{F_1(x) - F_2(x)\}' = 0 \Longleftrightarrow F_1(x) - F_2(x) = C$ (定数) $\Longleftrightarrow F_1(x) = F_2(x) + C$ (定数). 原始関数は, 定数の和を除いて一意 (唯一) であることがわかる.

微分積分学第二 ６類Uクラス 第２０回

10 月 29 日 (火) の復習テスト 制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

1　$0 \leqq x \leqq 1$ を以下のように切ってリーマン和 (区分求積) で $\displaystyle\int_0^1 x^4\,dx$ を計算せよ.

(1)　n 等分する.　　**(2)**　$0 < r < 1$ として, 公比 r の等比数列 $0, \cdots, r^n, \cdots, r^2, r, 1$ で切る.

今日やること　第 2.7 節 パラメーターを含む定積分, 第 2.8 節 広義積分, 第 2.9 節 初等関数.

点列の収束 (17 頁)　教科書では, 点列 P_n が点 A に収束するとは, P_n と A との距離が 0 に収束することと定義している.　有限次元であれば, これは, 各座標が収束することと同値である.
距離 (長さ) の概念を用いずに, 開集合の言葉だけで, 次のように定義することもできる.

定義　点列 P_n が点 A に収束するとは, 点 A を含む任意の開集合 (どんなに小さな開集合) U に対しても, 十分大きいすべての n で $\mathrm{P}_n \in U$ となる.

例１　無限次元空間内の点列 $\mathrm{P}_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}, \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}, \dfrac{1}{\sqrt{n+3}}, \cdots\right)$ の各座標は 0 に収束する. しかし, 2 乗で計算する原点との距離 $\sqrt{\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots}$ はいつまで経っても ∞ である.

点列コンパクト (定理 1.24)　有界閉区間 $a \leqq x \leqq b$ (一般には n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の有界閉集合) K 内の無限点列 P_n は収束する部分点列を含む.
部分点列とは, 奇数番目だけを抜き出したり, 3 の倍数番目だけを抜き出すなどしたもののこと.
教科書では, K を半分にし, 無限個の P_n を含む方を抜き出し, さらにその区間を半分にし, 無限個の P_n を含む方を抜き出すことを繰り返して証明している. つまり, 距離 (長さ) の概念を用いてしまっている.

コンパクト (定理 1.25)　有界閉区間 $a \leqq x \leqq b$ (一般には $\mathbb{R}^n$ 内の有界閉集合) K の任意の開被覆は有限部分被覆を持つ.　K の開被覆とは, その全体で K を覆う開集合 $U_1, U_2, U_3, \cdots$ のこと. 枚数は自然数の個数 (可算個) より多くてもよい. 有限部分被覆とは, その中の有限枚のこと.
教科書では, やはり, K を半分半分にしていく方法で証明している. つまり, 距離 (長さ) の概念を用いてしまっている.

定理　$\mathbb{R}^n$ の部分集合 K が点列コンパクトであることとコンパクトであることは同値である. これらは, 有界閉集合であることとも同値である.

積の微分と合成関数の微分 (命題 2.6, 2.7)　微分係数の定義の変形
「$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$ $(x \to x_0)$ のとき $A = f'(x_0)$」を用いて, 教科書では, $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$ を満たす連続関数 $\alpha(x)$ の $x = 0$ での値が $f'(x_0)$ として, 積や合成関数の微分を証明している.
$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$ を満たす連続関数 $r(x)$ で $r(0) = 0$ を満たすものがあるとき $A = f'(x_0)$ として積や合成関数の微分を証明することもできる.
例えば, $g(y)$ と $y = f(x)$ の合成を考える. $y_0 = f(x_0)$ とする.
$g(y) = g(y_0) + B(y - y_0) + R(y)(y - y_0)$ に $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$, つまり $y - y_0 = A(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$ を代入すると,
$g(f(x)) = g(f(x_0)) + B\{A(x - x_0) + r(x)(x - x_0)\} + R(f(x))\{A(x - x_0) + r(x)(x - x_0)\}$ になる.
$s(x) = Br(x) + R(f(x))A + R(f(x))r(x)$ とおくと, これは連続関数で,
$s(x_0) = Br(x_0) + R(y_0)A + R(y_0)r(x_0) = 0$ となるので, $g(f(x))$ の $x = x_0$ における微分係数は $BA = g'(y_0)f'(x_0)$ に等しい.

パラメーターを含む積分 (定理 2.24)　$f(x, y)$ は $a \leqq x \leqq b$ かつ $c \leqq y \leqq d$ で連続な関数とする. このとき, $a \leqq x \leqq b$ で $\varphi(x) = \displaystyle\int_c^d f(x, y)\,dy$ は連続関数となる.

例 2　$f(x,y)$ が不連続関数の場合は, 積分が不連続関数になることがある.
xy 平面上の正方形 $0 \leqq x \leqq 1$ かつ $0 \leqq y \leqq 1$ 上で定義された関数 $f(x,y)$ を $f(0,0)=0$, $(x,y) \neq (0,0)$ で $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ と定義すると, 原点で不連続になる. この場合,
$\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,dy = \left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_0^1$. この値は, $x \neq 0$ で $\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $x=0$ で $-\infty$ となる.

