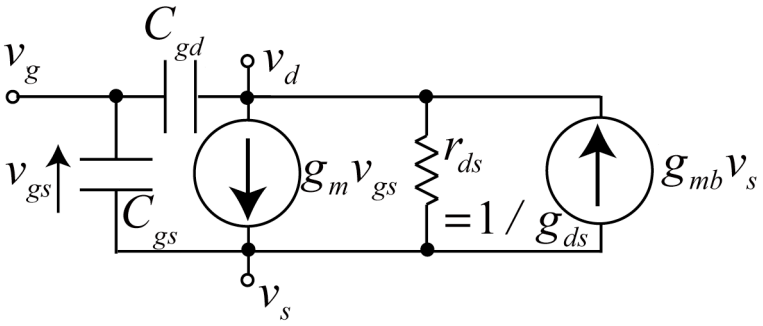
第 6 回メモ

さて、前回までは、トランジスタの小信号等価回路は、抵抗と電流源だけから成り立っていた。実際は、高周波になると容量などを考慮に入れる必要が有る。そこで、今回は、増幅回路の周波数特性を見ていこう。

まず MOSFET の一般的な高周波等価回路の一例を示そう。

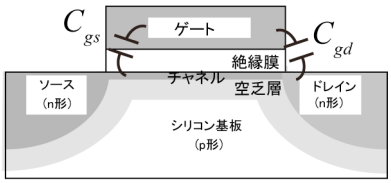


いままでどの違いは、コンデンサを二つ入れたことである。

C_{gs} :ゲートソース間容量

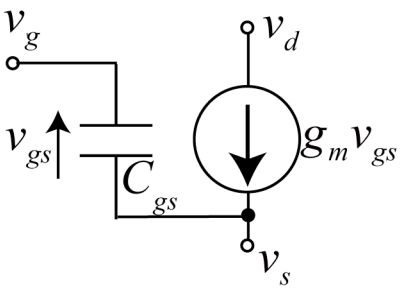
C_{gd} :ゲートドレイン間容量

である。



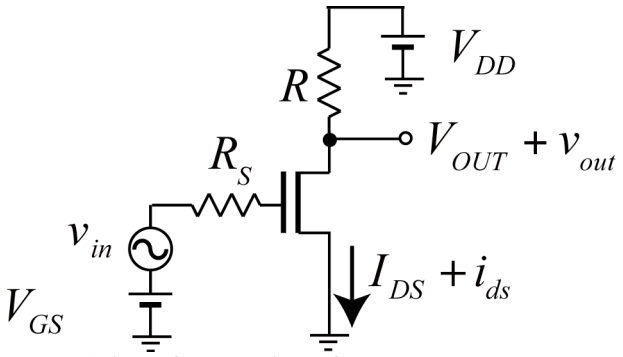
他にも基板との容量もあるし、端子とコンデンサ/電源の間には抵抗もあったりするが、ここでは無視する。

中でも、最も大きく、かつ MOSFET の動作の基本となる容量は C_{gs} である。また、トランジスタ動作の最も本質となるのは、$g_m v_{gs}$ の電流源である。そこで、この二つのみを残した最も簡単化した等価回路で考えよう。

