2. 平均値の定理とテイラーの定理

2.1 平均値の定理の証明

平均値の定理 1.4 を示すには，次の連続関数の性質 (第 8 回講義で扱う予定; ここでは証明を与えない) を用いる：

定理 2.1 (最大・最小値の定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f は，区間 $[a,b]$ で最大値・最小値をもつ．

ここで，区間 I で定義された関数 f が $c \in I$ で**最大値** (**最小値**) をとる[1]，とは任意の $x \in I$ に対して $f(x) \leqq f(c)$ $(f(x) \geqq f(c))$ が成り立つことである．関数 f が区間 I で**最大値** (**最小値**) をとるとは，上のような $c \in I$ が存在することである．

注意 2.2. 上の定義における c は定義域 I に含まれていることに注意しよう．たとえば $\mathbb{R}$ 全体で定義された関数 $f(x) = \tan^{-1} x$ は，すべての実数 x に対して $f(x) \leqq \pi/2$ をみたしているが $f(c) = \pi/2$ となる実数 c は存在しないので，最大値をとるとはいえない．

注意 2.3. 定理 1.1 は (第 8 回にのべる中間値の定理と同様) よく考えないとあたり前の定理であるが，実数の連続性[2]（第 7 回）と深く関わっている．実際，定義域を有理数に限って，$f(x) = 4x^2 - x^4$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ を考えると，これは $0 \leqq x \leqq 2$ 上で (定義域を有理数に限っても) 連続な関数だが，最大値をとらない．もちろん，同じ関数を，$\mathbb{R}$ の区間 $[0,2]$ 上で定義された連続関数と考えれば $x = \sqrt{2}$ で最大値をとる．

補題 2.4. 区間 I で定義された関数 f が I の内点 c で最大値または最小値をとるとする．さらに f が c で微分可能ならば $f'(c) = 0$ が成り立つ．

[*] 2013 年 10 月 15 日 (2013 年 10 月 22 日訂正)
[1] 最大値 the maximum; 最小値 the minimum.
[2] 実数 a real number; 実数の連続性 continuity of real numbers; 有理数 a rational number.

証明． 点 c は I の内点だから十分小さい正の数 δ をとれば，開区間 $(c-\delta, c+\delta)$ は I に含まれる．いま f は c で微分可能だから，極限値

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在する．とくに f が c で最大値をとるならば，$f(c+h) - f(c) \leqq 0$ なので

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \begin{cases} \leqq 0 & (h > 0 \text{ のとき}) \\ \geqq 0 & (h < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるので，h を 0 に近づけた時の極限値 $f'(c)$ は 0 でなければならない．最小値の場合も同様である[3]． □

補題 2.5 (ロル[4]の定理)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 F が開区間 (a,b) で微分可能，かつ $F(a) = F(b)$ をみたしているならば，

$$F'(c) = 0, \qquad a < c < b$$

をみたす c が少なくとも一つ存在する．

証明． 関数 F は $[a,b]$ で連続だから，定理 1.1 から $c_1, c_2 \in [a,b]$ で F は c_1 で最大値をとり，c_2 で最小値をとるようなものが存在する．もし c_1, c_2 がともに a, b いずれかの値をとるならば，仮定から $F(c_1) = F(c_2)$ となって，最大値と最小値が一致する．このとき F は定数関数となるので，区間 (a,b) で $F' = 0$ となり結論が得られる．そうでない場合は c_1, c_2 の少なくとも一方が開区間 (a,b) に含まれるので，それを c とおけば補題 1.4 より $F'(c) = 0$． □

平均値の定理 1.4 の証明. 関数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

に対してロルの定理 (補題 1.5) を適用すればよい（問題 1-2）． □

[3] "同様である" と書いて証明が省略されていたら，それが本当か自分で確かめてみよう．
[4] Michel Rolle (1652-1719; Fr); ロルの定理 Rolle's theorem.

定理 2.6 (コーシー[5]の平均値の定理). 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f, g がともに (a,b) で微分可能, $g(a)\neq g(b)$ をみたし, 区間 (a,b) 上で $g'(x)\neq 0$ であるとする. このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\qquad a<c<b$$

をみたす c が少なくともひとつ存在する.

