

7. 連続関数の性質

第 2 回に与えた平均値の定理の証明で，連続関数に関する最大・最小値の定理（定理 2.1）を用いた．今回はそれに証明を与えよう．そのために，実数の連続性公理 5.12 のいくつかの言い換えを説明する．

7.1 区間縮小法

定理 7.1 (ワイエルストラス¹⁾の区間縮小法). 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が条件

- (1) 各番号 n に対して $a_n < b_n$,
- (2) $\{a_n\}$ は単調非減少, $\{b_n\}$ は単調非増加,
- (3) $b_n - a_n$ は $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束する .

をみたすなら, $\{a_n\}, \{b_n\}$ は共通の極限值 c に収束する．とくに c は, すべての番号 n に対して $a_n \leq c \leq b_n$ をみたす唯一の実数である．

注意 7.2. 定理 7.1 が「区間縮小法」²⁾とよばれるのは以下による: 仮定 (1) から $I_n := [a_n, b_n]$ は空でない閉区間; 仮定 (2) から各 n に対して $I_n \supset I_{n+1}$, すなわち $\{I_n\}$ は入れ子になった区間の列; 仮定 (3) から区間 I_n の長さが 0 に近づく．これらの仮定のもと, 結論は「すべての区間 I_n に共通に含まれるただ一つの実数 c が存在する」ということである．

定理 7.1 の証明．仮定 (1), (2) より, 任意の番号 n に対して

$$a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 \leq b_0, \quad b_n > a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_1 \geq a_0$$

なので, $\{a_n\}, \{b_n\}$ はそれぞれ上に有界な単調非減少数列, 下に有界な単調非増加数列である．したがって連続性の公理 5.12 からこれらはそれぞれ極限值 α, β に収束する．ここで仮定 (3) と補題 5.7 から $\beta - \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ なので $\beta = \alpha$. ここですべての番号 n に対して $a_n \leq x$ が成り立つなら, 補題 5.8 の (1) と補題 5.7 (1) から $\alpha \leq x$. 同様に, すべての n に対して $b_n \geq x$ が成り立つなら $x \leq \alpha$. したがって, 結論が成り立つ． $\square$

^{*)}2013 年 11 月 19 日

¹⁾Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897, De.

²⁾区間縮小法の定理: the nested interval theorem.

7.2 上限・下限

定義 7.3. 実数の集合 $X \subset \mathbb{R}$ が上に有界 (下に有界) であるとは, 「任意の $x \in X$ に対して $x \leq M$ ($x \geq M$)」をみたすような実数 M が存在することである．この実数 M のことを X の上界 (下界) という³⁾．集合 X が上に有界かつ下に有界なときに, X は有界であるという．

注意 7.4. 数列 $\{a_n\}$ が上に有界である (定義 5.9) ことと, $\{a_n\}$ の全ての項を集めた集合が定義 7.3 の意味で上に有界であることは同値である．

定義 7.5. 集合 X の要素 M が X の上界 (下界) であるとき, M を X の最大値 (最小値) という⁴⁾．

また, 集合 X の上界 M に対して, それより小さい X の上界が存在しないとき, M を X の上限という⁵⁾．同様に X の下界 M に対して, それより大きい X の下界が存在しないとき M を X の下限という．

例 7.6. (1) 区間 $I = [0, 1]$ に対して 1 以上の任意の実数は I の上界, 1 は I の上限, 1 は I の最大値である．

- (2) 区間 $J = (0, 1)$ に対して 1 以上の任意の実数は J の上界, 1 は J の上限であるが, $1 \notin J$ なので 1 は J の最大値ではない．
- (3) 集合 X が最大値 (最小値) をもてば, それが上限 (下限) である．
- (4) 集合 X の上限 (下限) が X の要素ならば, それは X の最大値 (最小値) である． $\diamond$

注意 7.7. 実数 α が集合 $X \subset \mathbb{R}$ の上限であるための必要十分条件は

- (1) 任意の $x \in X$ に対して $x \leq \alpha$ が成り立つ．
- (2) 任意の正の数 ε に対して $\alpha - \varepsilon < x$ をみたす $x \in X$ が存在する．

実際, (1) は α が X の上界であることを表す．また, (2) は α より小さい数 ($\alpha - \varepsilon$ と表している) は X の上界ではないということを表している．下限の場合に対応する条件を書いてみよ (問題 7-1) ．

³⁾上界: an upper bound; 下界: a lower bound.