微分と積分の順序交換 (定理 2.26)　$f(x,y)$ は $a \leqq x \leqq b$ かつ $c \leqq y \leqq d$ で連続かつ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ も連続とする. このとき, な関数とする. $a \leqq x \leqq b$ で $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$ が成り立つ.
ただし, $a \leqq x \leqq b$ で微分可能とは, $a \leqq x \leqq b$ を含むある開区間で微分可能ということ.

例 3　$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ が不連続関数の場合は, 微分と積分の順序交換が不可能になることがある.
$f(x,y)$ を $|x| > |y|$ で $\dfrac{y(y^2-x^2)^2}{x^5}$, それ以外で 0 と定義する.
$|x|$ が十分小さいとき, $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^x f(x,y)\,dy = \frac{x}{6}$ より, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x f(x,y)\,dy = \frac{1}{6}$.
一方 $y_0 \neq 0$ のとき, $f(x,y_0)$ は $x=0$ の近くで恒等的に 0 である. また, $y_0 = 0$ のとき, $f(x,y_0)$ は恒等的に 0 である. よって, $\dfrac{\partial}{\partial x}f(0,y)$ は恒等的に 0 となる. よって, $x=0$ で, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,dy = 0$.

累次積分の順序交換 (定理 2.28)　$f(x,y)$ は $a \leqq x \leqq b$ かつ $c \leqq y \leqq d$ で連続とする. このとき,
$\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$ が成り立つ.

例 4　$f(x,y)$ が不連続関数の場合は, 累次積分の順序交換が不可能になることがある.
xy 平面上の正方形 $0 \leqq x \leqq 1$ かつ $0 \leqq y \leqq 1$ 上で定義された関数 $f(x,y)$ を $f(0,0)=0$, $(x,y) \neq (0,0)$ で $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ と定義すると, 原点で不連続になる. この場合,
$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx = -\frac{1}{2}$ となる.

無限区間の広義積分 (65 頁)　$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ は $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ で定義する.
$\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ は $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ で定義する.　$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ は $\displaystyle\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$ で定義する.

例 5　$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ は不定となり存在しない. 実際,
$\displaystyle\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}[\log(x^2+1)]_a^b = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left\{\log(b^2+1)-\log(a^2+1)\right\} = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\log\frac{b^2+1}{a^2+1}$ は
$b=-2a$ のとき $\log 4$ に収束し, $b=-3a$ のとき $\log 9$ に収束する.
主値は $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^b \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty}[\log(x^2+1)]_{-b}^b = 0$ となる.

有限区間の広義積分 (65 頁)　例えば, $x>0$ で定義された関数 $\log x$ は $x \to +0$ とする (x を正の方から 0 に限りなく近づける) と $-\infty$ になってしまう. この場合 $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$ は $\displaystyle\lim_{a\to+0}\int_a^1 \log x\,dx$ で定義する. よって, $\displaystyle\lim_{a\to+0}[x\log x - x]_a^1 = \lim_{a\to+0}\{(\log 1 - 1) - (a\log a - a)\} = -1$.

指数関数の定義 (70 頁)　$a>0$ とする. a^x は $x = \dfrac{n}{m}$ (m は自然数, n は整数) のとき, $(\sqrt[m]{a})^n$ で定義する. x が実数のときは, x に収束する有理数の単調列 q_n を使って, a^{q_n} の収束先として定義する.
マクローリン展開を用いて $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots$, $a^x = e^{(\log a)x}$ と定義することもある.

対数関数の定義 (71 頁)　$a>0$ かつ $a \neq 1$ のとき $y = \log_a x$ は a^x の逆関数として, つまり, $a^y = x$ となる y として定義する.　$\displaystyle\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ と定義することもある.

三角関数の定義 (74 頁)　高校では直角三角形や単位円を使って定義した.
$\sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ の逆関数で定義することもある.
マクローリン展開を用いて $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$ と定義することもある.

微分積分学第二 6類Uクラス 第２１回

前回やったこと　授業終了間際で, すぐ消してしまったので, ここに再現する.
「コンパクト」の原義は「目の詰んだ」とか「こじんまりした」である.
小さな子供部屋におもちゃが無限個散らばっていたら, 無数のおもちゃが集まっている箇所があるというのが点列コンパクトの感覚である.
そこに, 急にお客さんが来て, 子供部屋の床を無限個の座布団で隠すことができたら, 実は, 有限個の座布団で十分だったというのがコンパクトの感覚である.

定理　K を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする. K が点列コンパクト $\Longleftrightarrow$ K がコンパクト.