証明. 関数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\bigl(g(x)-g(a)\bigr)$$

に対してロルの定理 (補題 1.5) を適用すればよい（問題 1-2）. □

2.2 高階の導関数

区間 $I\subset\mathbb{R}$ で定義された微分可能な関数 f の導関数 f' が微分可能であるとき, f は 2 階 (2 回) 微分可能である, といい, f' の導関数 f'' を f の **2 次導関数**[6]という. 一般に正の整数 $k\geqq 2$ に対して, k 階微分可能性, k 次導関数が次のように帰納的に定義される：

> 区間 I で定義された関数 f が $(k-1)$ 階微分可能であり, $(k-1)$ 次導関数が微分可能であるとき, f は k 階微分可能であるといい, $(k-1)$ 次導関数の導関数を k 次導関数とよぶ.

関数 f の k 次導関数を

$$f^{(k)}(x),\qquad \frac{d^k}{dx^k}f(x),\qquad \frac{d^ky}{dx^k}$$

などと書く. 最後の表記は $y=f(x)$ のように従属変数を y と表した時に用いられる.

例 2.7. (1) 正の整数 n に対して $f(x)=x^n$ とすると, $f^{(k)}(x)=k!x^{n-k}$ ($k\leqq n$ のとき), $f^{(k)}(x)=0$ ($k>n$ のとき) である. ここで $k=n$ のとき $f^{(n)}(x)=n!x^0$ は定数関数 $n!$ とみなしている.

[5] Augustin Louis Cauchy (1789–1857, Fr); これに対して, 平均値の定理 1.4 を**ラグランジュの平均値の定理**ということがある; Joseph-Louis Lagrange (1736–1813, It).

[6] 2 次導関数 the second derivative; k 次導関数 the k-th derivative.

(2) $f(x)=e^x$ ならば, 任意の負でない整数 k に対して $f^{(k)}(x)=e^x$.

(3) $f(x)=\cos x$ ならば, 任意の負でない整数 k に対して $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\cos x$, $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^{k+1}\sin x$ である. とくに, 負でない整数 m に対して $f^{(m)}(x)=\cos(x+\frac{m\pi}{2})$ である. ◇

定義 2.8.
- 区間 I で定義された関数 f が I で連続であるとき f は C^0-級であるという.
- 区間 I で定義された微分可能な関数 f の導関数が連続であるとき f は **1 階連続微分可能**または C^1-級であるという.
- 区間 I で定義された k 階微分可能な関数 f の k 次導関数が連続であるとき f は k **階連続微分可能**または C^k-級であるという.
- 任意の正の整数 k に対して C^k-級であるような関数を C^∞-級という.

2.3 テイラーの定理

定理 2.9 (テイラー[7]の定理). 関数 f が a を含む開区間 I で $(n+1)$ 回微分可能ならば, $a+h\in I$ となる h に対して

$$\begin{aligned}(2.1)\quad f(a+h)&=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_{n+1}(h)\\&=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)h^j+R_{n+1}(h),\end{aligned}$$

$$R_{n+1}(h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

をみたす θ が少なくともひとつ存在する[8].

[7] Sir Brook Taylor (1685–1731, En)

[8] 式 (1.1) の総和記号の $k=0$ の項において h^0 は $h=0$ のときも 1 であると約束しておく.

証明. 区間 $[0,1]$ で定義された関数

$$F(t) := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a+th)}{k!}(1-t)^k h^k\right) + (1-t)^{n+1}\left(f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k\right)$$

は微分可能で $F(0)=F(1)=f(a+h)$ をみたしている．これにロルの定理 (補題 1.5) を適用すればよい (問題 1-6). $\square$

例 2.10. 再び $\sqrt{10}$ の近似値を求めよう．関数 $f(x)=\sqrt{x}$ に $a=9$, $h=1$, $n=1$ としてテイラーの定理 1.9 を適用すると，

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{9+\theta}^3}, \qquad 0<\theta<1$$