⁴⁾最大値: the maximum; 最小値: the minimum.

⁵⁾上限: the lowest upper bound, the supremum; 下限: the highest lower bound, the infimum.

定理 7.8 (上限・下限の存在 (実数の連続性)). 上に (下に) 有界な実数の部分集合 X は上限 (下限) をもつ.

注意 7.9. 定理 7.8 は実数の連続性 (公理 5.12) の異なる表現とみなせる (問題 7-7). とくに定理 7.8 は有理数に対しては成立しない. 実際, 有理数の集合 $X \subset \mathbb{Q}$ を $X := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ とすると⁶⁾, X は上に有界な $\mathbb{Q}$ の部分集合である. 実際 2 は X の上界であるが, 有理数の範囲で上界の最小値は存在しない.

定理 7.8 の証明. 集合 X が上に有界であるとして, その上界の一つを M とする. いま $x_0 \in X$ をひとつとると $x_0 \leq M$ である. そこで, 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_0 := x_0 - 1, \quad b_0 := M,$$

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \begin{cases} \left(\frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right) & \left(\frac{a_j + b_j}{2} \text{ が } X \text{ の上界でないとき} \right) \\ \left(a_j, \frac{a_j + b_j}{2} \right) & \left(\frac{a_j + b_j}{2} \text{ が } X \text{ の上界であるとき} \right) \end{cases} \quad (j \geq 0)$$

と定める. すると, これらの数列は定理 7.1 の条件をみたす (問題 7-2). 実際 $I_j := [a_j, b_j]$ とすると, I_{j+1} は I_j を二等分した区間のうち一方となっている. したがって, 区間縮小法 (定理 7.1) により $\{a_n\}, \{b_n\}$ は同じ極限值 c に収束する. 以下, この c が X の上限であることを示す.

まず, 注意 7.7 (1) が成り立つ. 実際, b_0 はとり方から X の上界. もし b_j が X の上界ならば, b_{j+1} はそのとり方から X の上界なので, 数学的帰納法の原理から各 b_n は X の上界. したがって, 各 $x \in X$ をひとつ固定すると $x \leq b_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) が成り立つので, 極限をとると $x \leq c$ (補題 5.8 (1)). すなわち, 任意の $x \in X$ に対して $x \leq c$ が成り立つ.

一方, 各番号 n に対して $a_n < x$ をみたす X の要素 x が存在する. 実際, $a_0 < x_0 \in X$ である. また, $a_j < x$ をみたす X の要素 x が存在すると仮定すると,

- $(a_j + b_j)/2$ が X の上界ならば, $a_{j+1} = a_j$ だから $a_{j+1} < x$ をみたす $x \in X$ が存在する.
- $(a_j + b_j)/2$ が X の上界でないならば, この値が a_{j+1} だから $a_{j+1} < x$ となる $x \in X$ が存在する.

このことから, 注意 7.7 (2) が成り立つことを示そう: 任意の正の数 ε をとると, $\{a_n\}$ が c に収束することから「 $n \geq N$ ならば $|a_n - c| < \varepsilon$ 」となる番号 N が存在する. この N に対して $c - \varepsilon < a_N$ なので $c - \varepsilon < a_N < x$ をみたす $x \in X$ が存在する.

以上から c が X の上限である. 下限の場合も同様にすればよい (問題 7-3). $\square$

⁶⁾有理数全体の集合 the set of rational numbers を $\mathbb{Q}$ で表す.

記号 7.10. 実数の集合 X が上に有界 (下に有界) のとき, その上限 (下限) を $\sup X$ ($\inf X$) と表す.

