モデル化と OR（確率モデル）：参考資料

2013 年度前期：担当 小沢

この資料は，マルコフ連鎖，待ち行列理論，シミュレーションについて基本事項をまとめたものであり，以下の授業で用いる．

- 4 月 19 日 (金)，26 日 (金) マルコフモデル：1 節「確率過程」，2 節「離散時間マルコフ連鎖」
- 4 月 30 日 (火)，5 月 10 日 (金) 待ち行列モデル：3 節「連続時間マルコフ連鎖」(待ち行列モデルの解析には連続時間マルコフ連鎖を用いる)，4 節「待ち行列理論」(5 節「待ち行列ネットワーク」)
- 7 月 5 日 (金) シミュレーション：6 節「シミュレーション」

2 節「 離散時間マルコフ連鎖」と 3 節「連続時間マルコフ連鎖」では証明を省略した (証明を含めた詳しい説明は http://www.komazawa-u.ac.jp/~toshi/teaching/ の「マルコフ連鎖 (pdf)」にある).

目 次

1 確率過程

時間とともに不規則に変動するシステムの挙動を表す数学モデルとして次の確率過程を考える．

定義 1.1 （確率過程） $\mathcal{T}$ をパラメータ空間とし，$t \in \mathcal{T}$ に対して確率変数 X_t が定義されているとする．この時，確率変数の族 $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ を確率過程 *(stochastic process)* という．

- 通常，パラメータとしては時間を考える．時間が整数値を取る場合を離散時間確率過程，実数値を取る場合を連続時間確率過程という．
- 基礎になる確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とし，$\omega \in \Omega$ に対して $\{X_t(\omega), t \in \mathcal{T}\}$ を標本関数 (sample path) という．
- 確率過程 $\{X_t\}$ の確率的構造は，任意個の時点の組に対して次の同時分布で与えられる．

$$F(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = P(X_{t_1} \le x_1, X_{t_2} \le x_2, ..., X_{t_n} \le x_n) \tag{1.1}$$

定義 1.2 （定常過程） 時間をずらしても同時分布が変化しない確率過程を定常過程 *(stationary process)* または強定常過程という．すなわち，任意個の時点の組と任意の h に対して，

$$F(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = F(x_1, x_2, ..., x_n; t_1 + h, t_2 + h, ..., t_n + h) \tag{1.2}$$

が成り立つ場合をいう．

- 可算個の要素を持つ状態空間 S (X_t の取る値の集合) を考える．定常過程では，状態確率 $p_i = P(X_t = i)$, $i \in S$, が時点によらず不変となる．その意味で $\boldsymbol{p} = (p_i,\ i \in S)$ を定常分布という．また，$\lim_{t\to\infty} P(X_t = i)$ を（もし存在すれば）極限確率という．ある条件を満たすマルコフ連鎖では，極限分布が定常分布に一致することもあって，定常分布を用いてシステムの評価をすることが多い．

2 離散時間マルコフ連鎖

ここではマルコフ性を持つ離散時間確率過程に関する基本事項をまとめる．マルコフ性とは，将来におけるシステムの確率的挙動が現在の状態のみに依存し，過去の状態とは独立である性質を指す．この性質は，対象とする確率過程の数学的な扱いを容易にするとともに，コンピュータを用いた数値計算を可能とする．以下，可算集合 S （特に断らない限りは $S = \{0, 1, ...\}$）を状態空間とし，時間を離散（$\mathcal{T} = \{0, 1, ...\}$）とした確率過程 $\{X_n\}_{n\ge0}$ について考えていく．

2.1 諸概念

2.1.1 離散時間マルコフ連鎖

定義 2.1 （離散時間マルコフ連鎖） 離散時間確率過程 $\{X_n\}$ が，任意の $n \geq 0$ と 任意の $i_0, ..., i_{n+1} \in S$ に対して

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n) \tag{2.3}$$

を満たすとき，$\{X_n\}$ を離散時間マルコフ連鎖 *(discrete-time Markov chain)* という．また，この性質を**マルコフ性** *(Markov property)* という．さらに，右辺の確率が時点 n に依存しない場合を**斉時的** *(time homogenous)* といい，$\{X_n\}$ を**斉時的なマルコフ連鎖** *(time-homogeneous Markov chain, HMC と略記)* という．

- 以下では，HMC についてのみ考えていく．

定義 2.2 （確率行列，確率ベクトル） $\boldsymbol{O}$ を要素が全て 0 の行列，$\boldsymbol{0}$ を要素が全て 0 の列ベクトル，$\boldsymbol{e}$ を要素が全て 1 の列ベクトルとする．行列 $\boldsymbol{P}$ で $\boldsymbol{P} \geq \boldsymbol{O}$ かつ $\boldsymbol{Pe} = \boldsymbol{e}$ であるものを確率行列 *(stochastic matrix)*，行ベクトル $\boldsymbol{a}$ で $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{ae} = 1$ であるものを確率ベクトル *(stochastic vector)* という[1]．(行列，ベクトルとも次元が可算無限の場合を含めて考える．)

定義 2.3 （推移確率行列） *HMC* $\{X_n\}$ について，

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \,|\, X_0 = i)$$

を状態 i から j への n ステップ推移確率 *(n-step transition probability)* という．また，確率行列 $\boldsymbol{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$ を n ステップ推移確率行列 *(n-step transition probability matrix)* という．(ここで，$\boldsymbol{P}^{(0)} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{(1)}$ とする．)

- マルコフ連鎖の状態推移は推移図にしてみると分かり易い．

定理 2.1 （チャップマン・コルモゴロフの等式; Chapman-Kolmogorov equation）
HMC では，任意の $m, n, k \geq 0$ と任意の $i, j \in S$ に対して，

$$p_{ij}^{(n+k)} = \sum_{\ell \in S} p_{i\ell}^{(n)} p_{\ell j}^{(k)} \tag{2.4}$$

が成り立つ．(行列表現は $\boldsymbol{P}^{(n+k)} = \boldsymbol{P}^{(n)}\boldsymbol{P}^{(k)}$)

- チャップマン・コルモゴロフの等式より，HMC に対しては $\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^n$ である．
- また，確率ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_i)$, $a_i = P(X_0 = i)$ を初期分布 (initial distribution)，確率ベクトル $\boldsymbol{a}(n) = (a_i(n))$, $a_i(n) = P(X_n = i)$, を時点 n での状態分布とすると，

  $$\boldsymbol{a}(n) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{P}^n$$

  となる．また，同時分布は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{P}^n$ の要素を用いて書けることから，HMC の確率法則は初期分布 $\boldsymbol{a}$ と推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ によって決まることが分かる．
- HMC に対する様々な性質（既約性，周期性，再帰性など，後述）は推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ によって決まる場合が多い．以下では，そのような性質に関して HMC と推移確率行列を同一視する．

例 2.1 （工作機械の状態推移）

2 台の工作機械について，適当な時間間隔毎における状態（正常: G，故障: B）の推移を考える．正常に動作している機械が次の時点で故障となる確率を p_{GB}，故障している機械が次の時点で修理されて正常に戻る確率を p_{BG} とする．この確率は機械によらないとし，また，機械の挙動は互いに独立であるとする．この時，両方とも正常である状態を 0，片方が故障している状態を 1，両方故障している状態を 2 とし，これらの状態を値に取る確率過程を $\{X_n\}$ とする．この $\{X_n\}$ は次を推移確率行列とする離散時間 HMC となる．ただし，修理は 2 台同時には行えないものとした．

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} (1-p_{GB})^2 & 2(1-p_{GB})p_{GB} & p_{GB}^2 \\ (1-p_{GB})p_{BG} & (1-p_{GB})(1-p_{BG}) + p_{GB}p_{BG} & p_{GB}(1-p_{BG}) \\ 0 & p_{BG} & 1-p_{BG} \end{pmatrix}$$

[1]本資料では，確率ベクトルを行ベクトル，その他のベクトルを列ベクトルで表すことにする．

例 2.2 （ランダムウォーク）

$\{Z_n\}_{n\geq 1}$ を，-1 または 1 の値を取る独立で同一な分布に従う確率変数列とし，$p = P(Z_1 = 1)$ とする．この時，X_0 を，整数値を取る適当な確率変数として，

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1},\ n \geq 0,$$

で与えられる確率過程 $\{X_n\}$ は離散時間 HMC となり，その推移確率は次で与えられる．

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{if } j = i+1 \\ 1-p & \text{if } j = i-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

例 2.3 （インターネットサーフィン） 次にどのページへ移るかの確率を推移確率に対応させることで，インターネットサーフィンを HMC としてモデル化できる．以下は，ページ数が 10 の場合の推移確率行列の例である．

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

2.1.2 既約性

定義 2.4 （到達可能と相互到達可能） ある $n \geq 0$ が存在して $p_{ij}^{(n)} > 0$ ならば，j は i から到達可能 *(reachable)* であるという．これを $i \to j$ と記述する．さらに，$i \to j$ かつ $j \to i$ ならば i と j は相互到達可能 *(mutually reachable or communicate)* であるという．これを $i \leftrightarrow j$ と記述する．

- $p_{ij}^{(n)} > 0$ ならば，ある $i_1, i_2, ..., i_{n-1} \in S$ が存在して $p_{ii_1}p_{i_1i_2}...p_{i_{n-1}j} > 0$ である．この関係を含め，推移図を有向グラフと考えると到達可能性は容易に理解できる．
- 関係 $\leftrightarrow$ は反射律，対称律，推移律を満たすので同値関係であり，状態空間 S は $\leftrightarrow$ によって同値類に分割される．ひとつひとつの類をクラス (class) という．