証明　「点列コンパクト $\Longrightarrow$ コンパクト」について. 背理法で示す.
K の開被覆 U_λ $(\lambda \in \Lambda)$ があれば, そのうちの可算個 (自然数の個数) で覆えることが証明できる. これをリンデレーフ性という. リンデレーフ性の証明は, 任意の開集合が有理点を中心とする有理数半径の開円板の合併で書けることを使う (第 2 可算性).
従って, K が $U_1, U_2, U_3, \cdots$ で覆えている場合を考えればよい. コンパクトでないとして矛盾を導く.
K の点で U_1 に入らないものを P_1, K の点で $U_1 \cup U_2$ に入らないものを P_2, K の点で $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ に入らないものを P_3, $\cdots$ として, K の点列 $\{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \cdots\}$ を定める.
K は点列コンパクトなので, $\{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \cdots\}$ は収束する部分列 $\mathrm{P}_{n(1)}, \mathrm{P}_{n(2)}, \mathrm{P}_{n(3)}, \cdots$ を含む. その収束先を P とおく. K は $U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \cdots$ で覆われているので, P は或る U_M に含まれる. 収束の定義から, N を十分大きく選ぶと $\{\mathrm{P}_{n(N)}, \mathrm{P}_{n(N+1)}, \mathrm{P}_{n(N+2)}, \cdots\}$ はすべて U_M に含まれる. P_n の定義から $n(k) \geqq M$ のとき, $\mathrm{P}_{n(k)}$ は $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_M$ に含まれないはずなので矛盾. よって, K は $U_1, U_2, U_3, \cdots$ 内の有限枚で覆うことができる.
「コンパクト $\Longrightarrow$ 点列コンパクト」について. 背理法で示す.
無限点列 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \cdots$ に収束する部分列が存在しないとする.
K の各点 x に対して, それを含む開集合 U_x で, $\{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \cdots\}$ の点を有限個しか含まないものがある. なぜなら, x を含むどの開集合 U_x も $\{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \cdots\}$ を無限個含むならば x が部分列の収束点になってしまう. U_x $(x \in K)$ は K の開被覆になる. 無限個ある $\{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \cdots\}$ を覆うには, U_x が無限個必要である. したがって, K を覆うのにも U_x が無限個必要となる. これは K のコンパクト性に反する.
注１　点列コンパクトだがコンパクトでない空間が存在する. ($0 \leqq x < \omega_1$ これは第一可算でもある.)
注２　コンパクトだが点列コンパクトでない空間が存在する. ($I : 0 \leqq x \leqq 1$ として, $I^{\mathbb{R}}$)

11 月 5 日 (火) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.
1　n を自然数とする.
(1)　開区間 U_n を $-1 < x < 1 - \dfrac{1}{n}$ で定める.
(i) 開区間 $I : 0 < x < 1$ は $U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \cdots$ で覆われるか.　(ii) この中の有限個ではどうか.
(iii) 閉区間 $I : 0 \leqq x \leqq 0.99$ はどうか.　(iv) 閉区間 $I : 0 \leqq x \leqq 1$ はどうか.
(2)　開区間 V_n を $n - 2 < x < n$ で定める.
(v) 閉区間 $I : 0 \leqq x$ は $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \cdots$ で覆われるか.　(vi) この中の有限個ではどうか.

今日やること　第 3 章 無限小解析 第 3.1 節 無限小, 第 3.2 節 無限大, 第 3.3 節 テイラーの公式.
コーシーの平均値の定理 (46 頁 命題 2.10)　$f(x)$ と $g(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能, $g(a) \neq g(b)$ かつ $(f'(x), g'(x)) \neq (0, 0)$ ならば $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ かつ $a < c < b$ を満たす c が存在する.
a と b の大小を逆にしても同様のことが成り立つ.
ド・ロピタルの定理１ (82 頁 定理 3.2)　$x = a$ を除いて, $x = a$ の近くで微分可能な関数 $f(x), g(x)$ が

$g(x) \neq 0$ かつ $(f'(x), g'(x)) \neq (0,0)$ かつ $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ を満たし, $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するなら $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ となる.

証明の方針　コーシーの平均値の定理を用いる.

例 1　$\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0$ は $\dfrac{0}{0}$ 型であるが, 分母と分子を微分した $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ は振動し, 収束しないので, ロピタルの定理はなりたたない.

ド・ロピタルの定理 2 (83 頁 系)　十分大きい M に対して, $x > M$ で微分可能な関数 $f(x), g(x)$ が $g(x) \neq 0$ かつ $(f'(x), g'(x)) \neq (0,0)$ かつ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ かつ $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ を満たし, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するなら $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ となる.

証明の方針　$t = \dfrac{1}{x}$ とおいて, $t \to +0$ の場合に帰着させる.

ド・ロピタルの定理 3 (86 頁 定理 3.5)　$x = a$ の近くで $x = a$ を除いて微分可能な関数 $f(x), g(x)$ が $g(x) \neq 0$ かつ $(f'(x), g'(x)) \neq (0,0)$ かつ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ を満たし, $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するなら $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ となる.
$x \to \infty$ の場合も同じことが成立する.

証明の方針　$\epsilon - \delta$ 的な考察が必要になる.

例 2　$\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x \cos x + 2 \sin x}{(x + \sin x \cos x)(2 + \sin x)}$ は $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型であり, 1 と 3 の間を振動し, 極限は存在しない.
分子を微分すると $1 + \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cos x = 2 \cos x (\cos x + 1)$.
分母を微分すると $(1 + \cos^2 x - \sin^2 x)(2 + \sin x) + (x + \sin x \cos x) \cos x$
$= \cos x \{2 \cos x (2 + \sin x) + (x + \sin x \cos x)\}$ となるので, これらの比の極限は 0 に収束する. したがって, この場合, ロピタルの定理が成立しない. その原因は, $(f'(x), g'(x)) = (0,0)$ となる点が, x がいくらでも大きい所にあるから.
同じことがド・ロピタルの定理 1 でもおこるので, 教科書に書かれている条件だけではド・ロピタルの定理は成立しない.