集合 $X \subset \mathbb{R}$ が上に有界でない (下に有界でない) ときは, $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$) と書く.

この記号を用いると, $\mathbb{R}$ の部分集合 X, Y に対して

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \sup(X \cup Y) &= \max\{\sup X, \sup Y\}, \\ \inf(X \cup Y) &= \min\{\inf X, \inf Y\} \end{aligned}$$

が成り立つ⁷⁾ (問題 7-5).

7.3 関数の値の上限・下限

区間 I で定義された関数 f に対して, その値をすべて集めてできる集合

$$(7.2) \quad f(I) := \{f(x) \mid x \in I\}$$

を f の像または「 f による区間 I の像」という⁸⁾. すなわち

- 数 y が $f(I)$ の要素であるための必要十分条件は, $f(x) = y$ となる $x \in I$ が存在することである.
- 数 y が $f(I)$ の要素でないための必要十分条件は, どんな $x \in I$ に対しても $y \neq f(x)$ となることである.

例 7.11. (1) 开区間 $I = (-1, 1)$ で定義された関数 $f(x) = x^2$ に対して, $f(I) = [0, 1)$ である.

(2) 区間 $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上の関数 $f(x) = \tan x$ に対して $f(J) = \mathbb{R}$ である.

(3) 関数 $f(x) = \tanh x$ に対して $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$ である. $\diamond$

関数 f が (I で) 上に有界 (下に有界, 有界) であるとは, その像 $f(I)$ が 上に有界 (下に有界, 有界) となる (定義 7.3 参照) ことである. とくに像

⁷⁾ $X \cup Y$ は X と Y の合併集合 the union of X and Y を表す. $\max\{a, b\}, \min\{a, b\}$ はそれぞれ a, b のうち小さくない方, 大きくない方を表すが, $\max\{a, +\infty\} = +\infty, \min\{a, -\infty\} = -\infty$ と約束しておく.

⁸⁾像: the image.

$f(I)$ の上限・下限を

$$\sup_I f = \sup_{x \in I} f(x) := \sup f(I) = \sup\{f(x) \mid x \in I\}$$

$$\inf_I f = \inf_{x \in I} f(x) := \inf f(I) = \inf\{f(x) \mid x \in I\}$$

と書く (記号 7.10). たとえば, 像 $f(I)$ が上に有界でない, ということは

$$(7.3) \quad \sup_I f = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{l} \text{任意の実数 } M \text{ に対して } f(x) > M \text{ を} \\ \text{みたま } x \in I \text{ が存在する} \end{array} \right)$$

と表される.

注意 7.12. 区間 I で定義された関数 f に対して, $f(c) = \sup_I f$ ($f(c) = \inf_I f$) をみたま I の点 c が存在するならば, f は c で最大値 (最小値) をとる.

7.4 最大・最小値の定理

定理 7.13 (最大・最小値の定理 (定理 2.1)). 閉区間 $I = [a, b]$ で連続な関数 f は, I で最大値・最小値をとる.

補題 7.14. 閉区間 $I = [a, b]$ で連続な関数 f の像 $f(I)$ は有界である.

証明. いま $f(I)$ が上に有界でないとして矛盾を導こう. このとき I を二つに分けた区間 $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ のいずれか少なくとも一方では f は上に有界でない. 実際, (7.1) から両方の区間で上に有界ならば, I でも有界となって矛盾が生じる.

このことに注意して, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を, $a_0 := a$, $b_0 := b$, 各番号 $j \geq 0$ に対して

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right) \quad \left(\left[\frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right] \text{ で } f \text{ が上に有界でないとき} \right) \\ \left(a_j, \frac{a_j + b_j}{2} \right) \quad \left(\left[\frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right] \text{ で } f \text{ が上に有界であるとき} \right) \end{array} \right\}$$

と定める. すると, 各 n に対して, 区間 $[a_n, b_n]$ で f は上に有界でないので, $a_n \leq c_n \leq b_n$ かつ $f(c_n) \geq n$ をみたまような数 c_n をとることができる. これにより, 新しい数列 $\{c_n\}$ が定義された. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は区間縮小法 (定理 7.1) の条件をみたしているので, 共通の極限值 $c \in [a, b]$ に収束する. さらに $a_n \leq c_n \leq b_n$ だから $\{c_n\}$ も同じ c に収束する (補題 5.8).