定義 2.5 （既約な集合，閉集合，吸収状態） $C \subset S$ が，

(1) 任意の $i, j \in C$ に対して $i \leftrightarrow j$,

(2) 任意の $i \in C$ に対して $\sum_{j\in C} p_{ij} = 1$

の *2* 条件を満たす時，C を既約な集合 *(irreducible set)* という．また，条件 *(2)* のみをみたす場合は C を閉集合 *(closed set)* という．既約な集合が唯一の状態からなる場合，その状態を吸収状態 *(absorbing state)* という．

定義 2.6 （既約なマルコフ連鎖） 状態空間が唯一の既約な集合からなる *HMC* を既約なマルコフ連鎖 *(irreducible Markov chain)* という．そうでない場合，可約 *(reducible)* という．

> **補題 2.1 （状態空間の分割）** *HMC* の状態空間 S はいくつかの既約な集合（クラス）と非既約な集合（既約な集合に含まれない状態の集合）に分割される．

- 例 2.1（工作機械の状態推移）と例 2.2（ランダムウォーク）は既約な HMC である．例 2.3（インターネットサーフィン）の状態空間は 4 つのクラス（$S_1 = \{0, 1, 2\}$, $S_2 = \{3, 4, 5, 6\}$, $S_3 = \{7\}$, $S_4 = \{8, 9\}$）から成り，S_1, S_2, S_3 は既約なクラス，状態 7 は吸収状態である．

2.1.3 周期性

定義 2.7 （周期） 状態 $i \in S$ に対して $d_i = g.c.d.\{n \geq 1 \,|\, p_{ii}^{(n)} > 0\}$ を状態 i の周期 *(period)* という（任意の $n \geq 1$ に対して $p_{ii}^{(n)} = 0$ ならば $d_i = \infty$ とする）．$d_i > 1$ の時，状態 i を周期的 *(periodic)* といい，$d_i = 1$ の時，非周期的 *(aperiodic)* という．

補題 2.2 （周期はクラスの性質）
$(i \leftrightarrow j) \Rightarrow (d_i = d_j)$

- 例 2.1 における工作機械の状態推移の周期は 1，例 2.2 におけるランダムウォークの周期は 2 となる．また，例 2.3（インターネットサーフィン）の状態空間は 4 つのクラス（$S_1 = \{0,1,2\}$, $S_2 = \{3,4,5,6\}$, $S_3 = \{7\}$, $S_4 = \{8,9\}$）から構成されていたが，S_1, S_3, S_4 の周期は 1，S_2 の周期は 2 である．

2.2 定常分布と極限分布

2.2.1 定常分布

定義 2.8 （定常分布） 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ に対して，$\boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi}$ を満たす確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ が存在する時，$\boldsymbol{\pi}$ を $\boldsymbol{P}$，または，それに対応する *HMC* の定常分布 *(stationary distribution)* という．

- 定常分布は，もし存在すれば，定常方程式 $\boldsymbol{xP} = \boldsymbol{x}$ と正規化条件 $\boldsymbol{xe} = 1$ を満たす解として与えられる．
- 定常分布を初期分布とする HMC は定常過程となる．

2.2.2 再帰性

定義 2.9 （初到達時間，再帰時間） $T_j = \min\{n \geq 1 \,|\, X_n = j\}$ を状態 j への初到達時間 *(first passage time)* という．ただし，任意の $n \geq 1$ に対して $X_n \neq j$ ならば $T_j = \infty$ とする．$X_0 = j$ の時は T_j を状態 j への再帰時間 *(recurrence time)* という．

- 状態 i から出発した場合の T_j の分布を
$$f_{ij}^{(n)} = P(T_j = n \,|\, X_0 = i) = P(X_n = j,\, X_k \neq j,\, k = 1, ..., n-1 \,|\, X_0 = i),\, n \geq 1 \tag{2.5}$$
とし，$f_{ij}^{(0)} = 0$ とする．
- 状態 i から状態 j への到達確率を
$$f_{ij} = P(T_j < \infty \,|\, X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \tag{2.6}$$
とする．
- $f_{ij} = 1$ の時，状態 i から出発した場合の T_j の期待値を
$$\mu_{ij} = \mathrm{E}[T_j \,|\, X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} \tag{2.7}$$
とする．$f_{ij} < 1$ の時は $\mu_{ij} = \infty$ とする．

定義 2.10 （一時的，正再帰的，零再帰的） $f_{ii} = 1$ の時，状態 i は再帰的 *(recurrent or persistent)*，$f_{ii} < 1$ の時，状態 i は一時的 *(transient)* という．再帰的な状態 i について，$\mu_{ii} < \infty$ ならば正再帰的 *(positive recurrent)*，$\mu_{ii} = \infty$ ならば零再帰的 *(null recurrent)* という．

補題 2.3 （再帰性はクラスの性質）
$(i \leftrightarrow j) \Rightarrow$ (状態 i と j は共に一時的か，共に正再帰的か，共に零再帰的)

定理 2.2 （正再帰的であるための必要十分条件） 既約な *HMC* について，正再帰的であることと定常分布が存在することは同値である．さらに，定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ が存在すれば，それは一意でかつ $\boldsymbol{\pi} > \boldsymbol{0}$ である．

- この定理より，既約な HMC について，定常方程式を満たす確率ベクトルが存在すれば，そのベクトルの要素は全て正であり，HMC は正再帰的であることが分かる．

補題 2.4 （定常分布と再帰時間）
既約で正再帰的な *HMC* では，
$$\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}}. \tag{2.8}$$

- この補題より，再帰時間の期待値の逆数が定常状態確率になることが分かる．

補題 2.5 （有限状態 HMC の正再帰性）
既約で状態数が有限な *HMC* は正再帰的であり，常に定常分布が存在する．

- この補題より，状態数が有限であれば既約性のみをチェックすればよいことが分かる．

例 2.4 （境界のあるランダムウォーク）
例 2.2 において，状態 0 を境界としたランダムウォークを考える．すなわち，

$$X_{n+1} = [X_n + Z_{n+1}]^+,\ n \geq 0$$

とする．ここで，$[x]^+ = \max\{0, x\}$ である．また，Z_n は -1, 0, 1 のどれかを取るものとし，$p = P(Z_n = 1)$, $q = P(Z_n = -1)$ とする．この時，推移確率行列は次のような 3 重対角行列となる．

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 1-p-q & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 1-p-q & p & \ddots \\ 0 & 0 & q & 1-p-q & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

よって，定常方程式 $\boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi}$ より

$$(1-p)\pi_0 + q\pi_1 = \pi_0,$$

$$p\pi_{n-1} + (1-p-q)\pi_n + q\pi_{n+1} = \pi_n,\ n \geq 1$$

が得られる．これより，$\rho = p/q$ とおいて

$$\pi_n = \rho^n \pi_0$$

となる．よって，$\rho < 1$ と仮定し（これが定常分布が存在する条件であり，正再帰的となる条件となる），正規化条件を用いて $\pi_0 = 1 - \rho$ を得る．以上をまとめて，

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n,\ n \geq 0. \tag{2.9}$$

2.2.3 極限分布

定義 2.11 （エルゴード的な HMC） 既約，正再帰的，非周期的な *HMC*，または，その推移確率行列をエルゴード的 *(ergodic)* という．

定理 2.3 （エルゴード的な場合の極限分布）
$\boldsymbol{P}$ をエルゴード的な推移確率行列，$\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$ をその定常分布とする．この時，任意の初期分布 $\boldsymbol{a} = (a_i)$ に対して状態分布は定常分布に収束し，次が成り立つ．

$$\forall i, j \in S,\ \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}. \tag{2.10}$$

- この定理の行列表現は，
$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a P}^n = \boldsymbol{\pi} \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{e\pi} \tag{2.11}$$
である．よって，十分大きな n に対して $\boldsymbol{P}^n$ を計算すれば定常分布の近似値を得ることができる（これをパワー法という）．
- 周期的な HMC では，既約で正再帰的であっても（定常分布は存在するが）極限分布は存在しない．しかし，周期倍の時点列のみを取り出せば極限は存在する [3].
- 例 2.1 で，$p_{GB} = 0.05$, $p_{BG} = 0.5$ とすると，$\boldsymbol{\pi} \approx (0.819, 0.168, 0.013)$ となる．ちなみに，工作機械が 1 台の時に，その工作機械が正常である確率は約 0.909，故障中である確率は約 0.091 である．

2.3 吸収的マルコフ連鎖 (状態数が有限の場合)

定義 2.12 （吸収的マルコフ連鎖） 既約な集合がすべて一つの状態だけからなっているマルコフ連鎖を吸収的マルコフ連鎖という．

- 吸収的マルコフ連鎖では，いずれかの吸収状態に到達する (吸収される) までの，連鎖の挙動を分析することになる．

吸収的マルコフ連鎖の推移確率行列は，状態を適当に並べ替えることにより，

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} T & A \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ A \end{array} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.12}$$

という形になる．ここで T は一時的状態の集合，A は吸収状態の集合である．そのため，n ステップ推移確率行列は

$$\boldsymbol{P}^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}^n & \boldsymbol{B}_n \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}_n = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q} + \cdots + \boldsymbol{Q}^{n-1})\boldsymbol{R} \tag{2.13}$$

となる．

(1) 吸収時間

初期分布が $\boldsymbol{a} = (\,\boldsymbol{\beta} \quad \boldsymbol{0}\,)$ という形をしていたとすると，k ステップ目でいずれかの吸収状態に吸収される確率は，吸収時点を表す確率変数を T として，

$$f_T(k) = P(T = k) = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{Q}^{k-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} \tag{2.14}$$

で与えられる．よって，T の確率母関数は

$$G_T(z) = \mathrm{E}[z^T] = \sum_{k=1}^{\infty} z^k f_T(k) = z\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} \tag{2.15}$$