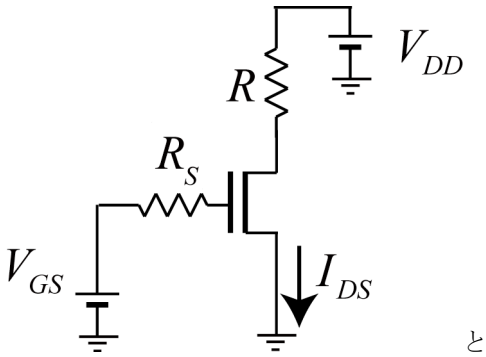


さて、この小信号等価回路を使って解析を行おう。

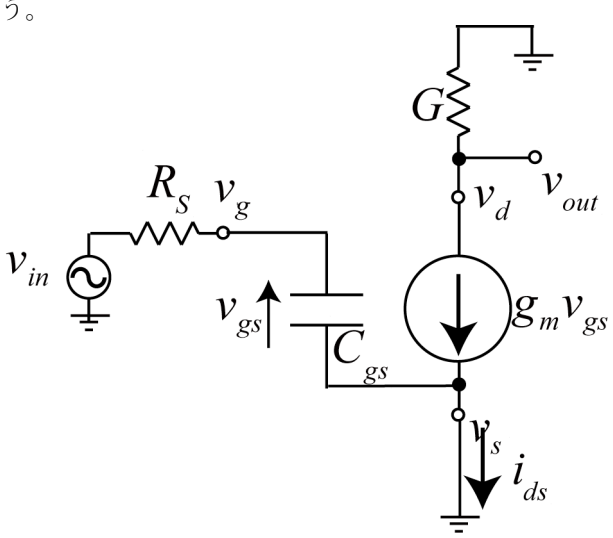
まず信号源に内部インピーダンスを考慮したときのソース接地回路で考える。



これを大信号成分と小信号成分に分けよう。



と

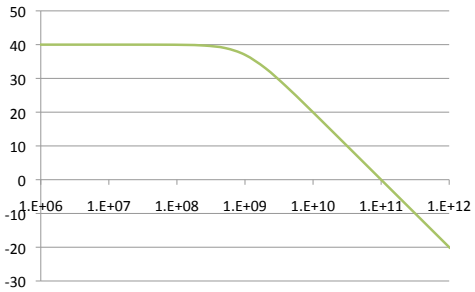


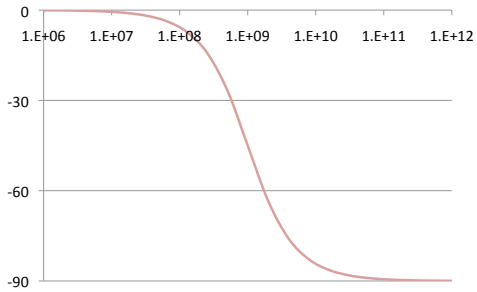
となる。ここで、$v_g = \dfrac{\frac{1}{j\omega C_{gs}}}{R_S + \frac{1}{j\omega C_{gs}}} v_{in}$ であり、かつ $v_{out} = -\dfrac{g_m}{G} v_g$ なので、

$A_V = -\dfrac{v_{out}}{v_{in}} = -\dfrac{g_m}{G}\dfrac{1}{1+j\omega C_{gs}R_S}$ となる。ここで、周波数特性を描けるようになった。

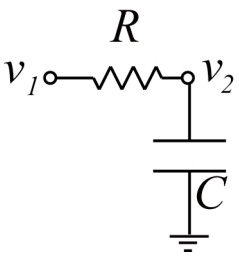
一般に伝達特性の周波数特性をボード線図（ボード図、ボーデ図）と呼び、利得(=絶対値)線図と位相線図の組み合わせで用いられる。通常、周波数は対数軸とし、利得は対数値、位相はリニアである。利得の対数値は通常デジベルで表し、電圧・電流の場合は、10 倍が 20dB に相当する。

従って、$\dfrac{g_m}{G} = 100$、$C_{gs}R_S = 10^{-9}$ として図を描くと次の様になる。





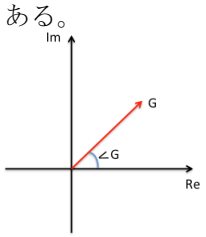
この特性は、CR 回路のみで決まっており、その意味では、回路理論で習ったフィルタ特性と同じである。下の CR 回路のみだと伝達特性は $\dfrac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\dfrac{1}{1+j\omega CR}$ となる。



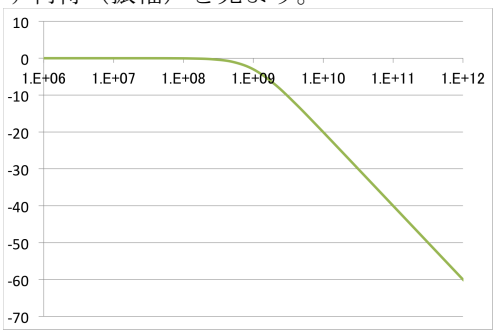
ここで、これを $G(j\omega)=\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{1}{1+j\omega CR}$ とすれば、

$G(j\omega)=|G(j\omega)|exp(j\angle G(j\omega))$ と書ける。利得 $|G(j\omega)|$ であり、位相 $\angle G(j\omega)$ を考える。

ここで、$|G(j\omega)|=\sqrt{Re(G(j\omega))^2+Im(G(j\omega))^2}$ であり、$\angle G(j\omega)=tan^{-1}\dfrac{Im(G(j\omega))}{Re(G(j\omega))}$ である。



まず利得（振幅）を見よう。



横軸は ω_1 のみにする

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}=\frac{1-j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

$\omega >> \omega_1$のとき、$\left|G(j\omega)\right| \simeq \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} = \dfrac{\omega_1}{\omega}$

