

2013年前期 無線通信システム

第8回 フェージングとダイバーシチ

荒木 純道 <araki@mobile.ee.>
2013年6月12日

講義スケジュール(後半)

	日付	教科書	内容
第8回	6月12日	4.4	フェージングとダイバーシチ
第9回	6月19日	4.6	誤り訂正符号
第10回	6月26日	3.6、4.5	スペクトル拡散とRAKE受信
第11回	7月 3日	3.7	直交周波数分割多重 (OFDM)
第12回	7月10日	6	アクセス制御
第13回	7月17日	7	IEEE802.11a WLAN
第14回	7月24日		予備日
	7月31日		期末試験

2013年6月12日

フェージングとダイバーシチ

2

復習

■ 遅延分散のあるマルチパス伝搬路

$$x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i s(k-i) + n(k)$$

■ 線形等化 (ZF, MMSE)

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} w_i^* x(k-i)$$

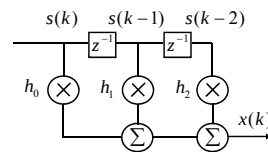
$$\text{ZF: } \mathbf{w}^* = \tilde{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{e}_0 \quad \text{MMSE: } \mathbf{w} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{h}$$

■ 最尤系列推定 (MLSE)

$$\hat{s}(k), \hat{s}(k-1), \hat{s}(k-2) = \arg \min_{\tilde{s}(k), \tilde{s}(k-1), \tilde{s}(k-2)} \left| x(k) - \sum_{i=0}^{\infty} h_i \tilde{s}(k-i) \right|^2$$

■ 周波数領域等化 (FDE)

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{x} \quad \tilde{\mathbf{W}} = \text{diag} \left[1/\tilde{h}_0 \quad 1/\tilde{h}_1 \quad \cdots \quad 1/\tilde{h}_{N-1} \right]$$



2013年6月12日

フェージングとダイバーシチ

3

講義内容

- ・ フェージング伝搬路における誤り率特性
- ・ ダイバーシチの分類
- ・ 最大比合成ダイバーシチ
- ・ 選択ダイバーシチ
- ・ 不等電力ブランチの最大比合成ダイバーシチ
- ・ 空間相関と最大比合成ダイバーシチ

2013年6月12日

フェージングとダイバーシチ

4

フェージング伝搬路における誤り率

ビット誤り率特性

$$P_{\text{eb}}(\gamma) = \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{\gamma}) \quad \gamma = \frac{P|h|^2}{\sigma^2}$$

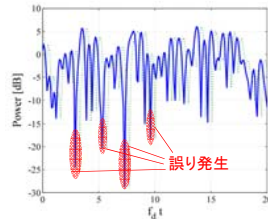
レイリーフェージングチャネル

$$f(\gamma) = \frac{1}{\bar{\gamma}} \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right) \quad \bar{\gamma} = E\left[\frac{P|h(t)|^2}{\sigma^2}\right]$$

平均誤り率特性

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\text{eb}}(\bar{\gamma}) &= \int P_{\text{eb}}(\gamma) f(\gamma) d\gamma \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}}}\right) \end{aligned}$$

フェージング変動特性



微積分の公式

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \\ \frac{d}{dx} \text{erfc}(x) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \\ \int_0^\infty \exp(-ax^2)dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

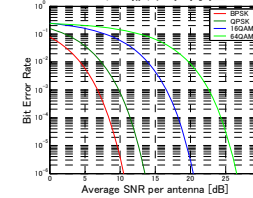
2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

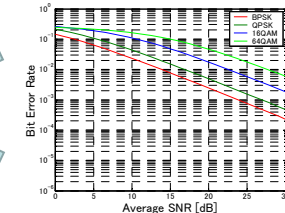
5

フェージング伝搬路における誤り率

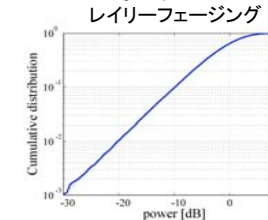
ビット誤り率特性



平均ビット誤り率特性



無線通信システムの最大の問題



2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

6

ダイバーシティの分類

2つ以上の{アンテナ, シンボル, サブキャリア}を用いたフェージング対策技術

空間	アレーアンテナ マルチパス環境で有効	
時間	再送、インターリーブ ドップラ変動環境で有効	
周波数	OFDM 遅延波がある環境で有効	

2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

7

アレー信号処理

受信信号モデル

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_M \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_M \end{bmatrix}$$