となる．これより T の期待値，つまり**平均吸収時間** (mean absorption time) は

$$\mathrm{E}[T] = G'_T(z)\big|_{z=1} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-2}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{e} \tag{2.16}$$

となる（ここで，$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}$ の関係を用いた）．

(2) 吸収確率

式 (2.16) にでてくる $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$ という行列は，吸収的マルコフ連鎖における重要な特性量で **基本行列** (fundamental matrix) と呼ばれている．一時的状態 i から出発していつかは吸収状態 j に吸収される確率 b_{ij} (**吸収確率**; absorbing probability) を要素とする行列 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ は，これを用いて

$$\boldsymbol{B} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{B}_n = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{R} \tag{2.17}$$

で与えられる．

(3) 訪問回数

以下で示すように，基本行列 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$ の要素は，吸収状態に吸収されるまでにおける一時的状態への**平均訪問回数** (mean number of visits) と解釈することができる．i, j を一時的状態とし，いずれかの吸収状態に吸収されるまでに状態 j を訪問する回数を M_j とする．すなわち，

$$M_j = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n = j\}}. \tag{2.18}$$

ここで，1_A は指示関数 (indicator function) であり，

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A,\ \text{すなわち，事象 } A \text{ が起こる}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.19}$$

によって与えられる．ところで，

$$\mathrm{E}[1_{\{X_n = j\}} \,|\, X_0 = i] = P(X_n = j \,|\, X_0 = i) = p_{ij}^{(n)} \tag{2.20}$$

であるので，状態 i から出発して吸収されるまでに状態 j を訪問する平均回数 m_{ij} は

$$m_{ij} = \mathrm{E}[M_j \,|\, X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}[1_{\{X_n = j\}} \,|\, X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \tag{2.21}$$

であることがわかる．$p_{ij}^{(n)}$ は n ステップ推移確率行列 $\boldsymbol{P}^n$ の i, j 要素であり，式 (2.13) からこれは $\boldsymbol{Q}^n$ の i, j 要素であるので，式 (2.21) を行列の形で書けば

$$\boldsymbol{M} = (m_{ij}) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}^n = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} \tag{2.22}$$

となり，平均訪問回数 m_{ij} を要素とする行列が基本行列であることが分かる．

例 2.5 (例 2.1 の続き)

例 2.1 において，2 台の工作機械が両方とも故障である状態を吸収状態とする．この時，推移確率行列は

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} (1 - p_{GB})^2 & 2(1 - p_{GB})p_{GB} & p_{GB}^2 \\ (1 - p_{GB})p_{BG} & (1 - p_{GB})(1 - p_{BG}) + p_{GB}p_{BG} & p_{GB}(1 - p_{BG}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} (1-p_{GB})^2 & 2(1-p_{GB})p_{GB} \\ (1-p_{GB})p_{BG} & (1-p_{GB})(1-p_{BG}) + p_{GB}p_{BG} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} p_{GB}^2 \\ p_{GB}(1-p_{BG}) \end{pmatrix}$$

となる．よって，これらを用いて，作業がまったくできなくなるまでの時間（吸収時間）の期待値などを求めることができる．例えば，$p_{GB} = 0.05, p_{BG} = 0.5$ とすると，2 台とも正常な状態から初めて 2 台とも故障となるまでの時間（ステップ数）の期待値は約 164 となる．

3　連続時間マルコフ連鎖

ここでは，連続時間マルコフ連鎖に関する基本事項をまとめる．以下，可算集合 S（特に断らない限りは $S = \{0, 1, ...\}$）を状態空間とし，時間を連続（$\mathcal{T} = [0,\ \infty)$）とした確率過程を $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ とする．

3.1　連続時間マルコフ連鎖の定義

定義 3.1（連続時間の斉時的マルコフ連鎖） 連続時間確率過程 $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ が，任意の $k \geq 0$，任意の $i, j, i_1, ..., i_k \in S$，任意の $s, t \geq 0$ と任意の $0 \leq s_1 < ... < s_k < s$ に対して，

$$P(X(s+t) = j \mid X(s) = i, X(s_k) = i_k, ..., X(s_1) = i_1) = P(X(s+t) = j \mid X(s) = i) \tag{3.23}$$

を満たす時，$\{X(t)\}_{t\geq 0}$ を連続時間マルコフ連鎖 (continuous-time Markov chain）という．また，この性質をマルコフ性 (Markov property) という．さらに，右辺の確率が時点 s に依存しない場合，斉時的 (time homogenous) といい， $\{X(t)\}$ を連続時間の斉時的マルコフ連鎖という．

- 以下では斉時的であることを仮定し，

  $p_{ij}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i)$

  と置く．連続時間の斉時的マルコフ連鎖を CTMC と略記する．$p_{ij}(t)$ を推移確率，$\boldsymbol{P}(t) = (p_{ij}(t))$ を推移確率行列 ($\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$)，$\boldsymbol{a} = (a_i)$, $a_i = P(X(0) = i)$, を初期分布，$\boldsymbol{a}(t) = (a_i(t))$, $a_i(t) = P(X(t) = i)$, を時点 t での状態分布というのは離散時間マルコフ連鎖の場合と同様である．ここで，

  $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{P}(t)$

  である．
- CTMC の確率法則は，$\boldsymbol{a}$ と $\{\boldsymbol{P}(t)\}_{t\geq 0}$ によって決る．特に，CTMC の性質は $\{\boldsymbol{P}(t)\}_{t\geq 0}$ によって決る場合が多い．そこで，以下では，CTMC に関する性質と $\{\boldsymbol{P}(t)\}$ に関する性質を同一視する．

定理 3.1（チャップマン・コルモゴロフの等式; Chapman-Kolmogorov equation）
任意の $s, t \geq 0$ と任意の $i, j \in S$ に対して

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{\ell \in S} p_{i\ell}(s) p_{\ell j}(t) \tag{3.24}$$

が成り立つ（行列表現は $\boldsymbol{P}(s+t) = \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t)$）．

3.2　隠れマルコフ連鎖による表現

状態空間 S 上の CTMC を $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ とし，その推移確率行列を $\boldsymbol{P}(t)$ とする．ここでは，サンプルパスがどのように構成されているかという視点から，$\{X(t)\}$ の表現を求める．すなわち，τ_n を n 番目の状態推移時点とすると，$\{X_n\} = \{X(\tau_n)\}$ は離散時間マルコフ連鎖（隠れマルコフ連鎖という）となり，推移時点間隔 $\tau_{n+1} - \tau_n$ はパラメータが X_n に依存した指数分布[2]に従うことを示す．

3.2.1　隠れマルコフ連鎖と指数滞在時間

扱い易いモデルとするため，次の仮定をおく．

仮定 3.1（正の滞在時間） 滞在時間（各状態に留まる時間）は確率 1 で正である．

仮定 3.2（正則性） 任意の有限な時間区間における状態推移の回数は確率 1 で有限である．

仮定 3.3（サンプルパスの右連続性） 時点 τ_n で状態が i から j へ変化したならば，$X(\tau_n) = j$ とする．

[2]指数分布については，期待値の逆数をその指数分布のパラメータと呼ぶことにする．従って，パラメータ λ の指数分布の分布関数は $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ となる．

以上の仮定の下，次の定理が得られる．

定理 3.2 （隠れマルコフ連鎖と指数滞在時間）
状態空間を S とする *CTMC* を $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ とし，$\boldsymbol{P}(t)$ をその推移確率行列とする．$\{X(t)\}$ は正の滞在時間を持ち，正則であるとする．$\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ を $\{X(t)\}$ の状態推移時点列とし，離散時間確率過程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ を $X_n = X(\tau_n)$, $n \geq 0$, で定義する．この時，$\{X_n\}$ は状態空間 S 上の離散時間マルコフ連鎖となり，推移時点間隔 $\tau_{n+1} - \tau_n$ はパラメータが X_n に依存した指数分布に従う．すなわち，$\boldsymbol{P} = (p_{ij})$, $p_{ij} = P(X_1 = j \,|\, X_0 = i)$, とすると，各 $i \in S$ に対して $0 \leq \lambda_i < \infty$ が存在し，次が成り立つ．

$$P(X_{n+1} = j, \tau_{n+1} - \tau_n > t \,|\, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i)\, P(\tau_{n+1} - \tau_n > t \,|\, X_n = i) = p_{ij}\, e^{-\lambda_i t} \quad (3.25)$$

定義 3.2 （隠れマルコフ連鎖） 定理 *3.2* で定義された離散時間マルコフ連鎖を**隠れマルコフ連鎖** *(embedded Markov chain: EMC)* という．

- 定理 3.2 は，EMC と指数時間により CTMC が構成できることを示している．すなわち，時点 t で状態 i にあったとすると，その状態 i にはパラメータ λ_i の指数時間だけ留まり，その後，EMC の推移確率に従って他の状態へ推移する．以後，これを繰り返すことで状態が変化していく確率過程として CTMC が構成される．
- CTMC のシミュレーションは，この構成方法をそのままコンピュータ上で実現することで実行できる．

例 3.1 （ポアソン過程とポアソン到着）
待ち行列モデルとは，何らかのサービスを提供するシステムに客が到着し，サービスを受けて退去していく過程を数学的にモデル化したものである．その中で最もよく用いられている客の到着のモデルとしてポアソン過程というものがある．これは，客の到着間隔が独立で同一の指数分布（パラメータを λ とする，この λ を到着率といい，単位時間当りに到着する客数の期待値に対応する）に従うというモデルである．ポアソン過程に従った客の到着をポアソン到着ともいう．