$20\,log_{10}\left|G(j\omega)\right| \simeq 20\,log_{10}\left|\dfrac{\omega_1}{\omega}\right|$

（周波数 10 倍で-20dB　-20dB/dec　　周波数 2 倍で-6dB　-6dB/oct）

$\omega << \omega_1$のとき、$\left|G(j\omega)\right| \simeq 1$

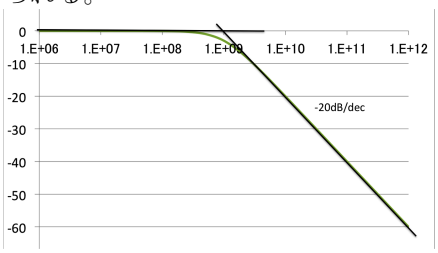
$20\,log_{10}\left|G(j\omega)\right| \simeq 0$

$\omega = \omega_1$のとき、$\left|G(j\omega)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$20\,log_{10}\left|G(j\omega)\right| \simeq 10\,log_{10}\dfrac{1}{2}$　（-3dB）

$\omega = \omega_1$のときの近傍で形が明瞭に変わる。

$G(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega CR}$という形を$\tau = CR$, $s = j\omega$とすれば$G(s) = \dfrac{1}{1+s\tau}$となることから判るように、これは回路理論で習った極である。

利得は、極までは、ほぼ一定であり、そこからは周波数が 10 倍になる毎に-20dB 落ちていく(-20 dB/dec)特性である。極を直線の接続点として、2 本の直線で利得を表す骨格ボード線図も用いられる。



つぎに位相$\angle G(j\omega)$を考える。

ここで$\omega_1 = \dfrac{1}{CR}$とすると、$G(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}} = \dfrac{1-j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$となる。

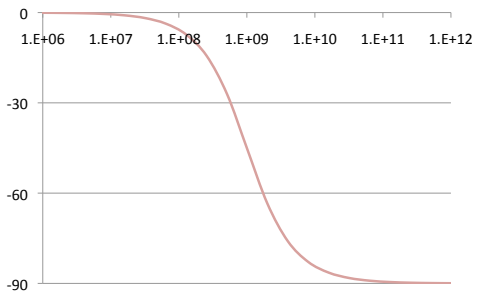
$$\angle G(j\omega) = tan^{-1}\frac{Im(G(j\omega))}{Re(G(j\omega))} = tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{\omega_1}\right) = -tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$$

$\omega = 0$のとき、$\angle G(j\omega) = 0$

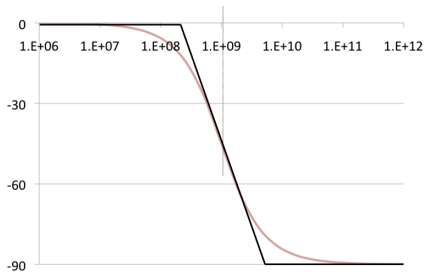
$\omega = \omega_1$のとき、$tan\,45 = 1$だから$\angle G(j\omega) = -45^o$

$\omega >> \omega_1$のとき、$\angle G(j\omega) = -90^o$

$20\,log_{10}\left|G(j\omega)\right| \simeq 0$



また、極の近傍では、位相はほぼ-45 度だが、それより低いところでは 0 に、それより高いところでは-90 度に近似していく。そこで 3 本の直線で表す位相の骨格ボード線図も用いられる。



黒い線が骨格ボード線図である。

蛇足部

ここで、極での漸近線を求めよう。周波数は規格化して $\omega_1 = 1$ とし、x は横軸とすると、

$\omega = 10^x = e^{x\log 10}$ であり、$\dfrac{\partial\omega}{\partial x} = \log 10 \bullet \omega$

$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\omega$ なので、$\dfrac{\partial}{\partial\omega}\angle G(j\omega) = -\dfrac{1}{1+\omega^2}$

$\dfrac{\partial}{\partial x}\angle G(j\omega) = -\dfrac{\omega}{1+\omega^2}\log 10$　$\omega = 1$（$x=0$）では、$-\dfrac{1}{2}\log 10$

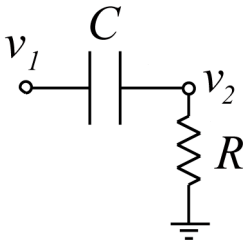
従って漸近線は $-\dfrac{1}{2}\log 10x - \dfrac{\pi}{4}$ になる。ここで、0 になるのは、$-\dfrac{1}{2}\log 10x = \dfrac{\pi}{4}$