テーラーの定理 (90 頁 定理 3.8)　n を自然数とする. $a \leqq x \leqq b$ を含む開区間で $f^{(n)}(x)$ が存在して $a \leqq x \leqq b$ で連続であるとする. $f^{(n+1)}(x)$ が $a < x < b$ で存在するとする. このとき,
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$
かつ $a < c < b$ を満たす c が存在する. $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ をラグランジュの剰余項という. 剰余項をランダウの記号 o を用いて $o((x-a)^n)$ $(x \to a)$ と略記する.
剰余項を $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\, dx$ と書くこともできる. ただし, この積分が存在することを仮定する.
a と b の大小を逆にしても同様のことが成り立つ.
特に, $a = 0$, $b = x$ のとき
$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ を満たす c が 0 と x の間に存在する.
これをマクローリンの定理という.

証明の方針　前者はコーシーの平均値の定理を用いる. 後者は部分積分を用いる.

漸近展開 (95 頁)　テーラーの定理を用いて関数を $(x-a)^n$ の有限個の一次結合で近似的に表したり, マクローリンの定理を用いて関数を x^n や $\dfrac{1}{x^n}$ の有限個の一次結合で近似的に表すことを漸近展開という.

次回やること　第 3.5 節 数列の無限小と無限大, 第 3.6 節 無限級数の収束, 第 3.7 節 正項級数,

微分積分学第二 ６類Uクラス 第２２回

11 月 12 日 (火) の復習テスト 制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと.

1 $\dfrac{1}{\text{奇数}}$ の和から $\dfrac{1}{\text{偶数}}$ の和を引いた値を 2 通りの方法で計算する. 各々の値を求めよ.

(1) 公比 $-x$ の無限等比数列 $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots$ の値.

(2) 奇数と偶数を交互に並べた $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}+\cdots$ の値 S.

(3) 奇数, 偶数, 偶数の順に並べた $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{12}+\cdots$ の値 T.

今日やること　第 3.5 節 数列の無限小と無限大, 第 3.6 節 無限級数の収束, 第 3.7 節 正項級数, 第 3.8 節 絶対収束と条件収束, 第 3.9 節 二重級数, 第 3.10 節 無限積

テーラーの定理の証明　$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\dfrac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3$ を満たす ξ が a と x の間にある.

証明　$F(x)=f(x)-\left\{f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right\}$, $G(x)=(x-a)^3$ とおく.

$F(a)=0$, $G(a)=0$ であるから, コーシーの平均値の定理より, $\dfrac{F(x)}{G(x)}=\dfrac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\dfrac{F'(b)}{G'(b)}$ を満たす b が a と x の間にある. $F'(a)=0$, $G'(a)=0$ であるから, 再びコーシーの平均値の定理より, $\dfrac{F'(b)}{G'(b)}=\dfrac{F'(b)-F'(a)}{G'(b)-G'(a)}=\dfrac{F''(c)}{G''(c)}$ を満たす c が a と b の間にある. $F''(a)=0$, $G''(a)=0$ であるから, 再びコーシーの平均値の定理より, $\dfrac{F''(c)}{G''(c)}=\dfrac{F''(c)-F''(a)}{G''(c)-G''(a)}=\dfrac{F'''(\xi)}{G'''(\xi)}$ を満たす ξ が a と c の間にある. $F'''(\xi)=f'''(\xi)$, $G'''(\xi)=3!$ であるから, $\dfrac{F(x)}{G(x)}=\dfrac{f'''(\xi)}{3!}\iff F(x)=\dfrac{f'''(\xi)}{2}G(x)\iff$ $f(x)-\left\{f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)\right\}=\dfrac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3$. (証明終わり)　高次の場合も同様.

テーラーの定理の応用例　$f(x)$ は $f''(x)$ が存在して連続であり, $f''(a)\neq 0$ であるとする. ラグランジュの平均値の定理 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(b)$ において, b は, $x\to a$ のとき x と a の中点に収束する. つまり, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{b-a}{x-a}=\frac{1}{2}$ となる.

証明　テーラーの定理 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(c)}{2}(x-a)^2$ より,

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)+\dfrac{f''(c)}{2}(x-a)$. よって, $f'(a)+\dfrac{f''(c)}{2}(x-a)=f'(b)$.

$\dfrac{f''(c)}{2}=\dfrac{f'(b)-f'(a)}{x-a}=\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}\cdot\dfrac{b-a}{x-a}$.　　$x\to a$ とすると, $\dfrac{f''(a)}{2}=f''(a)\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{b-a}{x-a}$.

$f''(a)$ で割って, $\dfrac{1}{2}=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{b-a}{x-a}$.　　(証明終わり)

漸近展開の例　公比 $-x$ の無限等比数列の和より $1-x+x^2-x^3+\cdots=\dfrac{1}{1+x}$　$(|-x|<1)$. 収束半径内では項別積分可能であるから, $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots=\log(1+x)$　$(|x|<1)$ x を $\dfrac{1}{x}$ に置き換えて, x 倍すると, $1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x^2}-\dfrac{1}{4x^3}+\cdots=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$　$(|x|>1)$.

