

6. 散乱行列による回路表現

6.1 散乱行列の定義

無損失な伝送線路を考える。

$$V(y) = V_i e^{j\beta y} + V_r e^{-j\beta y} = \sqrt{R_c} \left(\frac{V_i}{\sqrt{R_c}} e^{j\beta y} + \frac{V_r}{\sqrt{R_c}} e^{-j\beta y} \right)$$

$$I(y) = \frac{1}{R_c} (V_i e^{j\beta y} - V_r e^{-j\beta y}) = \frac{1}{\sqrt{R_c}} \left(\frac{V_i}{\sqrt{R_c}} e^{j\beta y} - \frac{V_r}{\sqrt{R_c}} e^{-j\beta y} \right) \quad (6.1)$$

ここで、次の量を定義する。(絶対値の二乗が電力に対応する)

$$a(y) = \frac{V_i}{\sqrt{R_c}} e^{j\beta y} \rightarrow |a(y)|^2 = \frac{|V_i|^2}{R_c} : \text{入射電力}$$

$$b(y) = \frac{V_r}{\sqrt{R_c}} e^{-j\beta y} \rightarrow |b(y)|^2 = \frac{|V_r|^2}{R_c} : \text{反射電力}$$

$$V(y) = \sqrt{R_c} (a(y) + b(y)) \quad (6.2.a)$$

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{R_c}} (a(y) - b(y)) \quad (6.2.b)$$

$$a(y) = \frac{V(y) + R_c I(y)}{2\sqrt{R_c}} \quad (6.3.a)$$

$$b(y) = \frac{V(y) - R_c I(y)}{2\sqrt{R_c}} \quad (6.3.b)$$

$a(y)$ 及び $b(y)$ を用いて 2 開口 (4 端子) 回路を表現する。

$$a_1(y) = \frac{V_1(y) + R_{c1} I_1(y)}{2\sqrt{R_{c1}}}$$

$$b_1(y) = \frac{V_1(y) - R_{c1} I_1(y)}{2\sqrt{R_{c1}}}$$

$$a_2(x) = \frac{V_2(x) + R_{c2} I_2(x)}{2\sqrt{R_{c2}}}$$

$$b_2(x) = \frac{V_2(x) - R_{c2} I_2(x)}{2\sqrt{R_{c2}}}$$

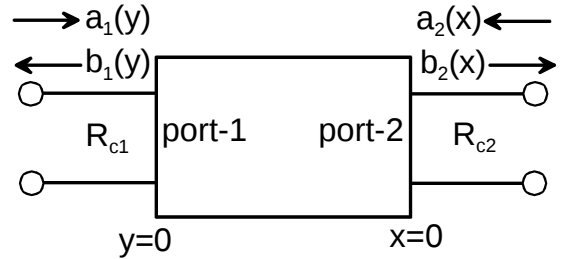


Fig.6.1 2 開口回路における a_i , b_i

観測する位置 y 、 x によって $a(y)$ 、 $b(y)$ の位相が変わるので、ポートごとに適当な参照面でこれらの量を定める。

- ・ 2 開口回路を記述するために参照面の位置を $y = 0$ (port-1)、 $x = 0$ (port-2) とする
- ・ 反射波 $b_1(0) = b_1$ 、 $b_2(0) = b_2$ は入射波 $a_1(0) = a_1$ 、 $a_2(0) = a_2$ によって定まる

反射波は入射波によって、次のように表すことができる。

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \quad (6.4.a)$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \quad (6.4.b)$$

これを行列表現すれば、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$$

S : 散乱行列。対角要素は各開口における反射、非対角要素は対応する開口間の伝達を表す。

- ・ 任意の線形、受動、時不変回路は散乱行列を用いて記述することができる。
- ・ 3 開口以上の多開口回路も同様。

6.2.回路の無損失性

入力電力は次式で表される。

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2 = (a_1^*, a_1^*, \dots, a_n^*) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} \quad (6.6)$$