そこで、$x = -\dfrac{\pi}{2\log 10}$ のときであり、このときの $10^{\frac{x}{\log 10}} = e^x$ なので、

$\omega_1 = 10^{-\frac{\pi}{2\log 10}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ である。$e^{\frac{\pi}{2}} = 4.8$ なので、ざっくり周波数が極の 1/5 のところから、周波数が 5 倍のところへ直線を引くと漸近線になる。

さて CR 回路で CR を逆にすると伝達特性は $G(j\omega) = \dfrac{R}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \dfrac{j\omega CR}{j\omega CR + 1} = \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$ となる。

ただし $\omega_1 = \dfrac{1}{CR}$ である。



$\omega << \omega_1$ のとき、$G(j\omega) \simeq \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1} = j\dfrac{\omega}{\omega_1}$

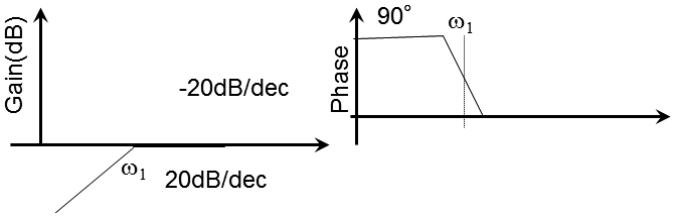
$20\,log_{10}\left|G(j\omega)\right| \simeq 20\,log_{10}\left|\dfrac{\omega}{\omega_1}\right|$ 20dB/dec の傾き。

$\angle G(j\omega) = tan^{-1}(\dfrac{\dfrac{\omega}{\omega_1}}{0}) = 90^o$

$\omega = \omega_1$ のとき、$G(j\omega) = \dfrac{j}{1+j}$ $\quad 20\,log_{10}\left|G(j\omega)\right| = 20\,log_{10}1/\sqrt{2}$ $\quad \angle G(j\omega) = 45^o$

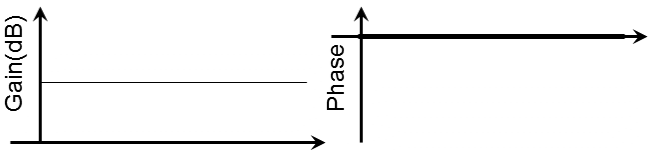
$\omega >> \omega_1$ のとき、$G(j\omega) \simeq 1$ $\quad 20\,log_{10}\left|G(j\omega)\right| \simeq 0$ $\quad \angle G(j\omega) = 0$