をみたす θ が存在することがわかる．とくに，$\theta \in (0,1)$ だから

$$\begin{aligned}
\sqrt{10} &\leqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\sqrt{10}^3} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{80\sqrt{10}} \\
&\leqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{80\sqrt{16}} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{320} \\
&\leqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{3}{1000} = 3 + \frac{1}{6} - 0.003 \leqq 3.16366\ldots \leqq 3.164 \\
\sqrt{10} &\geqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\sqrt{9}^3} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\times 27} \\
&\geqq 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8\times 25} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{200} = 3 + \frac{1}{6} - 0.005 \geqq 3.161
\end{aligned}$$

となるので

$$3.161 \leqq \sqrt{10} \leqq 3.164$$

が成り立つ．とくに $\sqrt{10}=3.16\ldots$ (小数第二位まで正しい)．この場合，テイラーの定理 1.9 の次数 n を 3, 4,... とあげていくと，近似の精度がよくなる（問題 1-8）. $\diamondsuit$

問　題　2

2-1 定理 1.1 の仮定が必要であることを，次のようにして示しなさい：

- 開区間 $(0,1)$ で定義された連続関数で，最大値をもつが最小値をもたないものの例を挙げなさい.
- 開区間 $(0,1)$ で定義された連続関数で，最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい.
- 閉区間 $[0,1]$ で定義された (連続とは限らない) 関数で，最大値も最小値ももたないものの例を挙げなさい.

2-2 平均値の定理の証明 (2 ページ) を完成させなさい．同様に，コーシーの平均値の定理 1.6 の証明を完成させなさい.

2-3 次のコーシーの平均値の定理 1.6 の証明の**誤り**を指摘しなさい：関数 f, g に平均値の定理 1.4 を適用すると

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \qquad \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c)$$

をみたす $c \in (a,b)$ が存在することがわかる．この第一の等式を第二の等式で割ると，結論が得られる.

2-4 コーシーの平均値の定理を用いて，次を示しなさい (ロピタル[9]の定理の特別な場合)：

> 関数 $f(x)$, $g(x)$ が区間 $[a,a+h)$ で連続，かつ $(a,a+h)$ で微分可能であるとする．さらに $f(a)=g(a)=0$, かつ極限値
>
> $$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
>
> が存在するならば，極限値
>
> $$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$
>
> も存在して，両者は等しい.

2-5 次の極限値を求めなさい.

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$.
- $\displaystyle \lim_{x\to +0} \frac{5^x - 3^x}{x^2}$.

[9] Guillaume Francois Antoine, Marquis de l'Hôpital, 1661–1704, Fr); l'Hospital とも書かれる.

2-6 テイラーの定理 1.9 の証明を完成させなさい.

2-7 次の場合に，式 (1.1) を具体的に書きなさい.

- $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $n = 2$.
- $f(x) = e^x$, $a = 0$, $n = 2$; n は一般の自然数.
- $f(x) = e^x$, a は一般の実数, n は一般の自然数.
- $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $n = 2$; $n = 2k - 1$ (k は正の整数).
- $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $n = 3$; $n = 2k$ (k は正の整数).
- $f(x) = \tan x$, $a = 0$, $n = 3$.
- $f(x) = \tan^{-1} x$, $a = 0$, $n = 4$; n は一般の自然数.
- $f(x) = \log(1 + x)$, $a = 0$, $n = 3$; n は一般の自然数.
- $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $a = 0$, $n = 3$; n は一般の自然数．ただし α は実数.

2-8 例 1.10 の n を 3 にして $\sqrt{10}$ の近似値を求めなさい．小数第何位まで求まるか.

2-9 $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めよう.

- 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ に $a = 1$, $h = 0.1$, $n = 2$ としてテイラーの定理 1.9 を書きなさい.
- このとき，$R_3(h)$ 以外の項の総和はいくつか.
- $R_3(h)$ の大きさを不等式で評価することによって，$\sqrt{1.1}$ の値を求めなさい.
- 同じことを $n = 3$ として試みなさい.

2-10* 地球 (半径 $R = 6.4 \times 10^6$ メートルの正確な球と仮定する) の赤道の周囲にゴムひもを巻き，その 1 箇所をつまんで 1 メートル持ち上げるとき，ゴムひもの伸びは

$$2\left(\sqrt{2R+1} - R\tan^{-1}\frac{\sqrt{2R+1}}{R}\right)$$

で与えられる．この値の近似値を手計算で求めなさい.