

2013年度 論理回路理論 演習3 解答

学科： _____ 学籍番号： _____ 氏名： _____

1. 論理関数 $L(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$ が線形関数である時、以下のように表現できる

$$L(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \dots \oplus a_n x_n$$

ただし、 $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ の値は1もしくは0である。

また、線形関数は必ず自己双対関数か自己反双対関数のいずれかである。

以上の点を踏まえて、次の論理関数が線形であるか否かを、理由と共に示せ。

(1) $xy \vee \bar{x}\bar{z} \vee yz$ (15点)

(2) $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$ (15点)

(3) $(w \vee x \vee y \vee z)(w \vee x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(w \vee \bar{x} \vee y \vee \bar{z})(w \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{w} \vee \bar{x} \vee y \vee z)(\bar{w} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{w} \vee x \vee y \vee \bar{z})(\bar{w} \vee x \vee \bar{y} \vee z)$ (15点)

解答

- (1) $F(x, y, z) = xy \vee \bar{x}\bar{z} \vee yz$ と置き、その双対関数 $F_d(x, y, z)$ を求めると、

$$\begin{aligned} F_d(x, y, z) &= \overline{F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \\ &= \overline{(\bar{x}\bar{y}) \vee (\bar{x}z) \vee (\bar{y}\bar{z})} \\ &= (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{z})(y \vee z) \\ &= (x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee y\bar{z})(y \vee z) \\ &= \bar{x}y \vee y\bar{z} \end{aligned}$$

となるので、 $F(x, y, z)$ と $F_d(x, y, z)$ のそれぞれについて真理値表を書くと、

x	y	z	$F(x, y, z)$	$F_d(x, y, z)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

となる。

従って、 $F(x, y, z)$ は自己双対関数と自己反双対関数のいずれでもないため、線形関数ではない。

(2) $F_d(x, y, z)$ を求めると、

$$\begin{aligned}
 F_d(x, y, z) &= \overline{F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \\
 &= \overline{(\bar{x}\bar{y}\bar{z}) \vee (\bar{x}yz) \vee (x\bar{y}z \vee xy\bar{z})} \\
 &= (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})
 \end{aligned}$$

ここで $A = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)$, $B = (x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})$ とすると

$$\begin{aligned}
 A &= \bar{x} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z \vee \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{z} \vee z\bar{z} \\
 &= \bar{x} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z} \\
 B &= x \vee xy \vee x\bar{z} \vee x\bar{y} \vee y\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xz \vee yz \vee z\bar{z} \\
 &= x \vee \bar{y}\bar{z} \vee xz
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 F_d(x, y, z) &= (\bar{x} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z})(x \vee \bar{y}\bar{z} \vee xz) \\
 &= x\bar{x} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{x}z \vee x\bar{y}z \vee \bar{y}z\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee y\bar{y}\bar{z} \vee xyz\bar{z} \\
 &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}
 \end{aligned}$$

従って、 $F(x, y, z)$ は自己双対関数となるが、線形関数であるとはまだ言えない。 $F(x, y, z)$ をリードミューラー展開する

x	y	z	$F(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

上の真理値表より、

$$\begin{aligned}
 F(x, y, z) &= xyz \cdot 0 \oplus xy \cdot 0 \oplus yz \cdot 0 \oplus xz \cdot 0 \oplus x \cdot 1 \oplus y \cdot 1 \oplus z \cdot 1 \oplus 1 \\
 &= x \oplus y \oplus z \oplus 1
 \end{aligned}$$

よって線形関数である。

(3) 与式を $F(w, x, y, z) = wF(1, x, y, z) \vee \bar{w}F(0, x, y, z)$ を使って変形すると、

$$\begin{aligned}
 &w\{(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)\} \vee \\
 &\bar{w}\{(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)\}
 \end{aligned}$$

同様にして

$$= w\{x(y \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee \bar{x}(y \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z)\} \vee \\ \bar{w}\{x(y \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z) \vee \bar{x}(y \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})\}$$

$$= w\{x(y\bar{z} \vee \bar{y}z) \vee \bar{x}(yz \vee \bar{y}\bar{z})\} \vee \bar{w}\{x(yz \vee \bar{y}\bar{z}) \vee \bar{x}(y\bar{z} \vee \bar{y}z)\}$$

$y\bar{z} \vee \bar{y}z = y \oplus z, yz \vee \bar{y}\bar{z} = \overline{(y \oplus z)}$ であるから

$$= w\{x(y \oplus z) \vee \bar{x}\overline{(y \oplus z)}\} \vee \bar{w}\{x\overline{(y \oplus z)} \vee \bar{x}(y \oplus z)\}$$

$$= w\{\overline{x \oplus (y \oplus z)}\} \vee \bar{w}\{x \oplus (y \oplus z)\}$$

$$= w \oplus (x \oplus y \oplus z)$$

$$= w \oplus x \oplus y \oplus z$$

と表現できるので、線形関数である。

4. 次の真理値表で表される論理関数を，カルノー図を用いて簡単化し，簡単化された NOT-AND-OR 形式の論理式を示せ. (55 点)

x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	$F(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

尚，ここに定義されていない入力変数値に対する関数値はドントケアとする.

解答

カルノー図

$x_5 \ x_4 \backslash x_3 \ x_2 \ x_1$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	0	1	0	0	0	0	0
01	1	1	*	0	0	0	1	1
11	0	1	1	0	1	1	*	*
10	0	0	*	0	*	1	1	1

以上より，簡単化された論理式は，

$$F(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) = \bar{x}_3 x_2 x_1 \vee x_5 x_3 \vee x_4 \bar{x}_3 x_1 \vee \bar{x}_5 x_4 \bar{x}_2$$

である．