今，客がポアソン過程に従って到着しているものとし，$N(t)$ を区間 $(0,t]$ に到着した客数とする．実は，ポアソン過程とはこの確率過程 $\{N(t)\}$ のことであり，λ をポアソン過程の強度 (intensity) という．ポアソン過程は状態空間を $S = \{0, 1, ...\}$ とする CTMC である．なぜならば，状態 i には次に到着が発生するまで，パラメータ λ の指数時間だけ留まり，その後，推移確率 $p_{i,i+1} = 1$ で状態 $i + 1$ に推移するからである．

例 3.2 （ポアソン到着，指数時間サービスの待ち行列モデル; $M/M/1$ モデル）
客が到着率 λ でポアソン到着し，到着した客は順番に，サービス時間がパラメータ μ の指数分布に従うサービスを受けて退去する待ち行列モデルを考える．この時，$L(t)$ を時点 t でシステム内にいる客数とすると，確率過程 $\{L(t)\}$ は状態空間を $S = \{0, 1, ...\}$ とする CTMC となる．なぜならば，状態 $i > 0$ には次に到着が発生するかまたはサービスが終了するまでの時間とどまるが，この時間はパラメータ $\lambda + \mu$ の指数時間となる[3]．そして，状態推移が到着の発生であれば状態 $i + 1$ に推移し，その推移確率は $p_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ となり，サービスの終了であれば状態 $i - 1$ に推移し，その推移確率は $p_{i,i-1} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ となる．指数分布の無記憶性から，この状態推移後も同様の過程を繰り返す．

3.3 推移速度行列とコルモゴロフの微分方程式による表現

離散時間マルコフ連鎖では，推移確率行列をもとにして様々な評価量を直接計算できた．CTMC においてそれに相当するものが，$\boldsymbol{P}(t)$ の推移速度行列 $\boldsymbol{Q} = \lim_{h\to+0}(\boldsymbol{P}(h) - \boldsymbol{I})/h$ である．推移速度行列を用いれば，$\boldsymbol{P}(t)$ が満たす微分方程式 $(d/dt)\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{QP}(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$ を与えこともできる（ただし，いくつかの条件が必要）．また，状態数が有限であれば，その微分方程式の解として $\boldsymbol{P}(t) = \exp(\boldsymbol{Q}t)$ が得られる．

3.3.1 推移速度行列

ここでは，$p_{ij}(t)$ の原点における（右）微分係数を求める．そのために次の仮定を置く．

仮定 3.4 （原点での連続性） $\lim\limits_{h\to+0} \boldsymbol{P}(h) = \boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$

- 原点での連続性を仮定すると，任意の $t \geq 0$ に対して $\boldsymbol{P}(t)$ は連続となる．

[3] T, H をそれぞれパラメータ λ, μ の独立な指数時間とすると，$\min\{T, H\}$ はパラメータ $\lambda + \mu$ の指数時間となる．また，この時，$\min\{T, H\} = T$ となる確率は $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$，$\min\{T, H\} = H$ となる確率は $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ で与えられる．

補題 3.1 （原点での微分係数）
原点での連続性を仮定すると，推移確率に対して原点での微分係数（∞ も含めて）が存在する．すなわち，

$$q_i = \lim_{h \to +0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} \in [0, \infty],\ i \in S, \tag{3.26}$$

$$q_{ij} = \lim_{h \to +0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \in [0, \infty),\ i, j \in S,\ j \neq i. \tag{3.27}$$

- この定理では，$q_i = \infty$ となる場合も含むことに注意．また，$q_i = \sum_{j \in S,\, j \neq i} q_{ij}$ であることも保証されていない．

定義 3.3 （微分係数による状態の分類） $q_i = 0$ の時，状態 i は吸収的 *(absorbing)*，$q_i = \infty$ の時，状態 i は瞬間的 *(instantaneous)*，$0 < q_i < \infty$ の時，状態 i は安定的 *(stable)* であるという．

- $q_i = 0$ は，状態 i に一旦入るとその状態にずっと留まることを表し，$q_i = \infty$ は，状態 i に入った瞬間に次の状態へ推移してしまうことを表している．

定義 3.4 （推移速度行列） $q_{ii} = -q_i,\ i \in S$ として，$\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ を推移速度行列 *(transition rate matrix)* または 無限小生成作用素 *(infinitesimal generator)* という．

- 行列表現を用いれば，$\boldsymbol{Q} = \lim_{h \to +0} \dfrac{\boldsymbol{P}(h) - \boldsymbol{I}}{h}$．

扱い易いモデルとするため，以下では次を仮定する．

仮定 3.5 （安定性と保存性） 任意の状態 i に対して，$q_i < \infty$（安定性）であり，$q_i = \sum_{j \in S,\, j \neq i} q_{ij}$ （保存性）であるとする．

- この仮定が満たされれば，推移速度行列の要素は全て有限で，対角成分は非正，その他の成分は非負であり，$\boldsymbol{Qe} = \boldsymbol{0}$ を満たす．
- また，この仮定が満たされれば，$\boldsymbol{P}(t)$ は任意の $t \geq 0$ で微分可能となる．
- さらに，この仮定が満たされれば，

$$\begin{aligned} &P(X(t+h) = i \,|\, X(t) = i) = 1 - q_i h + o(h) \\ &P(X(t+h) = j \,|\, X(t) = i) = q_{ij} h + o(h) \end{aligned} \tag{3.28}$$

  が成り立つ．これは，微小時間 h の間状態 i に留まる確率は $1 - q_i h$ であり，その時間内に状態 i から j に推移する確率は $q_{ij} h$ であることを表している．ちなみに，微小時間 h 内に 2 回以上の推移が起きる確率は $o(h)$ であり，無視できる．
- CTMC は，推移速度 q_{ij} を重みとした推移図を書くと理解しやすい．
- 状態数が有限な CTMC は常に安定性と保存性を満たす．

例 3.3 （出生死滅過程）
状態空間を $S = \{0, 1, ...\}$ とする CTMC で，次のような推移速度行列 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ を持つものを出生死滅過程 (birth-and-death process) という．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \ddots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

ここで，$0 \leq \lambda_i < \infty$ を出生パラメータ，$0 \leq \mu_i < \infty$ を死滅パラメータという．また，$\mu_i = 0,\ i \geq 0,$ のモデルを純出生過程ともいう．

3.3.2　コルモゴロフの微分方程式

ここでは，

$$\frac{\boldsymbol{P}(t+h)-\boldsymbol{P}(t)}{h}=\frac{\boldsymbol{P}(h)-\boldsymbol{I}}{h}\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{P}(t)\frac{\boldsymbol{P}(h)-\boldsymbol{I}}{h}$$

の極限を考えることで，推移確率行列 $\boldsymbol{P}(t)$ が満たす微分方程式を求める．

定理 3.3 （コルモゴロフの後向き微分方程式）
$\boldsymbol{P}(t)$ について次が成り立つ．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t) \tag{3.30}$$

- ある条件を追加すると，次のコルモゴロフの前向き微分方程式も成立する．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} \tag{3.31}$$

- この微分方程式を用いて，有限マルコフ連鎖については次の表現が得られる（ある条件を付けることで可算状態の場合にも拡張できる）．

$$\boldsymbol{P}(t)=\exp(\boldsymbol{Q}\,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\boldsymbol{Q}^n \tag{3.32}$$

次に，定理 3.2 の中で与えた EMC の推移確率行列 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$ 及び指数滞在時間のパラメータ $\lambda_i,\, i\in S$, と推移速度行列 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$ との関係を示す．

定理 3.4 （隠れマルコフ連鎖と推移速度行列の関係）
定理 *3.2* の仮定の下，次が成り立つ．

$$\lambda_i=q_i,\ i\in S,\quad p_{ij}=\frac{q_{ij}}{q_i},\ i,j\in S \tag{3.33}$$

ただし，$q_i=0$ の時は $p_{ij}=0$ とする．

- この定理より，例 3.1 のポアソン過程の推移速度行列は

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \ddots\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \ddots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots\end{pmatrix}$$

となり，例 3.2 の $M/M/1$ モデルの推移速度行列は

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots\\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots\\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \ddots\\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \ddots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots\end{pmatrix}$$

となる．よって，ポアソン過程，$M/M/1$ モデルは出生死滅過程の特別な場合であることが分かる．

3.4　定常分布と極限分布

定常分布と極限分布については，離散時間マルコフ連鎖と同様の結果が得られる．

3.4.1　定常分布

定義 3.5 （定常分布） 推移確率行列を $\{\boldsymbol{P}(t)\}_{t\geq 0}$ とし，任意の $t\geq 0$ に対して $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{\pi}$ を満たす確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ が存在する時，$\boldsymbol{\pi}$ を $\{\boldsymbol{P}(t)\}_{t\geq 0}$，または，それに対応する *CTMC* の定常分布 *(stationary distribution)* という．

- 離散時間マルコフ連鎖と同様，定常分布を初期分布とする CTMC は定常過程となる．

定義 3.6 （到達可能，相互到達可能，既約） ある $t\geq 0$ に対して $p_{ij}(t)>0$ ならば j は i から到達可能 *(reachable)* であるという．これを $i\to j$ と記述する．さらに，$i\to j$ かつ $j\to i$ ならば i と j は相互到達可能 *(mutually reachable or communicate)* であるという．これを $i\leftrightarrow j$ と記述する．全ての状態が相互到達可能な *CTMC* を既約なマルコフ連鎖 *(irreducible Markov chain)* という．

- 正の滞在時間と，正則性を仮定すると，CTMC の既約性とその EMC の既約性は同値となる．
- 周期性という概念は CTMC にはない．(EMC が周期的な場合はある．)

