

## 8. 級数

### 8.1 級数の収束・発散

数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  に対して

$$(8.1) \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

の形を級数または無限級数という<sup>1)</sup>。級数 (8.1) に対して

$$(8.2) \quad s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって新たな数列  $\{s_n\}$  (部分和) を定義する<sup>2)</sup>。

定義 8.1. 級数 (8.1) が収束するとは、式 (8.2) で与えられる数列  $\{s_n\}$  が収束することである。このとき、 $\{s_n\}$  の極限值  $c$  を級数 (8.1) の和とよび、

$$c = a_0 + a_1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

と表す<sup>3)</sup>。収束しない級数は発散するという。

定理 8.2. 級数 (8.1) が収束するならば、数列  $\{a_n\}$  は 0 に収束する。

証明。一般に収束する数列  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  に対して  $q_n = p_{n+1}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) で定まる数列  $\{q_n\}$  は同じ極限值に収束する (問題 8-2)。

級数の和を  $c$  とすると、式 (8.2) の  $\{s_n\}$  と  $\{t_n = s_{n+1}\}$  はどちらも  $c$  に収束する。したがって

$$0 = c - c = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \quad \square$$

<sup>\*)</sup>2013 年 11 月 26 日 (2013 年 11 月 26 日訂正)

<sup>1)</sup>級数: a series; 無限級数: an infinite series; 式 (8.1) は一般に数を表すのではなく、 $a_j$  を記号 “+” でつないで並べた “絵” とみなす。

<sup>2)</sup>式 (8.2) の右辺は有限個の和なので、 $s_n$  はひとつの数である。

<sup>3)</sup>すなわち、(8.1) は、収束するときに限り、一つの数を表すことになる。

定理 8.2 の対偶をとれば

系 8.3. 数列  $\{a_n\}$  が 0 に収束しない<sup>4)</sup>ならば級数 (8.1) は発散する。

例 8.4. 定理 8.2 の逆は成立しない。実際、次の例がある<sup>5)</sup>：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{であるが} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{は発散する。}$$

このことを確かめよう。部分和を  $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  とおく。正の整数  $m$  に対して  $n \geq 2^m - 1$  をみたす番号  $n$  を任意にとると、

$$\begin{aligned} s_n &\geq s_{2^m-1} = \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k} = \sum_{l=1}^m \left( \sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} \frac{1}{k} \right) \\ &\geq \sum_{l=1}^m \left( \sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} \frac{1}{2^l} \right) = \sum_{l=1}^m \frac{2^{l-1}}{2^l} = \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

番号  $m$  は任意にとれるので、とくに  $\{s_n\}$  は正の無限大に発散する (定義 5.3 の条件をみたすことは各自確かめよ)。この級数を調和級数という<sup>6)</sup>。◇

例 8.5. 実数  $r$  に対して初項 1、公比  $r$  の等比級数は  $|r| < 1$  のとき収束し、

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1 \text{ のとき})$$

となり、それ以外の場合は発散する。実際、例 5.21 より  $|r| \geq 1$  なら  $\{r^n\}$  は 0 に収束しないので、系 8.3 より考えている級数は発散する。一方、 $|r| < 1$  のときは例 5.21 から

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \rightarrow \frac{1}{1-r}$$

となるので、結論が得られる。◇

<sup>4)</sup>このことは  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  とは異なる。例 6.15 を参照のこと。

<sup>5)</sup>式 (8.1) では添字が 0 から始まっているが、この例では添字が 1 から始まる。問題の性質によって添字の番号の付け方が異なるが、適切に読み替えて欲しい。

<sup>6)</sup>調和級数: the harmonic progression; 等比級数: a geometric progression (幾何級数); 等差級数: an arithmetic progression (算術級数)。

## 8.2 正項級数

数列  $\{a_n\}$  の各項が  $a_n \geq 0$  をみたすとき，級数 (8.1) は正項級数とよばれる<sup>7)</sup>．級数 (8.1) が正項級数であるとき，(8.2) で定義される部分和  $\{s_n\}$  は単調非減少数列だから，上に有界なら収束し（実数の連続性公理 5.12），上に有界でないなら正の無限大に発散する．このことから，次の収束判定法が得られる：

命題 8.6 (正項級数の比較)．負でない実数からなる数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  が各  $n$  に対して  $a_n \leq b_n$  をみたしているとする．このとき