$\tilde{\mathbf{a}}$: transpose conjugate of $\mathbf{a}$

回路が無損失のとき入力電力と出力電力は等しいから、

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{b}}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{S}}$$

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{b}}\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S}\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S})\mathbf{a} = 0$$

$$\therefore \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{S} = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{I} \quad (6.7)$$

すなわち、無損失回路の散乱行列 $\mathbf{S}$ はユニタリ行列になる。

6.3.回路の可逆性

$$\left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} \\ \therefore S_{21} = S_{12} \quad (6.8)$$

一般に、 n 開口回路が可逆回路の場合 $S_{ij} = S_{ji}$ となる。すなわち散乱行列 $\mathbf{S}$ は対称行列になる。

6.4.散乱行列と伝達行列

伝達行列を次のように定義する。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

一方、散乱行列の定義(9.5)から、

$$a_1 = \frac{1}{S_{21}} b_2 - \frac{S_{22}}{S_{21}} a_2 \\ b_1 = \frac{S_{11}}{S_{21}} b_2 + \left(S_{12} - \frac{S_{11}S_{22}}{S_{21}} \right) a_2$$

式(6.9)と比較して、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{1}{S_{21}} \\
T_{12} &= -\frac{S_{22}}{S_{21}} \\
T_{21} &= \frac{S_{11}}{S_{21}} \\
T_{22} &= S_{12} - \frac{S_{11}S_{22}}{S_{21}}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

回路を縦続接続する場合は、伝達行列で表現する方が適している。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_1 \begin{pmatrix} b_2' \\ a_2' \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} b_2' \\ a_2' \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_2 \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
\therefore \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

6.5. 散乱行列の求め方

6.5.1 整合終端

開口 2 側に $Z_{L2} = R_{c2}$ なる整合負荷を接続すると、 $a_2 = 0$ となるので、

$$b_1 = S_{11}a_1 \rightarrow S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} \tag{6.12.a}$$

$$b_2 = S_{21}a_1 \rightarrow S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \tag{6.12.b}$$

同様に、整合負荷によって $a_1 = 0$ とすれば、

$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} \tag{6.13.a}$$

$$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} \tag{6.13.b}$$

6.5.2 Deshamp の方法

開口 2 側の負荷インピーダンスが Z_{L2} のとき、負荷での反射係数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{a_2}{b_2} = \frac{Z_{L2} - R_{c2}}{Z_{L2} + R_{c2}} \\
\frac{b_2}{a_1} &= \frac{a_2}{S_2 a_1} = S_{21} + S_{22} \frac{a_2}{a_1} \rightarrow \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{1}{S_2} - S_{22} \right) = S_{21} \\
\frac{a_2}{a_1} &= \frac{S_{21}S_2}{1 - S_{22}S_2} \\
S_1 &= \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + S_{12} \frac{a_2}{a_1} = \frac{S_{11} + (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})S_2}{1 - S_{22}S_2}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

S_1 を S_2 の関数として表現する（複素関数の一次変換）

S_2 を既知の円周上で変化させ、対応する S_1 を測定する。（ S_1 の軌跡も円になる）

⇒ 円の中心、半径、対応する点の関係などから複素定数 S_{ij} ($i, j=1,2$)を求めることができる。

特に、 Z_{L2} を可変短絡版で形成すると、 $S_2 = -\exp(-2j\beta x)$ と表される。

$$(1 - S_{22}S_2)S_1 = S_{11} + (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})S_2$$

$$((S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22}) + S_{22}S_1)S_2 = S_1 - S_{11}$$

$$S_2 = \frac{S_1 - S_{11}}{S_{22}S_1 + (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})} \quad (6.15)$$