仮定より f は c で連続だから, 定理 6.5 により $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = f(c)$ が成り立つ. 一方, $\{c_n\}$ のとり方から $f(c_n) \geq n$ なので $\{f(c_n)\}$ は正の無限大に発散する. これは矛盾であるから f は I で上に有界である. 下に有界であることも同様に示される. $\square$

定理 7.13 の証明. 補題 7.14 から f は I で有界なので, $f(I)$ の上限を α とおく. このとき, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_0 := a$, $b_0 := b$, 各番号 $j \geq 0$ に対して $J := \left[\frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right]$ において

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right) \quad \left(\sup_J f = \alpha \text{ のとき} \right) \\ \left(a_j, \frac{a_j + b_j}{2} \right) \quad \left(\sup_J f \neq \alpha \text{ のとき} \right) \end{array} \right\}$$

と定める. すると, (7.1) から各 n に対して区間 $I_n := [a_n, b_n]$ の f の上限は α である. とくに, 各 n に対して

$$(*) \quad a_n \leq c_n \leq b_n, \quad \alpha - \frac{1}{n} < f(c_n) \leq \alpha$$

となる数 c_n をとることができる (注意 7.7). これで, 新しい数列 $\{c_n\}$ が定義された. このとき, 補題 7.14 と同様の議論で, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ は同じ極限值 c に収束する.

仮定より f は c で連続だから, 定理 6.5 により $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = f(c)$ が成り立つが, とくに (*) から $f(c) = \alpha = \sup_I f$ である. したがって f は $c \in [a, b]$ で最大値をとる (注意 7.12). 最小値の存在も同様に示される. $\square$

7.5 中間値の定理

高等学校で学んだ中間値の定理⁹⁾も, 最大・最小値の定理と同様, 実数の連続性の帰結である. この定理に証明を与えよう.

定理 7.15. 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 f が $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ をみたまならば, $f(c) = 0$, $a < c < b$ をみたま実数 c が少なくともひとつ存在する.

証明. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_0 := a$, $b_0 := b$, 各番号 $j \geq 0$ に対して

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) := \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{a_j + b_j}{2}, b_j \right) \quad \left(f\left(\frac{a_j + b_j}{2}\right) < 0 \text{ のとき} \right) \\ \left(a_j, \frac{a_j + b_j}{2} \right) \quad \left(f\left(\frac{a_j + b_j}{2}\right) \geq 0 \text{ のとき} \right) \end{array} \right\}$$

と定める. すると, 各 n に対して $f(a_n) < 0$, $f(b_n) \geq 0$ が成り立つ. 定理 7.13 の証明などと同様に $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は同じ極限值 $c \in [a, b]$ に収束するが, f の連続性から

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0, \quad f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$$

が成り立つので $f(c) = 0$. さらに, 仮定より $f(a)$, $f(b)$ は 0 でないので $a < c < b$ が成り立つ. $\square$

⁹⁾ 中間値の定理: the intermediate value theorem.

例 7.16 (冪乗根). 正の実数 α と正の整数 n に対して

$$(7.4) \quad c^n = \alpha \text{ となる正の実数 } c \text{ がただ一つ存在する.}$$

この c を α の n 乗根¹⁰⁾ という.

事実 (7.4) を示そう.