- (1)  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  が収束するならば  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  も収束する．
- (2)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が発散するならば  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  も発散する．

証明．部分和をそれぞれ

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k, \quad t_n := \sum_{k=0}^n b_k$$

とおくとこれらは単調非減少数列で，仮定より  $s_n \leq t_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) が成り立つ．

(1):  $\sum b_n$  が  $\beta$  に収束するならば，各番号  $n$  に対して  $t_n \leq \beta$  なので， $s_n \leq t_n \leq \beta$  となる．この右辺は  $n$  に関係ない定数だから  $\{s_n\}$  は上に有界．したがって  $s_n$  は収束する．

(2):  $\sum a_n$  が発散するなら  $\{s_n\}$  は正の無限大に発散するから，補題 5.8 より  $\{t_n\}$  も正の無限大に発散する．  $\square$

注意 8.7. 級数の有限個の項を入れかえても収束・発散という性質は不変である<sup>8)</sup>．したがって命題 8.6 の仮定は「ある番号  $N$  から先の番号  $n$  に対して  $a_n \leq b_n$ 」とおきかえてもよい．さらに，有限個の項は負であっても構わない．

<sup>7)</sup> 正項級数: a nonnegative-term series; 言葉の意味からは「非負項級数」というべきだが，習慣的に正項級数とよぶ．

<sup>8)</sup> 和の値は変わる．

例 8.8. 実数  $p$  に対して，級数

$$(8.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^p = 1 + 2^p + 3^p + \dots$$

は

- (1)  $p \geq -1$  ならば発散する．
- (2)  $p < -1$  ならば収束する<sup>9)</sup>．

このことを示そう．番号  $n$  を一つ固定するとき， $f(x) = n^x$  は  $x$  の単調増加関数であることに注意する．

(1):  $p \geq -1$  ならば， $n^p \geq n^{-1} = 1/n$  なので，例 8.4 と命題 8.6 (2) から (8.3) は発散する．

(2) ( $p \leq -2$  の場合): まず  $p \leq -2$  の場合， $n \geq 2$  に対して

$$n^p \leq n^{-2} = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

ここで

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

は 1 に収束するので，命題 8.6 の (1) から (8.3) は収束する<sup>10)</sup>

(2) ( $-2 < p < -1$  の場合):  $p = -1 - q$  ( $q \in (0, 1)$ ) とおくと， $n \geq 2$  で

$$(n-1)^{p+1} - n^{p+1} = \frac{1}{(n-1)^q} - \frac{1}{n^q} = \frac{1}{n^q} \left( \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^q - 1 \right)$$

である．ここで，テイラーの定理 2.9 から，ある  $\theta \in (0, 1)$  に対して

<sup>9)</sup> 収束することは示すことができるが，和を求めるのは別問題である．たとえば  $p = -2$  の場合， $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$  となるが，これはオイラーによって 1735 年に求められたといわれている．このような「値を求める」問題は単なる練習問題でないことが多い．Leonhard Euler, 1707–1783, Sz.

<sup>10)</sup> ここで，比較する数列  $1/(n(n-1))$  は  $n \geq 2$  でしか定義されていないが，級数の収束には最初の有限個の項の挙動は関わりないので  $n \geq 2$  の部分の収束を論じれば十分である（注意 8.7 参照）．

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^q &= 1 + \frac{q}{n-1} + \frac{q(q-1)}{2(n-1)^2} \left(1 + \frac{\theta}{n-1}\right)^{q-2} \\
&\geq 1 + \frac{q}{n-1} - \frac{q(1-q)}{2(n-1)^2} \geq 1 + \frac{q}{n-1} \left(1 - \frac{1-q}{2(n-1)}\right) \\
&= 1 + \frac{q}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) \geq 1 + \frac{q}{2(n-1)} \geq 1 + \frac{q}{2n}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで  $0 < q < 1$ ,  $n \geq 2$  を用いた．したがって

$$n^p \leq \frac{2}{q}((n-1)^{p+1} - n^{p+1}) \quad (n \geq 2)$$

であるが,  $p < 0$  に注意すれば

$$\sum_{k=2}^n \frac{2}{q}((k-1)^{p+1} - k^{p+1}) = \frac{2}{q}(1 - n^{p+1}) \rightarrow \frac{2}{q} \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるので, 命題 8.6 の (1) から (8.3) は収束する．