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+\cdots}=ee^{-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+\cdots}$ これを e^t のマクローリン展開 $e^t=1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3!}+\cdots$ に代入すると,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\left\{1+\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\cdots\right)^2+\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2x}+\cdots\right)^3+\cdots\right\}$$

$=e\left(1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{11}{24x^2}-\dfrac{7}{16x^3}+\cdots\right)$. これが $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ の $x\to\infty$ や $x\to-\infty$ での漸近展開である.

参考文献　日本評論社「大学院入試から学ぶシリーズ 微分積分」57 頁 ISBN 978-4-535-78604-2

応用　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left\{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}=\frac{e}{2}$ がわかる. つまり, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ と e の誤差は $\dfrac{1}{n}$ の位数だけある.

オイラーの定数 (100 頁) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ は正であり, 単調減少なので収束する. 収束値 γ をオイラーの定数と呼ぶ.

ベルヌーイ数 a を自然数とする. $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$ とする. a 乗の和の公式
$\sum_{k=1}^{n} k^a = \frac{n^{a+1}}{a+1} + \frac{n^a}{2} + \frac{b_2}{2} a n^{a-1} + \frac{b_3}{3!} a(a-1) n^{a-2} + \cdots + \frac{b_a}{a!} {}_a\mathrm{P}_{a-1} n$ で定まる数列 b_n をベルヌーイ数という. 例えば $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$, $b_6 = \frac{1}{42}$, $b_8 = -\frac{1}{30}$, $b_{10} = \frac{5}{66}$, $b_{12} = -\frac{691}{2730}$, $b_{2m+1} = 0 \quad (m \in \mathbb{N})$.

ベルヌーイ数の応用 次が成り立つ. $\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} |b_{2n}| x^{2n-1}$. a を自然数とする.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2a}} = \frac{|b_{2a}|(2\pi)^{2a}}{2(2a)!}$. 奇素数 p が $b_2, b_4, \cdots, b_{p-3}$ のどの分子も割り切らないとき, 正則という. この場合 $x^p + y^p = z^p$ が自然数解を持たないことが 19 世紀に知られていた. $4n-1$ 次元の球面 (n は 2 以上の整数) には, 少なくとも $2^{2n-2}(2^{2n-1}-1)\left(\left|\frac{4b_{2n}}{n}\right| \text{の分子}\right)$ 個の異なる微分構造がある.

オイラー・マクローリンの公式 ベルヌーイ数の定義より,
$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^a \frac{1}{n} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2n} + \frac{b_2}{2} \cdot \frac{a}{n^2} + \frac{b_3}{3!} \cdot \frac{a(a-1)}{n^3} + \cdots + \frac{b_a}{a!} \cdot \frac{{}_a\mathrm{P}_{a-1}}{n^a}$. $f(x) = x^a$ とおくと,
$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx + \frac{f(1)-f(0)}{2n} + \frac{b_2}{2} \cdot \frac{f'(1)-f'(0)}{n^2} + \cdots + \frac{b_a}{a!} \cdot \frac{f^{(a-1)}(1) - f^{(a-1)}(0)}{n^a}$.
$f(x)$ がマクローリン展開可能なら, 右辺を無限和にすれば, 同じ式が成立する.

参考文献 日本評論社「大学院入試から学ぶシリーズ 微分積分」36 頁 ISBN 978-4-535-78604-2

項の収束と和の収束 (102 頁 命題 3.15) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する (有限の値に限りなく近づく) ならば, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる. しかし, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ でも, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは限らない.

例 1 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ だが, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. $\because \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_0^1 = \infty$.

絶対収束 (110 頁 定理 3.29) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという. 和が絶対収束するなら, 和は収束し, その値は足す順番に依らない.
和が収束し, かつ, 絶対収束しない場合, 和の値は足す順番を入れ変えると変化することがある.

アーベルの級数変化法 (112 頁 定理 3.32) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ が有界かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ かつ $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ が収束するとする. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ は収束する.

例 2 (113 頁) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ は収束する. 実際 $\frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi)$ を周期関数に拡張したものになる.

2 重級数の和 (113 頁) m, n を自然数とする. $a_{m,n}$ の極限値は, m と n がどのように無限大になっても一定の値になるとき, その値と定義する. $a_{m,n}$ の無限和は, m と n をどの順に足しても一定の値になるとき, その値と定義する.

無限乗積 (115 頁) $\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \quad (n \to \infty)$ は 0 以外の一定の値に限りなく近づくとき収束するという. $a_k > 0$ のとき, 収束する必要十分条件は $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束すること.