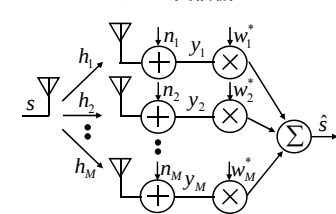
$$\mathbf{y} = \mathbf{h}\mathbf{s} + \mathbf{n}$$

アレーウェイト合成

$$\hat{s} = \mathbf{w}^H \mathbf{y} = \mathbf{w}^H \mathbf{h}\mathbf{s} + \mathbf{w}^H \mathbf{n}$$

$$\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_M]^T$$

アレー受信機



2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

8

最大比合成ダイバーシチ (MRC)

ウェイト合成後受信SNR

$$\gamma = \frac{E[|\mathbf{w}^H \mathbf{h} s|^2]}{E[|\mathbf{w}^H \mathbf{n}|^2]} = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{h}|^2 E[s^2]}{\mathbf{w}^H E[\mathbf{n}\mathbf{n}^H] \mathbf{w}} = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{h}|^2 P}{\mathbf{w}^H E[\mathbf{n}\mathbf{n}^H] \mathbf{w}} = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{h}|^2 P}{\|\mathbf{w}\|^2 \sigma^2}$$

ベクトルの内積

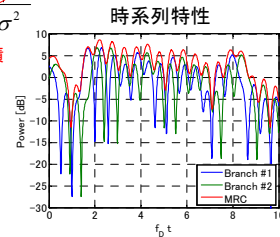
ベクトルの外積

$$E[\mathbf{n}\mathbf{n}^H] = \sigma^2 \mathbf{I}_M \leftarrow \text{雑音は無相関}$$

最大比合成ダイバーシチ
(Cauchy/Schwartz不等式)

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \text{argmax} \gamma = \alpha \mathbf{h}$$

$$\gamma_{\text{opt}} = \frac{|\mathbf{h}|^2 P}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^M |h_i|^2 P}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^M \gamma_i \leftarrow \text{各ブランチのSNRの和}$$



2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

9

確率分布と特性関数

確率変数の和の分布

独立な確率変数 x, y

$$f(x) f(y) \quad f(x, y) = f(x) f(y)$$

$$z = x + y \leftarrow \text{確率変数の和}$$

$$f(z) = \int f(x) f(z-x) dx \leftarrow \text{畳込み積分}$$

確率分布の特性関数

$$f(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \exp(-j\gamma t) d\gamma \longleftrightarrow \varphi(t) = \int_0^{\infty} f(\gamma) \exp(j\gamma t) d\gamma$$

フーリエ変換の公式

$$\gamma = \sum_i \gamma_i \longleftrightarrow \varphi(t) = \prod_i \varphi_i(t)$$

2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

10

最大比合成ダイバーシチの特性

MRC後受信SNR

$$\gamma = \sum_{i=1}^M \gamma_i$$

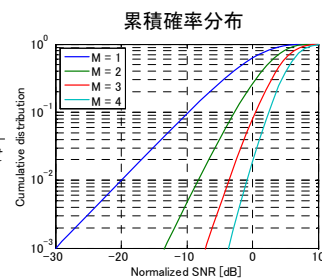
各ブランチの特性関数

$$f(\gamma_i) = \frac{1}{\bar{\gamma}} \exp\left(-\frac{\gamma_i}{\bar{\gamma}}\right) \longleftrightarrow \varphi_i(t) = \frac{1}{1 - j\bar{\gamma}t}$$

MRC後受信SNRの確率分布

$$\varphi(t) = \prod_{i=1}^M \varphi_i(t) = \left(\frac{1}{1 - j\bar{\gamma}t}\right)^M$$

$$f(\gamma) = \frac{1}{(M-1)! \bar{\gamma}^M} \gamma^{M-1} \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right) \leftarrow \text{ガンマ分布 (カイニ乗分布)}$$



2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

11

ダイバーシチオーダー

MRC後受信SNRの確率分布

$$f(\gamma) = \frac{1}{(M-1)! \bar{\gamma}^M} \gamma^{M-1} \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)$$