定義 3.7 （再帰時間） 状態 i での滞在時間を $T_i = \inf\{t \geq 0 \,|\, X(t) \neq i\}$ （任意の $t \geq 0$ に対して $X(t) = i$ ならば $T_i = \infty$）とし，状態 i の再帰時間 *(return time)* を $R_i = \inf\{t \geq 0 \,|\, t > T_i,\ X(t) = i\}$ （$T_i = \infty$ または任意の $t > T_i$ に対して $X(t) \neq i$ ならば $R_i = \infty$）とする．

- 以下では，離散時間マルコフ連鎖の場合と同様に，$f_{ii} = P(R_i < \infty \,|\, X(0) = i)$, $\mu_{ii} = \mathrm{E}[R_i \,|\, X(0) = i]$ と置く．

定義 3.8 （一時的，正再帰的，零再帰的） $f_{ii} = 1$ の時，状態 i は再帰的 *(recurrent)*，$f_{ii} < 1$ の時，状態 i は一時的 *(transient)* という．再帰的な状態 i について，$\mu_{ii} < \infty$ ならば正再帰的 *(positive recurrent)*，$\mu_{ii} = \infty$ ならば零再帰的 *(null recurrent)* という．

定理 3.5 （正再帰的であるための必要十分条件） 正の滞在時間を持ち，正則で，既約な *CTMC* $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ について，正再帰的であることと定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ が存在することは同値であり，$\boldsymbol{\pi}$ は平衡方程式 $\boldsymbol{\pi Q} = \mathbf{0}^\top$ を満たす分布ベクトルとして与えられる．さらに，定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ が存在すれば，それは一意でかつ $\boldsymbol{\pi} > \mathbf{0}$ である．

- この定理より，定常分布は，平衡方程式 $\boldsymbol{xQ} = \mathbf{0}^\top$ と正規化条件 $\boldsymbol{xe} = 1$ を満たす解として求められる．
- 例 3.2 の $M/M/1$ モデルでは，平衡方程式と正規化条件より，$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ として，

  $$\pi_n = (1-\rho)\rho^n$$

  が得られる．この結果は，例 2.2.1 における境界のあるランダムウォークと同じ形をしており，導出の手順もほぼ同じである．
- $\pi_i q_{ij}$ を状態 i から j への確率フローとし，その確率フローに関するつり合いの方程式から定常分布を求める方法がある．これは，状態の部分集合を考え，その部分集合から出る確率フローと入る確率フローが等しくなるという関係から方程式系を構成するものである．このように構成された方程式系は平衡方程式と同値であり，構成の仕方によっては計算が容易になることがある．

補題 3.2 （定常分布と再帰時間）
正の滞在時間を持ち，正則で，既約な *CTMC* $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ について，定常分布が存在すれば次が成り立つ．

$$\pi_i = \frac{1/q_i}{\mu_{ii}} = \frac{1}{q_i\,\mu_{ii}}. \tag{3.34}$$

3.4.2 極限分布

定義 3.9 （エルゴード的な CTMC） 正の滞在時間を持ち，正則で，既約な *CTMC* が正再帰的である場合，エルゴード的 *(ergodic)* であるという．

定理 3.6 （エルゴード的な場合の極限分布）
状態空間 S 上のエルゴード的な *CTMC* を $\{X(t)\}$ とし，その推移速度行列を $\boldsymbol{P}(t) = (p_{ij}(t))$，定常分布を $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$ とする．この時，次が成り立つ．

$$\forall i, j \in S,\ \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j \quad (\text{行列表現は } \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{e\pi}) \tag{3.35}$$

3.5 吸収的マルコフ連鎖と相型分布

3.5.1 吸収的マルコフ連鎖

状態数を有限とする吸収的マルコフ連鎖の性質を以下にまとめる．

補題 3.3 （吸収的マルコフ連鎖の性質）

T を一時的状態の集合，A を吸収状態の集合とし，推移速度行列を次で与える．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} T & A \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ A \end{array} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.36}$$

この時，推移確率行列は次で与えられる．

$$\boldsymbol{P}(t) = \exp(\boldsymbol{Q}t) = \begin{pmatrix} \exp(\boldsymbol{U}t) & (-\boldsymbol{U})^{-1}(\boldsymbol{I} - \exp(\boldsymbol{U}t))\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

この式より，一時的状態 $i \in T$ から出発して吸収状態 $j \in A$ に吸収される確率を a_{ij} として，確率行列 $\tilde{\boldsymbol{A}} = (a_{ij})$ は次で与えられる．

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \lim_{t \to \infty} (-\boldsymbol{U})^{-1}(\boldsymbol{I} - \exp(\boldsymbol{U}t))\boldsymbol{R} = (-\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{R} \tag{3.38}$$

また，一時的状態 $i \in T$ から出発して吸収されるまでに一時的状態 $k \in T$ に滞在した時間の期待値を μ^0_{ik} として，$\boldsymbol{M}^0 = (\mu^0_{ik})$ は次で与えられる．

$$\boldsymbol{M}^0 = \int_0^\infty \exp(\boldsymbol{U}t)dt = (-\boldsymbol{U})^{-1} \tag{3.39}$$

- これらの式は次のようにして得られる．まず，
  $$\boldsymbol{P}(t) = \exp(\boldsymbol{Q}t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}\boldsymbol{Q}^n = \boldsymbol{I} + \sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}^n & \boldsymbol{U}^{n-1}\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$
  より式 (3.37) が得られる．$\tilde{\boldsymbol{A}}$ は，$\lim_{t\to\infty} \exp(\boldsymbol{U}t) = \boldsymbol{O}$ より得られる．また，
  $$\mu^0_{ik} = \mathrm{E}\Big[\int_0^\infty 1_{\{X(t)=k\}}dt \;\Big|\; X(0) = i\Big] = \int_0^\infty \mathrm{E}[1_{\{X(t)=k\}} \,|\, X(0) = i]dt = \int_0^\infty p_{ik}(t)dt$$
  の行列表現を考えることで式 (3.39) が得られる．
- この補題より，$(-\boldsymbol{U})^{-1}$ が非負行列であることが分かる．

3.5.2 相型分布

定義 3.10 （相型分布） 吸収的な有限マルコフ連鎖における吸収時間（一時的状態から出発してどれかの吸収状態に吸収されるまでの時間）の分布を相型分布 *(phase type distribution)* という．また，マルコフ連鎖における一時的状態を相という．

- システムの挙動を表現するための時間の分布として相型分布を用いると，システム全体を CTMC でモデル化することが可能となる．
- 正の値のみをとる確率分布のクラスの中で，相型分布のクラスは稠密である．しがたって，正の値のみをとる任意の確率分布を，任意の精度で近似することができる．

以下では，相型分布の初期確率ベクトル[4]を $\boldsymbol{\beta}$，一時的状態間の推移速度行列を $\boldsymbol{B}$ として，これらの組 $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\beta})$ で相型分布を表すことにする．補題 3.3 より，相型分布について次が得られる．

補題 3.4 （相型分布の分布関数など）

X を相型分布 $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\beta})$ に従う確率変数とし，$\boldsymbol{b} = (-\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}$ とする．この時，次が成り立つ．

- 分布関数: $F(x) = P(X \le x) = 1 - \boldsymbol{\beta}\exp(\boldsymbol{B}\,x)\boldsymbol{e}$
- 分布密度関数: $f(x) = F'(x) = \boldsymbol{\beta}\exp(\boldsymbol{B}\,x)\boldsymbol{b}$
- ラプラス・スティルチェス変換: $\tilde{F}(s) = E[e^{-sX}] = \boldsymbol{\beta}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b}$
- 期待値: $h_1 = E[X] = \boldsymbol{\beta}(-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{e}$
- m 次モーメント: $h_m = E[X^m] = m!\,\boldsymbol{\beta}(-\boldsymbol{B})^{-m}\boldsymbol{e}$

[4] $\boldsymbol{\beta}$ は一時的状態に対する初期確率のベクトルであり，初期確率ベクトルは $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{\beta} \;\; \boldsymbol{0})$ となるが，相型分布に対しては $\boldsymbol{\beta}$ を初期確率ベクトルと呼ぶことにする．

例 3.4 (アーラン分布と超指数分布)

p_i を $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ であるような正の重み，μ, μ_i, $i = 1, 2, \ldots k$, を適当な正のパラメータとする．k 次のアーラン分布は

$$\boldsymbol{\beta} = (1, 0, ..., 0), \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & & & \\ & -\mu & \mu & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\mu & \mu \\ & & & & -\mu \end{pmatrix}$$

の相型分布，k 次の超指数分布は

$$\boldsymbol{\beta} = (p_1, p_2, ..., p_k), \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -\mu_1 & & & \\ & -\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\mu_k \end{pmatrix}$$

の相型分布とみることができる．ただし，$\boldsymbol{B}$ のゼロ要素は省略して記述した．

4 待ち行列理論

4.1 待ち行列理論と混雑現象

待ち行列理論とは，何らかのサービスを提供するシステムの混雑現象を分析するための理論である (例：スーパーのレジ，病院の受け付け，かんばん方式，通信ネットワークなど)．始まりは 1909 年の**アーラン** (E. K. Erlang) による電話回線の混み合い問題の研究に遡ることができる (http://oldwww.com.dtu.dk/teletraffic/Erlang.html)．

混雑現象

- なぜ待ちが生じるのか？
  あるサービスを提供するシステムを考える．
  - **有限なサービス能力：** 単位時間当りに処理できる客の人数には限界がある．
  - **客はランダムにやってくる**：単位時間当りにやってくる客の人数は時間とともに変動する．
  - **サービス時間もランダムである**：客によって消費するサービス時間が異なる．