次回やること 第 4 章 関数列の収束 第 4.1 節 関数列の収束, 第 4.2 節 一様収束列の性質, 第 4.3 節 パラメーターに関する一様収束, 第 4.4 節 C^m での収束, 第 4.5 節 関数の近似, 11 月 26 日 (火) が中間試験

微分積分学第二 ６類Uクラス 第２３回

前回の補足　前回のプリントの例１の式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{x}\,dx$ は授業で言ったように危険である．なぜなら, 誤差が 0 に収束しないから．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n}\geqq\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{x}\,dx$ を $n\to\infty$ とすれば救える．

11 月 19 日 (火) の復習テスト　制限時間 15 分　出欠の確認をするので, できなくても出すこと．

$\boxed{\mathbf{1}}$　**(1)**　$f_n(x)=nx^n(1-x)\quad(0\leqq x\leqq 1)$ とおく．$f_n(x)$ の極限と $f_n(x)$ の最大値の極限を求めよ．また, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ の極限を求めよ．

(2)　上の問で, $f_n(x)$ を $g_n(x)=n^2x^n(1-x)$ に変更したらどうなるか．

今日やること　第４章 関数列の収束 第 4.1 節 関数列の収束, 第 4.2 節 一様収束列の性質, 第 4.3 節 パラメーターに関する一様収束, 第 4.4 節 C^m での収束, 第 4.5 節 関数の近似

オイラー・マクローリンの公式とオイラーの定数γ　$f(x)=x^a$ とおく．a 乗の和の公式は, ベルヌーイ数 $b_2,b_3,b_4,\cdots$ を用いて, 次のように書ける．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=\int_0^n f(x)\,dx+\frac{f(n)}{2}+\frac{b_2}{2}f'(n)+\frac{b_3}{3!}f''(n)+\cdots+\frac{b_a}{a!}f^{(a-1)}(n)$．$f(x)$ が多項式の場合も同様．

冪級数の場合も無限和が収束するなら同様．$n=1$ を代入した式を, これから辺々引くと, 次式を得る．

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}f(k)=\int_1^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}\{f(n)-f(1)\}+\frac{b_2}{2}\{f'(n)-f'(1)\}+\frac{b_3}{3!}\{f''(n)-f''(1)\}+\cdots$．

$f(k)=\dfrac{1}{k}$ のとき, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=\log n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)+\frac{b_2}{2}\left(-\frac{1}{n^2}+1\right)+\frac{b_3}{3!}\left(\frac{2}{n^3}-2\right)+\cdots$．したがって,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+1\right)+\frac{b_2}{2}\left(-\frac{1}{n^2}+1\right)+\frac{b_3}{3!}\left(\frac{2}{n^3}-2\right)+\frac{b_4}{4!}\left(-\frac{3!}{n^4}+3!\right)+\cdots=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+1\right)+$
$\displaystyle\frac{b_2}{2}\left(-\frac{1}{n^2}+1\right)+\frac{b_4}{4!}\left(-\frac{3!}{n^4}+3!\right)+\frac{b_6}{6!}\left(-\frac{5!}{n^6}+5!\right)+\cdots.\qquad\therefore\quad\gamma=\frac{1}{2}+\frac{b_2}{2}+\frac{b_4}{4}+\frac{b_6}{6}+\cdots.$

無限和と積分の順序交換　関数列 $f_n(x)$ の第 n 部分和を $S_n(x)$ とおく．つまり, $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$ とおく．このとき, $\displaystyle\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\right)dx=\int_a^b\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right)\right\}dx=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}S_n(x)\right)dx$．……①

一方, 項別積分したものは,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_k(x)\,dx\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b f_k(x)\,dx\right)\right\}$．有限和ならば, 積分と順序交換できるので,

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right)dx\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b S_n(x)\,dx\right)$．……②　　①, ② より, 無限和と積分の順序交換が可能であることの必要十分条件は, 部分和に関する極限と積分が交換可能ということになる．

一様収束　$a\leqq x\leqq b$ で定義された関数 $f_n(x)$, $f(x)$ に対して, $|f_n(x)-f(x)|$ の上限が 0 に収束するとき, $f_n(x)$ は $f(x)$ に <u>一様収束</u> するという．一様収束するなら, 収束する (各点収束という)．

連続性の遺伝　連続関数 $f_n(x)$ が $f(x)$ に収束するなら, $f(x)$ も連続関数になる．

<u>例１</u>　$0\leqq x\leqq 1$ で $f_n(x)=x^n\to f(x)=\begin{cases}0 & (0\leqq x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}\quad(n\to\infty)$．これは一様収束でない．

極限と積分の順序交換　$a\leqq x\leqq b$ で積分可能な関数 $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束すると, $f(x)$ も積分可能で $\displaystyle\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx=\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$ が成り立つ．　一様収束でなくても, 極限と積分の順序交換ができることもある．　$b=\infty$ の場合は, 一様収束だけでは足りない．

<u>例２</u>　$f_n(x)=x^n(1-x)\quad(0\leqq x\leqq 1)$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=0\quad(0<x<1)$ であるから, $f_n(x)$ は

$f(x)=0$ に収束する．${f_n}'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n=0$ の解は $x=\dfrac{n}{n+1}$ である．よって, 増減表を描くと, $f_n(x)$ の最大値は $f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\dfrac{1}{n+1}\leqq\dfrac{1}{n+1}$ であることがわかる．$f_n(x)$ の最小値は 0 $(x=0,1)$ より, $\lim\limits_{n\to\infty}(|f_n(x)-f(x)|$ の上限$)=0$ であるから, この収束は一様収束になる．したがって, $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ と $\displaystyle\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx$ は等しい．実際, 両方とも 0 である．

例３　n を自然数とし, $f_n(x)=\dfrac{1}{n^2}xe^{-\frac{x}{n}}$　$(0\leqq x)$ とおく．この場合, $f_n(x)$ は $f(x)=0$ に一様収束するが, $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\,dx=1$, $\displaystyle\int_0^\infty\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx=0$ となる．