MRC後受信SNRの累積確率分布

$$\tilde{f}(\gamma) = 1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right) \sum_{i=1}^M \frac{\left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)^{i-1}}{(i-1)!}$$

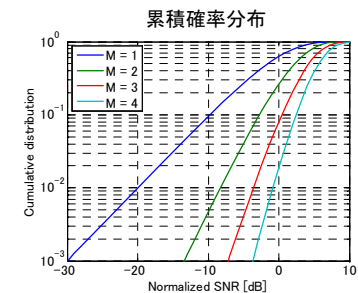
1ブランチ受信

$$\tilde{f}(\gamma) = 1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right) \cong \frac{\gamma}{\bar{\gamma}} + O(\gamma^2)$$

2ブランチダイバーシチ

$$\tilde{f}(\gamma) = 1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right) - \frac{\gamma}{\bar{\gamma}} \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)^2 + O(\gamma^3)$$

ダイバーシチオーダー



2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

12

最大比合成ダイバーシチの誤り率特性

平均誤り率

$$\bar{P}_e(\bar{\gamma}) = \int P_e(\gamma) f(\gamma) d\gamma$$

AWGNにおける誤り率

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma})$$

MRC後受信SNRの確率分布

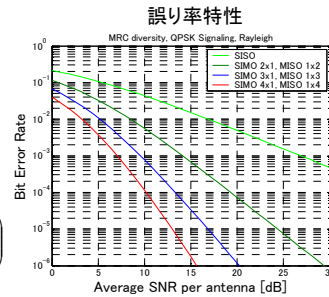
$$f(\gamma) = \frac{1}{(M-1)! \bar{\gamma}^M} \gamma^{M-1} \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)$$

$$\bar{P}_e(\bar{\gamma}) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{1+\bar{\gamma}}}\right)^M \sum_{i=0}^{M-1} \binom{M-1+i}{i} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{1+\bar{\gamma}}}\right)\right)^i$$

2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

13



選択ダイバーシチ (SD) : 受信機1台

選択ダイバーシチ (SD) 後受信SNR

$$\gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M)$$

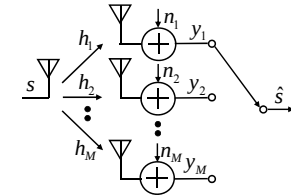
各ブランチのSNRの確率分布

$$f(\gamma_i) = \frac{1}{\bar{\gamma}} \exp\left(-\frac{\gamma_i}{\bar{\gamma}}\right)$$

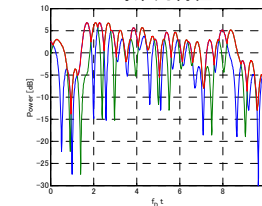
$$\tilde{f}(\gamma_i) = 1 - \exp\left(-\frac{\gamma_i}{\bar{\gamma}}\right)$$

SD後受信SNRの累積確率分布

$$\tilde{f}(\gamma_1, \dots, \gamma_M \leq \gamma) = \prod_{i=1}^M \tilde{f}(\gamma_i \leq \gamma)$$



時系列特性



2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

14

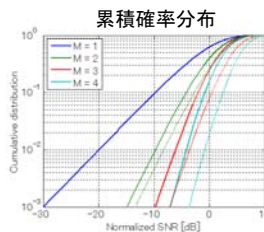
選択合成ダイバーシチ (SD)

SD後受信SNRの累積確率分布

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\gamma_1, \dots, \gamma_M \leq \gamma) &= \prod_{i=1}^M \tilde{f}(\gamma_i \leq \gamma) \\ &= \prod_{i=1}^M \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma_i}{\bar{\gamma}}\right)\right) \\ &= \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)\right)^M \end{aligned}$$

SD後受信SNRの確率分布

$$f(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} \tilde{f}(\gamma) = \frac{M}{\bar{\gamma}} \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)\right)^{M-1}$$



実線: 選択合成、点線: 最大比合成

2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

15

不等電力ブランチのダイバーシチ合成

MRC後受信SNR

$$\gamma = \sum_{i=1}^M \gamma_i$$

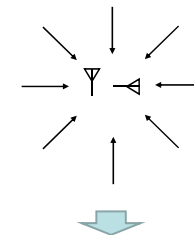
各ブランチSNRの特性関数

$$\bar{\gamma}_i = E[\gamma_i]$$

$$f(\gamma_i) = \frac{1}{\bar{\gamma}_i} \exp\left(-\frac{\gamma_i}{\bar{\gamma}_i}\right) \leftrightarrow \varphi_i(t) = \frac{1}{1 - j\bar{\gamma}_i t}$$