    → 特定の時間に利用が集中すると処理しきれない客が出てきて待ちが生じる．これが**混雑現象**である．
- 混雑が与える影響
  - サービス品質の低下：長い待ち時間，長い応答時間，サービスが受けられない，など．
- 対処方法 (代表的なもの)
  - サービス能力を上げる．
  - 客の到着を平滑化する (予約制，電話番号による制限，時差通勤など)．
  - 処理の順序を工夫する (はし並びとフォーク並び，現金引き出しのみの ATM など)．

4.2 待ち行列モデル

(1) 待ち行列モデルの構成要素

サービスを受けるものを**客**，サービスを実行するものを**サーバー**または**窓口**，サービスを受けるために客が待つ場所を**待ち室**，サーバーと待ち室を合わせたものを**システム**または**系**という．待ち行列モデルは次の項目によって規定される．

(i) 客の到着の仕方 (X)**：** 例 ポアソン到着 (M), 一定間隔到着 (D), 到着間隔が独立で同一の分布に従う到着のモデル (GI), 一般の到着過程 (G) など

(ii) 客のサービス時間 (Y)**：** 例 指数分布サービス (M), 一定時間サービス (D), 一般分布サービス (G) など

(iii) サーバー数 (s)

(iv) 待ち室の容量 (m) [5]

(v) サービス規律： 客をサービスする順序についての約束事，例 先着順サービス (FIFO; First In First Out) など

[5] この資料では，サービス中の客が占める場所も待ち室容量に含めるものとする．

これを記号では X/Y/s/m と記述する (**ケンドールの記号**). ただし，待ち室の容量が $m = \infty$ の場合はそれを省略して X/Y/s と記述する場合もある．例えば，ケンドールの記号で M/M/10/∞ (M/M/10) はポアソン到着，指数分布サービスで，サーバー数が 10，待ち室の容量が無限のモデルを表す．

注：待ち行列理論では一般に「客」,「待ち室」という表現を使うが，対象とするシステムによっては異なった呼び方をする場合がある．例えば，コンピューターシステムに対してはそれぞれ「**ジョブ**」,「**バッファ**」という言葉をよく用いる．

(2) 待ち行列モデルの評価量

- **待ち時間** W：客が待った時間
- **滞在時間** (**応答時間**) R：客がシステム内に滞在した時間
- **待ち客数** L_q：待っている客数
- **系内客数** L：システム内に滞在している客数
- **あふれ率**：待ち室がいっぱいでシステム内に入ることを拒否された客の割合 (待ち室の数が有限の場合)

4.3 ポアソン到着

客の到着間隔を $T_1, T_2, \cdots$ とする．単位時間当りの平均到着客数を**到着率**といい， λ で表すことにする．客の到着間隔の期待値は $1/\lambda$ となる．**ポアソン到着**とは，客が**ポアソン過程**に従って到着する到着のモデルを指し，$\{T_n\}$ が互いに独立で同一の指数分布 (パラメータ λ)

$$P(T_i \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

に従うモデルとして与えられる．これは，次によって特徴付けされるランダムな到着を数学的にモデル化したものである (これらの性質はポアソン過程が斉時的な連続時間マルコフ連鎖であることからも得られる)．

(a) 定常性： 客の到着の傾向は時点に依存しない (斉時性に対応)．

(b) 独立性： 客の到着の傾向は過去における客の到着の仕方に無関係 (マルコフ性に対応)．

(c) 希少性： 十分短い時間区間内に 2 人以上の客が到着する確率は無視できる (微小時間間隔 $(t, t+\delta]$ に 1 人到着する確率は $\lambda\delta + o(\delta)$ であり，2 人以上到着する確率は $o(\delta)$ となる)．

また，ポアソン到着は次の性質を持つ (指数分布の無記憶性：$P(T_i > t + s \,|\, T_i > s) = P(T_i > t)$ から導かれる性質)．この性質は，ポアソン到着のモデルを解析する上で重要である．

補題 4.1 (ポアソン到着の性質)

(a) **ある区間内の到着客数：** 区間 $(t, t+h]$ に到着する客数の分布は平均 λh のポアソン分布となる．また，重なりのない区間における到着客数は互いに独立となる (この性質を独立増分性という)．

(b) **客のランダムな振り分け：** 客が到着率 λ のポアソン到着に従ってやってくるとする．また，客のクラスとして，クラス 1 からクラス n の n 個のクラスを考える．到着した客は他の事象とは独立に確率 p_i でクラス i に割り振られるものとする ($p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$)．このとき，クラス i に割り振られた客の到着過程は到着率 λp_i のポアソン到着となる．

(c) **独立な到着の合流：** 客のクラスとして，クラス 1 からクラス n の n 個のクラスを考える．クラス i の客は到着率 λ_i のポアソン到着に従ってやってくるとし，各クラスの到着は互いに独立であるとする．このとき，すべてのクラスの到着を合わせた到着過程は到着率 $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ のポアソン到着となる．

4.4 PASTA

一般の待ち行列モデルでは，客が到着した時点で見る待ち行列長の分布と時間平均での待ち行列長の分布 (定常分布) は必ずしも一致しない．しかし，到着がポアソン到着に従う場合には両者は一致する．これを一般化し，ポアソン到着する客の到着時点列でシステムを観測して得られる分布が時間平均での分布と一致することを示したのが次の **PASTA (Poisson Arrivals See Time Average)** [2] である．

定理 4.1 (PASTA)

$\{X(t)\}$ を状態空間 S 上の確率過程 (例えば，待ち行列長の過程)，$\{N(t)\}$ を到着率 λ のポアソン到着 ($N(t)$ は時間区間 $(0,t]$ での到着客数，$\{\tau_n\}$ は到着時点列) とする．$B \subset S$ とし，$X(t)$ が時間区間 $(0,t]$ で B 内にいた時間の割合 (時間平均) $\bar{X}(t)$ と到着時点において B 内にいた回数の割合 (事象平均) $\bar{A}(t)$ を

$$\bar{X}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{X(s)\in B\}}ds, \quad \bar{A}(t) = \frac{1}{N(t)}\sum_{n=1}^{N(t)} 1_{\{X(\tau_n)\in B\}},$$

で与える (1_A は A であれば 1，そうでなければ 0 を値に取る確率変数)．また，将来における到着の発生と，注目する確率過程 $\{X(t)\}$ の今までの挙動及び今までの到着の発生とが独立である，すなわち，

任意の $t \geq 0$ に対して, $\{N(t+u) - N(t) : u \geq 0\}$ と $\{(X(s), N(s)) : 0 \leq s \leq t\}$ が独立

であるとする (この条件を **Lack of Anticipation Assumption; LAA** という)．このとき，$\bar{X}(t)$ と $\bar{A}(t)$ について，どちらか一方の $t\to\infty$ とした極限が確率 1 で存在すれば他方の極限も確率 1 で存在し，

$$\lim_{t\to\infty}\bar{X}(t) = \lim_{t\to\infty}\bar{A}(t) = P(X\in B)$$

が確率 1 で成り立つ．ただし，X は $\{X(t)\}$ の定常分布に従う確率変数とする．

4.5 リトルの式

リトルの式 (Little's formula) とは，平均待ち時間と平均待ち客数を関係付ける式である．

定理 4.2 (リトルの式その 1)

$\bar{W}$ を客の平均待ち時間，λ を到着率，$\bar{L}_q$ を平均待ち行列長 (サービス中の客は含まない) とすると，どのようなサービス規律に対しても次が成り立つ．

$$\bar{L}_q = \lambda\bar{W} \tag{4.40}$$

リトルの式は，待ち行列モデルに限らず，客の出入りのある一般のシステムにおいて，そのシステム内での平均滞在時間とシステム内にいる平均客数についての関係式を与えたものである．

定理 4.3 (リトルの式その 2)

$\bar{R}$ をあるシステム内での平均滞在時間，λ を単位時間当りにそのシステムへ入った平均客数，$\bar{L}$ をそのシステム内での平均滞在客数とすると，次が成り立つ ($\bar{R}$ または $\bar{L}$ が存在することを仮定)．

$$\bar{L} = \lambda\bar{R} \tag{4.41}$$

(**略証**) $N(t)$ を時間区間 $(0,t]$ に到着した客の数，$L(t)$ を時点 t での系内客数，R_n を n 番目に到着した客のシステム内滞在時間とする．$L(t)$ と R_n の間には，$\alpha(t)$ を誤差項として

$$\int_0^t L(s)ds = \sum_{j=1}^{N(t)} R_j + \alpha(t)$$

の関係がある．この $\alpha(t)$ は，平均到着率と平均滞在時間が存在するという条件の下，すなわち，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t} = \lambda, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R_j = \bar{R}$$

であれば，$\lim_{t\to\infty}\alpha(t)/t = 0$ を満たす．これより，

$$\bar{L} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t L(s)ds = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{N(t)}{t}\frac{1}{N(t)}\sum_{j=1}^{N(t)} R_j + \frac{\alpha(t)}{t}\right) = \lambda\bar{R}$$

が得られる． □

- リトルの式 (その 1) は，リトルの式 (その 2) で待ち室内をシステム内とみなした場合に相当する．

4.6 到着間隔列とサービス時間列からみた待ち行列モデル

T_n を $n-1$ 番目と n 番目の客の到着間隔 (T_1 は 1 番目に到着した客の到着時点)，S_n を n 番目に到着した客のサービス時間とする．サーバー数を 1 とし，サービス規律を先着順 (FIFO) とすれば，待ち行列モデルの挙動はこれらふたつの確率変数列によって以下のように与えられる．