参考書　日本評論社「大学院入試から学ぶシリーズ 微分積分」196, 197 頁

参考：最近行った他校の中間試験　これよりは難しくします．

1　$\dfrac{n}{n+1}$ の極限値を s とおく．

(1)　$\epsilon=10^{-5}$ のとき, $n\geqq N$ を満たす全ての n に対し $\left|\dfrac{n}{n+1}-s\right|<\epsilon$ となる N の最小値を求めよ．

2　$0\leqq x<1$ を関数の定義域とする．5 つの関数を $x=0$ のとき $f(x)=0$, $0<x<1$ のとき

(a)　$f(x)=1$,　**(b)**　$f(x)=\sqrt{x}$,　**(c)**　$f(x)=x$,　**(d)**　$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$,　**(e)**　$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$

で定義する．或る定数 L が存在して, 定義域内の任意の a,b に対して, $|f(b)-f(a)|\leqq L|b-a|$ が成り立つとき, $f(x)$ はリプシッツ連続であるという．次の条件を満たすものを (a) 〜 (e) の記号で答えよ．

(2)　不連続.　**(3)**　連続だが一様連続でない.　**(4)**　一様連続だがリプシッツ連続でない.

(5)　リプシッツ連続である．

3　n を自然数とする．実数全体で定義された 4 つの関数列　**(a)**　$f_n(x)=\dfrac{x}{n+n^3x^2}$

(b)　$f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$　**(c)**　$f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$　**(d)**　$f_n(x)=\dfrac{n^2x}{1+n^2x^2}$　を考える．次の条件を満たすものを (a),(b),(c),(d) の記号で答えよ．

(6)　不連続関数に収束する．　**(7)**　連続関数に収束するが, 一様収束しない.

(8)　微分可能な関数に収束するが, $\left\{\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\right\}'\neq\lim\limits_{n\to\infty}{f_n}'(x)$.

(9)　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)\neq\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx$ となる．

4　xy 平面上の 5 つの図形　**(a)**　$x^2+y^2<1$,　**(b)**　$0<x^2+y^2$,　**(c)**　$x^2+y^2\leqq 1$,
(d)　$1\leqq x^2+y^2$,　**(e)**　$0<x^2+y^2\leqq 1$

を考える．次の条件を満たすものを (a),(b),(c),(d),(e) の記号で答えよ．

(10)　有界.　**(11)**　開集合.　**(12)**　閉集合.　**(13)**　有界閉集合.

(14)　点列コンパクト.　**(15)**　コンパクト.

5　$f(x,y)$ で $x=2s+3t$, $y=4s+5t$ であるとする．次を求めよ．

(16)　ヤコビ行列 $J=\begin{pmatrix}x_s & x_t\\ y_s & y_t\end{pmatrix}$.　**(17)**　$\begin{pmatrix}f_s\\ f_t\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}f_x\\ f_y\end{pmatrix}$ を満たす行列 A.

6　$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ とおき, 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 A を $(2,1,3)$ で定める．次を求めよ．

(18)　A における $\vec{J}=(f_x,f_y)$.　**(19)**　A における接平面の式.

(20)　曲線 $f(x,y)=3$ の点 $(2,1)$ における法線と接線の式.

7　$f(x,y,z)=xy-z^2$ とおく．曲面 $f(x,y,z)=5$ 上の点 B を $(3,2,1)$ で定める．次を求めよ．

(21)　ヤコビベクトル $\vec{J}=(f_x,f_y,f_z)$.　**(22)**　B における法線ベクトル $\vec{n}$ の 1 つ.

(23)　B における法線の式を $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ の形で.

(24)　B における接平面の式を $ax+by+cz=d$ の形で.

導関数や定積分の定義のように, 用語の理解を見る問題も出します.

次回やること　中間試験

微分積分学第二 ６類Ｕクラス 第２４回 中間試験 問題用紙

1 a を $a \geqq 0$ を満たす定数とする. $a_n = \sqrt{a + \dfrac{1}{n}}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を α とおく.

(1) $|a_n - \alpha|$ の分子を有理化して整理せよ.

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある N が存在して, $n \geqq N$ を満たす全ての n に対し $|a_n - \alpha| < \epsilon$ となる. このような N のうち, a に依存しないもの, つまり, ϵ のみの式となるものを 1 つ求めよ.

2 実数全体で定義された 5 つの関数を $x = 0$ のとき $f(x) = 0$, $x \neq 0$ のとき

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, **(b)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$, **(c)** $f(x) = x$, **(d)** $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, **(e)** $f(x) = x^2$

で定義する. 或る定数 L が存在して, 定義域内の任意の a, b に対して, $|f(b) - f(a)| \leqq L|b - a|$ が成り立つとき, $f(x)$ はリプシッツ連続であるという. 次の条件を満たすものを (a) 〜 (e) の記号で答えよ.

(3) 不連続. **(4)** 連続だが一様連続でない. **(5)** 一様連続だがリプシッツ連続でない.

(6) リプシッツ連続である.

3 **(7)** ラグランジュの平均値の定理を書け.