◇

### 8.3 交代級数

項がひとつおきに符号を変えるような級数を交代級数<sup>11)</sup>という．

定理 8.9 (交代級数の和)．単調非増加で 0 に収束する数列  $\{q_n\}_{n=0}^\infty$  に対して  $a_n = (-1)^n q_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) とおくと級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q_n = q_0 - q_1 + q_2 - q_3 + \dots$$

は収束する．

証明．ある番号  $n$  で  $q_n = 0$  ならば, そこから先の項はすべて 0 なので, すべての番号  $n$  に対して  $q_n > 0$  となる場合のみを考えればよい．

部分和  $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$  を考え, 正の整数  $j$  に対して  $a_j := s_{2j-1}$ ,  $b_j := s_{2j}$  とおくと,  $\{a_j\}$ ,  $\{b_j\}$  は区間縮小法 (定理 7.1) の仮定をみたす．実際,

$$\begin{aligned}
b_j - a_j &= s_{2j} - s_{2j-1} = (-1)^{2j} q_{2j} = q_{2j} > 0 \\
a_{j+1} - a_j &= s_{2j+1} - s_{2j-1} = (-1)^{2j+1} q_{2j+1} + (-1)^{2j} q_{2j} = q_{2j} - q_{2j+1} \geq 0 \\
b_{j+1} - b_j &= s_{2j+2} - s_{2j} = q_{2j+2} - q_{2j+1} \leq 0,
\end{aligned}$$

さらに  $q_n \rightarrow 0$  から  $b_n - a_n \rightarrow 0$ ．したがって定理 7.1 から,  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  は共通の極限值  $c$  に収束する．すなわち, 任意の正の数  $\varepsilon$  に対して番号  $N_0$  で

$$j \geq N_0 \quad \text{ならば} \quad |a_j - \alpha| = |s_{2j-1} - c| < \varepsilon, \quad |b_j - \alpha| = |s_{2j} - c| < \varepsilon$$

となるものが存在する．そこで  $N = 2N_0 - 1$  とすれば「 $n \geq N$  ならば  $|s_n - c| < \varepsilon$ 」となり  $\{s_n\}$  が  $c$  に収束することがわかる．

□

### 例 8.10. (1) 級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

は収束する．この級数は例 3.11 で現れたもので, そこでは和の値 ( $\log 2$ )

まで求めているが, 収束することだけなら定理 8.9 だけから結論できる．

### (2) 問題 3-5 の級数

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

は収束する．和は  $\pi/4$  である．

### (3) 級数

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

は収束する．第 10 回で示すようにこの値は

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{9}(\sqrt{3}\pi + 3 \log 2)$$

である．

◇

<sup>11)</sup>交代級数: an alternating series.

## 問 題 8

8-1 次は正しいか．正しければ証明を，正しくなければ反例をあげなさい．

(1) 級数  $\sum a_n$  が収束するならば， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  である．

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ならば級数  $\sum a_n$  は収束する．

8-2 数列  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  が  $c$  に収束するとする．このとき， $q_n = p_{n+1}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) で定まる数列  $\{q_n\}$  も  $c$  に収束することを，定義 5.2 を直接つかって示しなさい．

8-3 例 8.8 の事実を次の不等式を用いて示しなさい：

$$\frac{1}{n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\frac{1}{n} = \int_{n-1}^n \frac{1}{n} dx \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx \quad (n = 2, 3, \dots).$$

8-4 次の級数の和を求めなさい．

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

ヒント：有理化

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

ヒント： $\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$  を考えよ．

8-5 実数  $r$  に対して  $a_n = nr^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) とおく．

(1)  $|r| < 1$  のとき  $\{a_n\}$  は 0 に収束することを示しなさい．

ヒント： $|r| = 1/(1+h)$  ( $h > 0$ ) において  $(1+h)^n \geq 1+nh+\frac{1}{2}n(n-1)h^2$  となることを用いる．

(2)  $|r| \geq 1$  のとき  $\{a_n\}$  は発散することを示しなさい．

(3) 部分和  $\sum_{k=0}^n a_k$  を求めなさい．

ヒント：等比級数の有限項の和を求めたのと同様の方法を用いなさい．

(4)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  を求めなさい．

8-6 次の級数の収束，発散を調べなさい．ただし  $\alpha$  は実数の定数である．

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$$