(1) 待ち時間

$W_n, n \geq 1,$ を n 番目に到着した客の待ち時間とする．$n+1$ 番目の客が到着した時点において，n 番目に到着した客のサービスがまだ終了していなければ，$n+1$ 番目に到着した客のサービスは，n 番目に到着した客のサービスが終了した時点で開始される．よって，両者の到着時点の差は T_{n+1} なので，$W_{n+1} = W_n + S_n - T_{n+1}$ となる．n 番目に到着した客のサービスが終了していれば，系内にだれもいない時に到着したことになるので，$W_{n+1} = 0$ となる．よって，$n+1$ 番目の客が到着した時点で n 番目に到着した客のサービスが終了していれば $W_n + S_n < T_{n+1}$ であることに注意すると，次が得られる (この式を**リンドレイの式** (Lindley's formula) という)．

$$W_{n+1} = \max\{0, W_n + S_n - T_{n+1}\} = \left[W_n + S_n - T_{n+1}\right]^+, \quad n \geq 1 \tag{4.42}$$

この式により，W_1 が適当に与えられていれば，W_n を順次計算できる．

(2) 系内客数

$A(t)$ を区間 $(0, t]$ での到着客数，$D(t)$ を区間 $(0, t]$ での退去客数 (サービスが終了した客数) とする．このとき，時点 t での系内客数 $Q(t)$ は，時点 0 での系内客数を Q_0 として，次で与えられる．

$$Q(t) = Q_0 + A(t) - D(t) \tag{4.43}$$

この式からも分かるように，系内客数 $Q(t)$ が変化する時点は，客の到着時点とサービスの終了時点のどちらかである．そこで，これらの時点を順に $\tau_1, \tau_2, ...$ とし，この時点毎に系内客数を追っていくことにする．今，時点 τ_n において次に客が到着するまでの時間を $R_A(n)$, 次にサービスが終了するまでの時間を $R_S(n)$ とする．ただし，だれもサービスを受けていない場合は $R_S(n) = \infty$ とする．さらに，$Q_n = Q(\tau_n), \tau_0 = 0, Q_0 = 0, R_A(0) = T_1, R_S(0) = \infty$ とする．このとき，$n \geq 0$ に対して次が成り立つ．

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \min\{R_A(n), R_S(n)\}, \tag{4.44}$$

$$Q_{n+1} = \begin{cases} Q_n + 1 & \text{if } R_A(n) < R_S(n) \\ Q_n & \text{if } R_A(n) = R_S(n) \\ [Q_n - 1]^+ & \text{if } R_A(n) > R_S(n) \end{cases}, \tag{4.45}$$

$$R_A(n+1) = \begin{cases} T_{A(\tau_n)+2} & \text{if } R_A(n) \leq R_S(n) \\ R_A(n) - R_S(n) & \text{if } R_A(n) > R_S(n) \end{cases}, \tag{4.46}$$

$$R_S(n+1) = \begin{cases} S_{D(\tau_n)+1} & \text{if } Q_n = 0 \\ \infty & \text{if } Q_n = 1, R_A(n) > R_S(n) \\ S_{D(\tau_n)+1} & \text{if } Q_n = 1, R_A(n) = R_S(n) \\ R_S(n) - R_A(n) & \text{if } Q_n \geq 1, R_A(n) < R_S(n) \\ S_{D(\tau_n)+1} & \text{if } Q_n \geq 2, R_A(n) \geq R_S(n) \end{cases} \tag{4.47}$$

区間 (t_n, t_{n+1}) では，系内客数は変化しない．これらの漸化式は，そのまま，待ち行列モデルをシミュレーションする場合のアルゴリズムとなっている．

4.7 M/M/s モデル

M/M/s モデル (ポアソン到着，指数サービス，サーバー数は s，待ち室数は無限) に対して次を定義する．

- λ: 到着率
- h: 平均サービス時間
- μ: **サービス率** (単位時間当りに可能な平均サービス完了数，$\mu = \dfrac{1}{h}$)
- $a = \lambda h = \dfrac{\lambda}{\mu}$: **トラフィック密度 (traffic intensity)** (単位時間当りにシステム内へ持ち込まれる仕事の量)，
  $a < s$ と仮定 (これが，定常分布の存在する条件となる)
- $\rho = \dfrac{a}{s} = \dfrac{\lambda}{s\mu}$
- π_k: 系内客数が k 人である**定常確率**，$k \geq 0$

評価量としては，定常状態における系内客数 L の分布 $\pi_k = P(L = k), k = 1, 2, ...,$ とその平均 $\bar{L}$, 定常状態における待ち時間 W の分布 $P(W \leq x), x \geq 0,$ とその平均 $\bar{W}$, 及び平均待ち客数 $\bar{L}_q$，平均滞在時間 (平均応答時間) $\bar{R}$ を考える．これらの平均評価量の間には次の関係がある (導出はリトルの式を用いる)．

$$\bar{L} = \bar{L}_q + a, \quad \bar{W} = \frac{1}{\lambda}\bar{L}_q, \quad \bar{R} = \bar{W} + h \tag{4.48}$$

よって，4 つの平均評価量の内のどれかを計算できれば他はそれから容易に求めることができる．

4.7.1　M/M/1 **モデル**

(1) 系内客数の定常分布

これは p.6 の例 2.4 で示したように次で与えられる．

$$\pi_k = (1-\rho)\rho^k,\ k \geq 0 \tag{4.49}$$

(2) 待ち時間の定常分布

ここでは先着順 (FIFO) でサービスを受けるものとする．系内客数が k 人の時に到着した客の待ち時間 X_k は，待っている $k-1$ 人の客のサービス時間の和に，サービス中の客の残りサービス時間を加えたものとなる．ところで，指数分布の無記憶性より，サービス中の客の残りサービス時間も平均 $1/\mu$ の指数分布に従うことから，結果として，X_k は 平均 $1/\mu$ の指数分布に従う k 個のサービス時間の和となる．指数分布の和が従う分布は**アーラン分布**と呼ばれ，今考えている場合について，その補分布は

$$P(X_k > x) = e^{-\mu x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\mu x)^i}{i!}$$

で与えられる．また，PASTA より，到着した客がシステム内に k 人の客を見い出す確率は系内客数の定常確率 π_k に一致する．よって，待ち時間の補分布は次で与えられる．

$$P(W > x) = \sum_{k=1}^{\infty}\pi_k P(X_k > x) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^k e^{-\mu x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\mu x)^i}{i!} = \rho e^{-(\mu-\lambda)x} \tag{4.50}$$

これより，待ち時間の分布関数は次のようになる．

$$P(W \leq x) = 1 - P(W > x) = 1 - \rho e^{-(\mu-\lambda)x}$$

(3) 各平均評価量

$$\bar{L}_q = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\pi_k = \frac{\rho^2}{1-\rho},\quad \bar{L} = \bar{L}_q + \rho = \frac{\rho}{1-\rho},\quad \bar{W} = \frac{1}{\lambda}\bar{L}_q = \frac{\lambda h^2}{1-\rho},\quad \bar{R} = \bar{W} + h = \frac{h}{1-\rho} \tag{4.51}$$

4.7.2　M/M/s **モデル**

(1) 系内客数の定常分布

M/M/s モデルも M/M/1 モデルと同様，連続時間マルコフ連鎖としてモデル化でき，平衡方程式を解くことで定常分布が得られる．以下には，結果のみを示す．

$$\pi_0 = \left\{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{a^n}{n!} + \frac{a^s}{(s-1)!(s-a)}\right\}^{-1},\quad \pi_k = \begin{cases} \frac{a^k}{k!}\pi_0 & (1 \leq k \leq s) \\ \frac{a^k}{s!\,s^{k-s}}\pi_0 & (k \geq s+1) \end{cases} \tag{4.52}$$

(2) 待ち時間の定常分布

先着順 (FIFO) でサービスを受けるものとする．系内客数が $k\,(\geq s)$ 人の時に到着した客の待ち時間 X_k は $k-s+1$ 人の客のサービスが終了するまでの時間となる．$k \geq s$ なので全部のサーバーが稼働中となり，だれか一人の客のサービスが終了するまでの時間は平均 $1/(s\mu)$ の指数分布に従う．よって，X_k は次を補分布に持つアーラン分布に従う．

$$P(X_k > x) = e^{-s\mu x}\sum_{i=0}^{k-s}\frac{(s\mu x)^i}{i!}$$

これより，M/M/1 モデルの場合と同様にして，待ち時間の補分布は次で与えられる．

$$P(W > x) = \sum_{k=s}^{\infty}\pi_k P(X_k > x) = \frac{\pi_s}{1-\rho}e^{-(s\mu-\lambda)x}$$

待ち時間の分布関数は $P(W \leq x) = 1 - P(W > x)$ より得られる．

(3) 各平均評価量

$$\bar{L}_q = \frac{a^{s+1}}{(s-1)!(s-a)^2}\pi_0 \tag{4.53}$$

(その他は式 (4.48) より得られるので省略)

4.8　$M/PH/1$ **モデル**

$M/PH/1$ モデルでは，客はパラメータ λ のポアソン過程に従って到着し，相型分布 $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\beta})$ に従ったサービスを受けてからシステムを退去する．サーバの数は 1 で，サービス規律は先着順 (FIFO) とする．客のサービス時間は，互いに，また到着過程とも独立とする．