MRC後受信SNRの特性関数

$$\varphi(t) = \prod_{i=1}^M \frac{1}{1 - j\bar{\gamma}_i t}$$



各ブランチの平均SNRは異なる

2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

16

不等電力ブランチのダイバーシチ合成

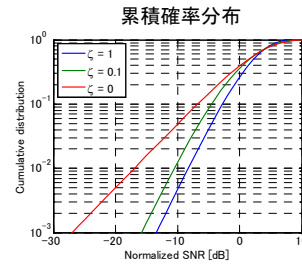
MRC後受信SNRの特性関数

$$\varphi(t) = \prod_{i=1}^M \frac{1}{1 - j\bar{\gamma}_i t}$$

不等電力ブランチMRCの確率分布

$$f(\gamma) = \frac{1}{\prod_{i=1}^M \bar{\gamma}_i} \sum_{i=1}^M \frac{\exp(-\gamma/\bar{\gamma}_i)}{\prod_{k=1, k \neq i}^M (1/\bar{\gamma}_k - 1/\bar{\gamma}_i)}$$

$$\tilde{f}(\gamma) = 1 - \sum_{i=1}^M \frac{\bar{\gamma}_i^{M-1} \exp(-\gamma/\bar{\gamma}_i)}{\prod_{k=1, k \neq i}^M (\bar{\gamma}_i - \bar{\gamma}_k)}$$



$$M = 2 \quad \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 = 2 \quad \zeta = \bar{\gamma}_2 / \bar{\gamma}_1$$

2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

17

有相関ブランチの相関行列

受信信号ベクトルの相関行列

$$\mathbf{R}_y = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^H] = P E[\mathbf{h}\mathbf{h}^H] + \sigma^2 \mathbf{I}_M$$

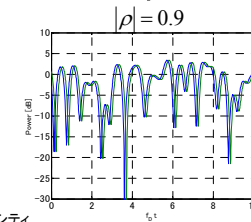
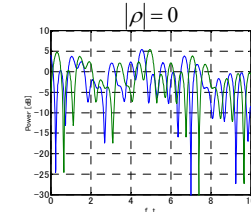
チャネルベクトルの相関行列

$$\mathbf{R}_h = E[\mathbf{h}\mathbf{h}^H] = E \begin{bmatrix} h_1 h_1^* & h_1 h_2^* \\ h_2 h_1^* & h_2 h_2^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{g}_h & 0 \\ 0 & \bar{g}_h \end{bmatrix} \quad \text{無相関ブランチ}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{g}_h & \bar{g}_h \rho \\ \bar{g}_h \rho^* & \bar{g}_h \end{bmatrix} \quad \text{有相関ブランチ}$$

$|\rho|$: ブランチ間の相関係数



2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

18

アンテナ間隔と空間相関

各素波毎のブランチ間位相差

$$h_2^i = h_1^i \exp(j \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \phi)$$

$$= h_1^i \exp(j 2\pi f_D \Delta t \cos \phi)$$

$$\therefore f_D = \frac{v}{\lambda} \quad \Delta t = \frac{d}{v}$$

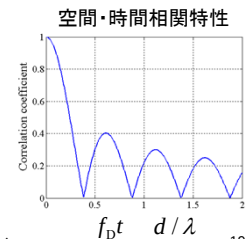
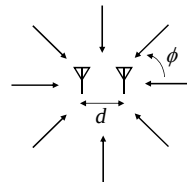
ブランチ間の相関係数

$$\rho(d) = \int_0^{2\pi} S(\phi) \exp(j \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \phi) d\phi$$

$$= J_0 \left(2\pi \frac{d}{\lambda} \right) = J_0(2\pi f_D \Delta t)$$

$$S(\phi) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{電力角度プロファイル}$$

$$J_0(\cdot) \quad \text{0次第1種ベッセル関数}$$



2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

19

固有値展開による等価変換

チャネルベクトルの相関行列

$$\mathbf{R}_h = E[\mathbf{h}\mathbf{h}^H] = \begin{bmatrix} \bar{g}_h & \bar{g}_h \rho \\ \bar{g}_h \rho^* & \bar{g}_h \end{bmatrix}$$