(8) m を自然数の定数とする. $\log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{m}$ を満たす最小の自然数 n を m の式で表せ.

4 **(9)** 適切なグラフの中に $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2n}\left\{\sin\frac{k\pi}{2n} - \sin\frac{(k-1)\pi}{2n}\right\}$ が面積となる長方形たちを描け.

(10) 上の S_n の極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

5 xyz 空間内の 5 つの図形 **(a)** $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, **(b)** $0 < x^2 + y^2 + z^2$,

(c) $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$, **(d)** $1 \leqq x^2 + y^2 + z^2$, **(e)** $0 < x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$

を考える. 次の条件を満たすものを (a),(b),(c),(d),(e) の記号で答えよ.

(11) 有界. **(12)** 開集合. **(13)** 閉集合. **(14)** 有界閉集合.

(15) 点列コンパクト. **(16)** コンパクト.

6 n を自然数とする. $0 \leqq x \leqq 1$ で定義された 5 つの関数列 **(a)** $f_n(x) = x^n$

(b) $f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)}{n}$ **(c)** $f_n(x) = x^n(1-x)$ **(d)** $f_n(x) = nx^n(1-x)$

(e) $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$ を考える. 次の条件を満たすものを (a),(b),(c),(d), (e) の記号で答えよ.

(17) 不連続関数に収束する. **(18)** $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right) \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$ となる.

(19) $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right) = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$ だが一様収束しない.

(20) $f_n(x)$ は一様収束するが, $\left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}' \neq \lim_{n\to\infty} {f_n}'(x)$. **(21)** $\left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}' = \lim_{n\to\infty} {f_n}'(x)$.

7 何回でも微分可能な関数 $f(x, y)$ において $x = r + s$, $y = rs$ とおく. 次を求めよ. 係数や成分は, 定数や r, s の式にせよ. 整理した形にすること.

(22) ヤコビ行列 $J = \begin{pmatrix} x_r & x_s \\ y_r & y_s \end{pmatrix}$. **(23)** $\begin{pmatrix} f_r \\ f_s \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ を満たす行列 A.

(24) f_{rs}.

8 パラメーターを含まない形で答えを書け. 整理した形にすること.

(25) 点 $(-2, -1, 0)$ を通って, 方向ベクトル $(1, 2, 3)$ の直線.

(26) 点 $(-2, -1, 0)$ を通って, 法線ベクトル $(1, 2, 3)$ の平面.

9 実数全体で定義された関数 $f(x)$ を $x = 0$ のとき $f(0) = 0$, $x \neq 0$ のとき $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ で定義する. 以下の 2 つについて, 存在するなら求め, 存在しないなら「なし」と書け.

(27) $f'(0)$. **(28)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\sin x}$.

微分積分学第二 ６類Ｕクラス 第２４回 解答用紙

氏名	番号	得点

答えのみ書くこと．量が多いのでできるところから解くこと．教科書などを見てはいけません．

1 (1)	(2)	**2** (3)	(4)
(5)	(6)	**3** (7)	(8)
4 (9)	(10)	**5** (11)	(12)
(13)	(14)	(15)	(16)
6 (17)	(18)	(19)	(20)
(21)	**7** (22)	(23)	(24)
8 (25)	(26)	**9** (27)	(28)

微分積分学第二 ６類Ｕクラス 第２４回 解答例

コンパクトや一様連続, 一様収束の概念を例に即して理解することはある程度できているようだ. しかし, 高校で習ったはずの単純な不等式を解いたり, 微分係数や定積分の定義を用いた計算ができていない. また, 前期の中間と期末でも出した連鎖律を用いて偏微分を 2 回行う計算が未だにできないのは困ったものである. 後期の期末でも出すかも知れない.

1 **(1)** $\dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a}}$	**(2)** $N=\left[\dfrac{1}{\epsilon^2}\right]+1$	**2** **(3)** (a), (d)	**(4)** (e)
(5) (b)	**(6)** (c)	**3** **(7)** $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ かつ c は a と b の間を満たす c がある.	**(8)** $n=m$
4 **(9)** $y=x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ の下に $\left(\sin\dfrac{(k-1)\pi}{2n},0\right)$ $\left(\sin\dfrac{k\pi}{2n},0\right)$ $\left(\sin\dfrac{k\pi}{2n},\sin\dfrac{k\pi}{2n}\right)$ $\left(\sin\dfrac{(k-1)\pi}{2n},\sin\dfrac{k\pi}{2n}\right)$ の 4 点を頂点とする n 個の長方形を描く.	**(10)** $\dfrac{1}{2}$	**5** **(11)** (a), (c), (e)	**(12)** (a), (b)
(13) (c), (d)	**(14)** (c)	**(15)** (c)	**(16)** (c)
6 **(17)** (a)	**(18)** (e)	**(19)** (d)	**(20)** (c)
(21) (b)	**7** **(22)** $\begin{pmatrix}1 & 1\\ s & r\end{pmatrix}$	**(23)** $\begin{pmatrix}1 & s\\ 1 & r\end{pmatrix}$	**(24)** $f_{rs}=f_{xx}+(r+s)f_{xy}$ $+rsf_{yy}+f_y$
8 **(25)** $x+2=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$	**(26)** $x+2y+3z+4=0$	**9** **(27)** 0	**(28)** 0