$|S_2|=1$ より、 $S_2\bar{S}_2 - 1 = 0$ に代入して

$$(1 - S_{22}\bar{S}_2)S_1\bar{S}_1 - ((S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})\bar{S}_2 + S_{11})\bar{S}_1 - ((S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})S_{22} + \bar{S}_{11})S_1 + (S_{11}\bar{S}_{11} - (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})(\overline{S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22}})) = 0 \quad (6.16)$$

一般に、複素数 z に対して、 $z\bar{z} - B\bar{z} - \bar{B}z + C = 0$ は中心 B 、半径 $\sqrt{B\bar{B} - C}$ の円を表す。式(6.16)から、 S_1 の軌跡は円であり、その中心、半径はそれぞれ次のようになる。

$$\text{中心} = \frac{D\bar{S}_{22} + S_{11}}{1 - S_{22}\bar{S}_{22}} = \frac{S_{12}S_{21}\bar{S}_{22}}{1 - S_{22}\bar{S}_{22}} + S_{11} \quad (6.17.a)$$

$$\text{半径} = \frac{\sqrt{|D\bar{S}_{22} + S_{11}|^2 - (1 - S_{22}\bar{S}_{22})(S_{11}\bar{S}_{11} - D\bar{D})}}{1 - S_{22}\bar{S}_{22}} = \frac{|S_{12}S_{21}|}{1 - S_{22}\bar{S}_{22}} \quad (6.17.b)$$

ただし、 $D = (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})$

短絡板の位置 x を変化させると S_2 は単位円上を移動する。→ S_1 の軌跡(円)を測定することによって、円の中心、半径が求まる。 $S_2 = \pm 1$ に対する S_1 の値 $S_1 = \frac{S_{11} \pm (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22})}{1 \mp S_{22}}$ を含む、適

当な S_2 に対する S_1 の値から行列 $[S]$ の要素を決定することができる。

[付録] 複素平面における円の表現

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (6.18)$$

で、 $z = S_2$ 、 $w = S_1$ と考えると、

$$ad - bc = (S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22}) - S_{11}(-S_{22}) = S_{12}S_{21}$$

であるから $ad - bc \neq 0$ は $S_{12}S_{21} \neq 0$ に対応する。

[円・円一次変換]

z が中心 z_0 、半径 r の円上を移動するとすれば、

$$|z - z_0| = r$$

$$z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0z + |z_0|^2 = r^2$$

したがって、一般に円の方程式は、 $Az\bar{z} - B\bar{z} - \bar{B}z + C = 0$ (A, C は実数) と表せる。

$$z_0 = \frac{B}{A}, \quad r = \sqrt{\frac{B\bar{B} - AC}{A^2}}$$

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \text{ より } z = \frac{dw - b}{a - cw}$$

$Az\bar{z} - B\bar{z} - \bar{B}z + C = 0$ に代入すると、

$$(Add + B\bar{d}c + \bar{B}d\bar{c} + Cc\bar{c})w\bar{w} - (Ab\bar{d} + Ba\bar{d} + \bar{B}b\bar{c} + Ca\bar{c})\bar{w} - (A\bar{b}d + \bar{B}a\bar{d} + B\bar{b}c + C\bar{a}c)w + (Abb + Ba\bar{b} + \bar{B}a\bar{b} + Ca\bar{a}) = 0$$

つまり $A_1w\bar{w} - B_1\bar{w} - \bar{B}_1w + C_1 = 0$ なる円の方程式になる。

ここで、

$$A_1 = Add + (B\bar{d}c + \bar{B}d\bar{c}) + Cc\bar{c}$$

$$C_1 = Abb + (Ba\bar{b} + \bar{B}a\bar{b}) + Ca\bar{a}$$

はいずれも実数であり、

$$B_1\bar{B}_1 - A_1C_1 = (B\bar{B} - AC)|ad - bc|^2 > 0$$

である。

$$w \text{ の円の中心} = \frac{B_1}{A_1}, \text{ 半径} = \sqrt{\frac{B_1\bar{B}_1 - A_1C_1}{A_1^2}}$$