固有値展開

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^H$$

$$\mathbf{E}^H \mathbf{E} = \mathbf{I}_M \quad \text{固有行列}$$

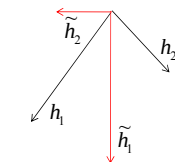
$$\lambda_1 = (1 + |\rho|) \bar{g}_h \quad \lambda_2 = (1 - |\rho|) \bar{g}_h \quad \text{固有値}$$

チャネルベクトルの等価変換

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{E}^H \mathbf{h}$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{h}} = E[\tilde{\mathbf{h}}\tilde{\mathbf{h}}^H] = \mathbf{E}^H \mathbf{R}_h \mathbf{E} = \mathbf{\Lambda} \quad \text{有相関を無相関に等価変換}$$

等価変換のイメージ



2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

20

有相関ブランチのダイバーシチ合成

固有値展開

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^H$$

$$\lambda_1 = (1 + |\rho|) \bar{g}_h \quad \lambda_2 = (1 - |\rho|) \bar{g}_h$$

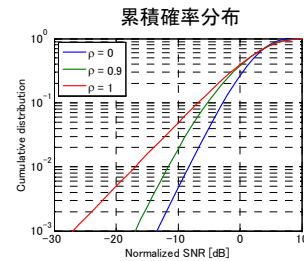
不等電力ブランチ

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{\lambda_1 P}{\sigma^2} = (1 + |\rho|) \bar{\gamma}$$

$$\bar{\gamma}_2 = \frac{\lambda_2 P}{\sigma^2} = (1 - |\rho|) \bar{\gamma}$$

不等電力ダイバーシチと等価

$$f(\gamma) = \frac{1}{2|\rho|\bar{\gamma}} \left[\exp\left(-\frac{\gamma}{(1+|\rho|)\bar{\gamma}}\right) - \exp\left(-\frac{\gamma}{(1-|\rho|)\bar{\gamma}}\right) \right]$$



2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

21

まとめ

■ フェージング伝搬路における誤り率特性

$$P_{\text{ch}}(\gamma) = \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{\gamma}) \quad \Rightarrow \quad \bar{P}_{\text{ch}}(\bar{\gamma}) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{1+\bar{\gamma}}} \right)$$

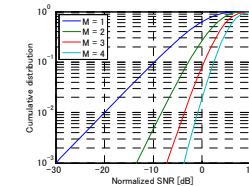
■ 空間ダイバーシチ (アレー信号処理)

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}\mathbf{s} + \mathbf{n}$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{w}^H \mathbf{y} = \mathbf{w}^H \mathbf{h}\mathbf{s} + \mathbf{w}^H \mathbf{n}$$

■ 最大比合成ダイバーシチの特性

$$\gamma_{\text{opt}} = \frac{|\mathbf{h}|^2 P}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^M |h_i|^2 P}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^M \gamma_i^2 \quad \Rightarrow \quad f(\gamma) = \frac{1}{(M-1)! \bar{\gamma}^M} \gamma^{M-1} \exp\left(-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right)$$

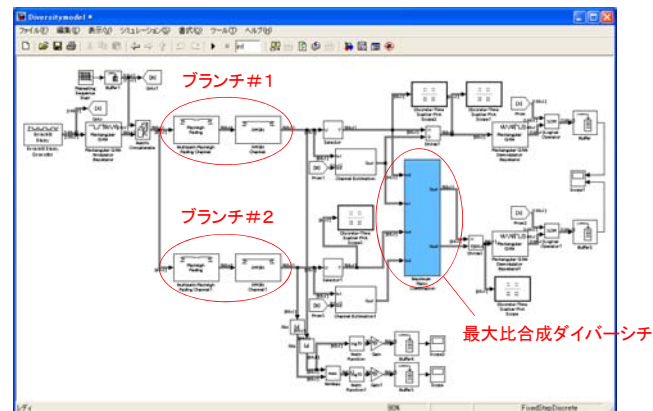


2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

22

デモ



2013年6月12日

フェージングとダイバーシティ

23