骨格図は次のようになる。



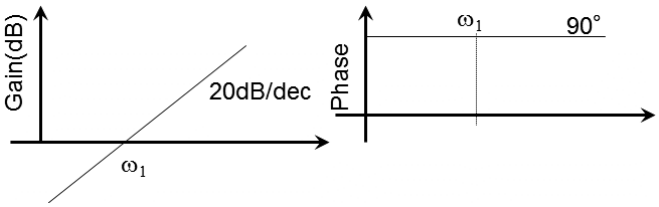
さて、他にどのような伝達関数だとボード線図がどのようになるか見よう。

例えば抵抗の電流を入力、電圧を出力と見れば伝達関数は $G(\omega) = k$ となり、



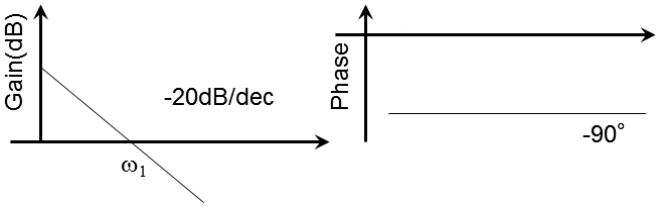
となる。

例えばインダクタの電流を入力、電圧を出力と見れば伝達関数は $G(\omega) = \dfrac{j\omega}{\omega_1}$ となり、



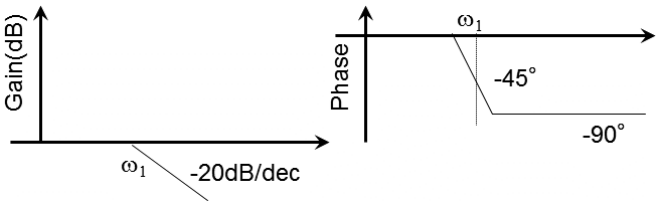
となる。

コンデンサの電流を入力、電圧を出力と見れば伝達関数は $G(\omega)=\dfrac{\omega_1}{j\omega}$ となり、



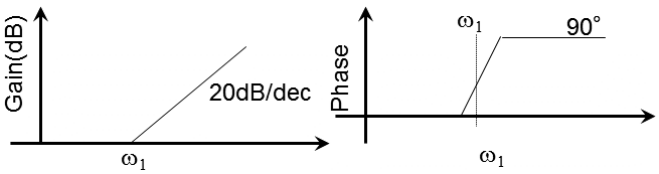
となる。

伝達関数が $G(\omega)=\dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$ ならば



となり、

伝達関数が $G(\omega)=1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}$ ならば



となる。

また、$G(\omega)=\dfrac{1}{k+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$ では、$G(\omega)=\dfrac{1}{k}\dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{k\omega_1}}$ と変形して考えよう。

さて、二つの異なる CR 時定数を持つ回路を合成しよう。

$$G(j\omega)=G_1(j\omega)G_2(j\omega)$$

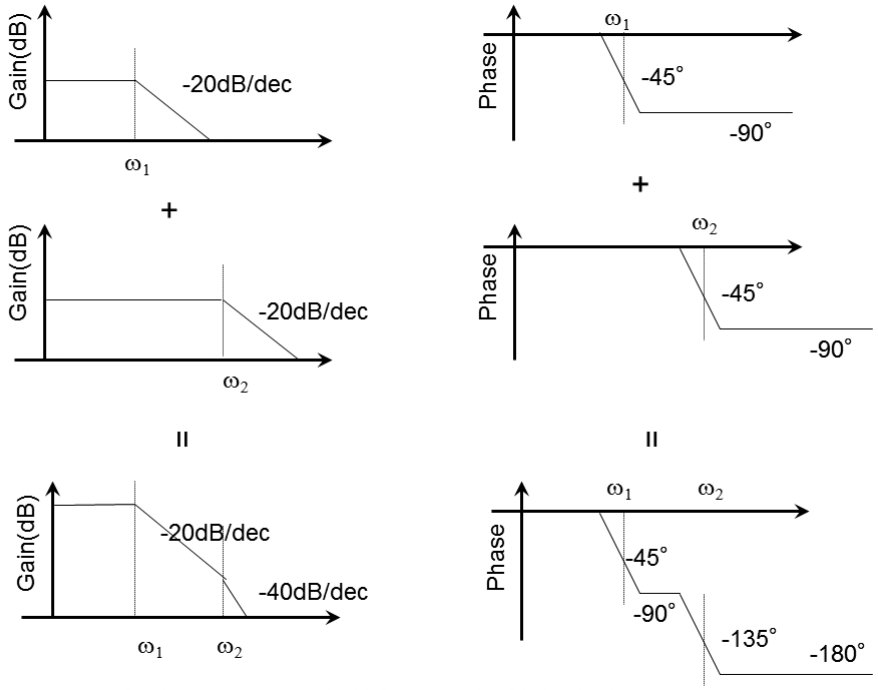
$$=\left|G_1(j\omega)\right|exp(j\angle G_1(j\omega))\bullet\left|G_2(j\omega)\right|exp(j\angle G_2(j\omega))$$

従って、$\left|G(j\omega)\right|=\left|G_1(j\omega)\right|\bullet\left|G_2(j\omega)\right|$

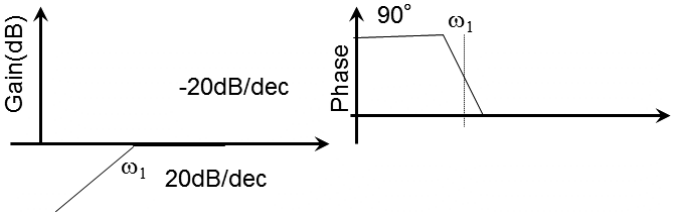
$$20log_{10}\left|G(j\omega)\right|=20log_{10}\left|G_1(j\omega)\right|+20log_{10}\left|G_2(j\omega)\right|$$

$$\angle G(j\omega)=\angle G_1(j\omega)+\angle G_2(j\omega)$$

従って骨格図で描くと、



そこで、さきほど行った $G(\omega)=\dfrac{1}{1+\dfrac{\omega_1}{j\omega}}$ は、$G(\omega)=\dfrac{1}{1+\dfrac{\omega_1}{j\omega}}=\dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$ なので、2 番目と 4 番目の合成とみることもできる。



となる。