ただ一つであること: 二つの正の数 c_1, c_2 が $c_1^n = c_2^n = a$ をみたすならば,

$$0 = c_1^n - c_2^n = (c_1 - c_2)(c_1^{n-1} + c_1^{n-2}c_2 + \cdots + c_1c_2^{n-2} + c_2^{n-1})$$

となるが, 右辺の 2 つめの因子は正だから 0 でない. したがって $c_1 = c_2$ ¹¹⁾. 存在すること: (1) $\alpha = 1$ の場合は $c = 1$ とすればよい. (2) $0 < \alpha < 1$ のとき $I = [0, 1]$, $f(x) = x^n - \alpha$ とすると, f は I で連続 (例 6.10) かつ $f(0) = -\alpha < 0$, $f(1) = 1 - \alpha > 0$ が成り立つので, 中間値の定理 7.15 から $f(c) = 0$ ($0 < c < 1$) をみたす c が存在する. それが求めるものである. (3) $\alpha > 1$ ならば $J = [0, \alpha]$, $f(x) = x^n - \alpha$ に対して, $f(0) < 0$, $f(\alpha) = \alpha^n - \alpha = \alpha(\alpha^{n-1} - 1) > 0$ であるから中間値の定理から結論が得られる. ◇

例 7.17 (逆関数). 関数 f は区間 $[a, b]$ で連続, かつ単調増加であるとする. このとき,

$$(7.5) \quad \text{任意の } y \in f(I) \text{ に対して } f(x) = y \text{ をみたす } x \in [a, b] \text{ がただ一つ存在する.}$$

実際, $F(x) = f(x) - y$ に対して中間値の定理を適用すればよい. とくに $y \in f(I)$ は任意にとれるから,

$$\mathbb{R} \supset f(I) \ni y \mapsto \text{“} f(x) = y \text{ をみたす } x \text{”} \in \mathbb{R}$$

により新しい関数が定義される. この関数を f の逆関数とよび f^{-1} と書く¹²⁾. 連続関数 f の逆関数 f^{-1} は $f(I)$ で連続である (問題 7-6). ◇

¹⁰⁾ α の n 乗根: the n -th root of α ; 平方根: the square root; 立方根: the cubic root.

¹¹⁾ これは高等学校の範囲.

¹²⁾ 逆関数: the inverse function; f^{-1} : the inverse of f .

問 題 7

- 7-1 注意 7.7 に倣って実数 α が $X \subset \mathbb{R}$ の下限であるための条件を書きなさい.
 7-2 定理 7.8 の $\{a_n\}, \{b_n\}$ が定理 7.1 の仮定をみたしていることを確かめなさい.
 7-3 定理 7.8 の上限の場合の証明をまねして下限の場合の証明を作りなさい.
 7-4 区間 $(a, +\infty)$ で定義された関数 f が

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$ をみたすとは, 任意の正の数 ε に対して次をみたす数 M が存在することである: $x > M$ をみたす任意の x に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ をみたすとは, 任意の正の数 A に対して次をみたす数 M が存在することである: $x > M$ をみたす任意の x に対して $f(x) > A$.

- (1) この定義に倣って, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ の定義を述べなさい.
 (2) 多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) に対して

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & (a_n > 0 \text{ のとき}) \\ -\infty & (a_n < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つことを示しなさい. $x \rightarrow -\infty$ の場合はどうか (ヒント: a_n の符号と n の偶奇で場合が分かれる).

- (3) 奇数次の多項式は少なくともひとつ実根 (多項式 $f(x)$ に対して $f(c) = 0$ となる実数 c) をもつことを, 中間値の定理 7.15 を用いて示しなさい (中間値の定理の仮定をみたすような区間をどうやってとるか).
 (4) 関数 e^x は多項式で表せないことを示しなさい (ヒント: $x \rightarrow \pm\infty$ の極限を考えよ).

7-5* 式 (7.1) が成り立つことを確かめなさい.
 (注意: $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\}$.)

7-6* 例 7.17 で得られた逆関数 f^{-1} は $f(I)$ で連続であることを確かめなさい.

7-7* 連続性の公理 5.12 を未知とし, 定理 7.8 が成り立つことを認めて, 公理 5.12 の主張が成り立つことを示しなさい. すなわち, 上限・下限の存在を認めて, 上に有界な単調非減少数列が収束することを示しなさい (ヒント: $\{a_n\}$ を上に有界な単調非減少数列として, そのすべての項を集めてできる集合を A とすると A は上に有界. したがって $\alpha := \sup A$ が存在するが, それが極限値である.)