4.8.1 マルコフ連鎖による記述

このモデルでは，時刻 t において系内にいる客の数 $L(t)$ とサービス過程の相番号 $J(t)$ の組 $X(t) = (L(t),\, J(t))$ をとると，これがマルコフ連鎖となる．$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とし，さらに相型分布 $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\beta})$ を記述するマルコフ連鎖の一時的状態の集合を $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, s\}$ とすれば，このマルコフ連鎖の状態空間は $\mathcal{S} = \mathcal{N} \times \mathcal{J} = \{(n, j) \,|\, n \in \mathcal{N},\ j \in \mathcal{J}\}$ となる．ただし，$L(t) = 0$ のときには系内に客がいないのでサービスは行われておらず，サービス過程の相番号 $J(t)$ は定義されない．しかし，ここでは，ある客のサービスが終了したら，待っている客の有無に係わらず，次の客のサービス開始時の相を先に選んでしまうものとする．もし，次にサービスを受ける客が系内にいなければ，サービス過程は次に新たな客が到着し，サービスが開始されるまでその相にとどまる．これにより，マルコフ性を損なわずに，$L(t) = 0$ のときもサービス過程の相 $J(t)$ を定義できる．

4.8.2 推移速度行列

このようにマルコフ連鎖 $\{X(t)\} = \{(L(t),\, J(t))\}$ を定義すると，その推移速度行列は次のようになる．ただし，$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}$ である．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda\boldsymbol{I} & \lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta} & -\lambda\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta} & -\lambda\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{I} & \ddots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta} & -\lambda\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{4.54}$$

このような行列を**ブロック 3 重対角行列** (block tri-diagonal matrix) と呼ぶ．また，このようなブロック 3 重対角の推移速度行列を持つマルコフ連鎖を，一般に，**準出生死滅過程** (quasi-birth-and-death process) という．準出生死滅過程では，状態の部分集合 $\{n\} \times \mathcal{J} = \{(n, j) \,|\, j \in \mathcal{J}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, のことをレベル n と呼ぶ．待ち行列モデルの言葉で言えば，系内に n 人の客がいる状態の集合がレベル n となる．

4.8.3 定常状態確率

上の式 (4.54) の推移速度行列を持ったマルコフ連鎖の定常状態確率を求める．まず，トラヒック密度 ρ は，相型分布の期待値が補題 pr:PHdist で与えられることから

$$\rho = \lambda h_1 = \lambda\boldsymbol{\beta}(-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{e} \tag{4.55}$$

となる．以下では，定常状態が存在する条件 $\rho < 1$ を仮定する．定常状態確率ベクトル $\boldsymbol{x}$ をレベルによって分割し，$\boldsymbol{x} = (\,\boldsymbol{x}_0 \quad \boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots)$ とする．この時，平衡方程式 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}^\top$ は次のように書き下すことができる．

$$-\lambda\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}^\top \tag{4.56}$$

$$\lambda\boldsymbol{x}_{n-1} + \boldsymbol{x}_n\,(-\lambda\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{x}_{n+1}\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}^\top, \quad n \ge 1 \tag{4.57}$$

これらの式に右から $\boldsymbol{e}$ を掛けると，$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{e} = 1$ かつ $-\boldsymbol{B}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b}$ より

$$-\lambda\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{b} = 0,$$

$$-(-\lambda\boldsymbol{x}_{n-1}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_n\boldsymbol{b}) + (-\lambda\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}_{n+1}\boldsymbol{b}) = 0, \quad n \ge 1,$$

となる．これより，

$$\boldsymbol{x}_{n+1}\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{e}, \quad n \ge 0, \tag{4.58}$$

が得られる．これは平衡状態ではレベル n と $n+1$ の間の確率フローの出入りがバランスしていることを表している．式 (4.56) から，$\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{b}$ がスカラーなので，c をある定数として

$$\boldsymbol{x}_0 = c\,\boldsymbol{\beta} \tag{4.59}$$

となる．式 (4.58) を式 (4.57) に代入すれば

$$\lambda\boldsymbol{x}_{n-1} + \boldsymbol{x}_n\,(-\lambda\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}) + \lambda\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}^\top, \quad n \ge 1 \tag{4.60}$$

となるので，

$$\boldsymbol{x}_n = \lambda\boldsymbol{x}_{n-1}\,(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{\beta})^{-1}, \quad n \ge 1 \tag{4.61}$$

が得られる．よって

$$\boldsymbol{R} = \lambda\,(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{\beta})^{-1} \tag{4.62}$$

とおくと，式 (4.59) を使って

$$\boldsymbol{x}_n = c\,\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{R}^n, \quad n \geq 0 \tag{4.63}$$

を得る．この形の解を**行列幾何形式解** (matrix-geometric solution)，$\boldsymbol{R}$ を**公比行列** (rate matrix) という．正規化条件より，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_n \boldsymbol{e} = \sum_{n=0}^{\infty} c\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{R}^n \boldsymbol{e} = c\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{e} = 1$$

となる．ところで，

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})^{-1} = \big(-(\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{\beta})\,(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{\beta})^{-1}\big)^{-1} = -(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{\beta})\,(\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{\beta})^{-1}$$

より，

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})^{-1} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{\beta})^{-1} = \boldsymbol{\beta}\big(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{\beta}(-\boldsymbol{B})^{-1}\big)^{-1} = \boldsymbol{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\big(\lambda\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{\beta}(-\boldsymbol{B})^{-1}\big)^n$$

となる．よって，

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\big(\lambda\boldsymbol{e}\,\boldsymbol{\beta}(-\boldsymbol{B})^{-1}\big)^n\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{e}\sum_{n=0}^{\infty}\big(\lambda\boldsymbol{\beta}(-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{e}\big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n = (1-\rho)^{-1}$$

を得る．これより，未知定数 c は

$$c = 1-\rho \tag{4.64}$$

で与えられることが分かる．

公比行列を用いて，例えば，平均系内客数 $\bar{L}$ は次で与えられる[6]．

$$\bar{L} = (1-\rho)\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})^{-2}\boldsymbol{e} \tag{4.65}$$

平均待ち時間などはこの式と式 (4.48) から求めることができる．(式 (4.48) で $a=\rho$, $h=h_1$ とおく．)

5 待ち行列ネットワーク

5.1 待ち行列ネットワークとは

テーマパークにはたくさんのアトラクションがあり，人気のあるアトラクションほど多くの人が長い行列を作っている．入場者はそれらアトラクションをひとつずつ回っていく．**待ち行列ネットワーク** [6, 7](queueing network) とは，複数の待ち行列をネットワーク状に結んだモデルであり，テーマパークの場合は，ひとつのアトラクションがひとつの待ち行列に対応する．個々の待ち行列をノード (node) またはサービスステーション (service station) という．コンピューターや通信ネットワークも，ジョブやパケットがルーターや CPU で待ち行列を作る複雑なネットワークシステムである．また，生産組み立てラインも，工程と工程の間にあるバッファーで待ち行列ができるので，待ち行列が直列あるいはツリー状につながったシステムとみなすことができる．待ち行列ネットワークは，このような待ちを伴う複雑なシステムの性能や特性を評価するために用いられる．

5.2 開放型と閉鎖型待ち行列ネットワーク

待ち行列ネットワークは，客がネットワークの外から入ったり外へ出たりするかどうかによって，開放型と閉鎖型，それらの混合型に分類される [6, 7]．

(1) 開放型待ち行列ネットワーク

客は外から入ってきてネットワーク内のノードを訪問してサービスを受け，最終的にはネットワークの外へ出ていってしまうモデルを**開放型待ち行列ネットワーク** (open queueing network) という．典型的な開放型ネットワークとして，生産組み立てラインの性能評価に用いられる **直列型待ち行列** (tandem queue; 待ち行列が直列に繋がったモデル) がある．

(2) 閉鎖型待ち行列ネットワーク

客はネットワークの外から入ったり外へ出たりはせず，常に一定の数の客がネットワークの中を動き回るモデルを**閉鎖型待ち行列ネットワーク** (closed queueing network) という．計算機システムのモデルであるセントラルサーバーモデルは典型的な閉鎖型ネットワークである．

[6] この式は計算がより容易な式に変形できるがここでは省略する．

5.3 ジャクソンネットワーク

5.3.1 ジャクソンネットワークの定義

ジャクソンネットワークとは，簡単に言えば M/M/1 待ち行列がつながった待ち行列ネットワークであり，次のように定義される．

定義 5.1 (ジャクソンネットワーク; Jackson network) ノード数を J とするジャクソンネットワークは次で与えられる．

(i) ネットワーク外部からの客は到着率 λ のポアソン到着に従って発生し，確率 r_{0j} でノード j へ到着する $(j = 1, 2, ..., J)$．ここで，$\sum_{j=1}^{J} r_{0j} = 1$ である．外部からノード j への到着率を $\lambda_j = \lambda r_{0j}$ とする．

(ii) 各ノードのサーバー数を 1 ，待ち室の容量を無限，サービス規律を先着順 (FIFO) とする．ノード j $(j \in \{1, 2, ..., J\})$ でのサービス時間は平均 $1/\mu_j$ の指数分布に従うとする．

(iii) ノード i $(i \in \{1, 2, ..., J\})$ でのサービスを終了した客は確率 r_{ij} でノード j $(j \in \{1, 2, ..., J\})$ へ移動するか，確率 $r_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{J} r_{ij}$ で外部へ退去する．

(iv) (i) から (iii) で与えられた事象は互いに独立である．

- $\lambda = 0$, $r_{i0} = 0$, $i = 1, 2, ..., J$, でネットワーク内に常に一定人数の客がいるモデルは，外部との客の出入りのないモデルであり，閉鎖型ジャクソンネットワークとなる．$\lambda > 0$ でネットワーク内の客はどの客もいつかは外部へ退去するモデルが開放型ジャクソンネットワークとなる．
- ここで示したモデルは最も基本的なジャクソンネットワークである．これを次のように拡張したモデルもジャクソンネットワークと呼ばれる．この拡張されたモデルも後に示す積形式解を持つ．
  - (i) において外部からの到着率をネットワーク内の客の総数 x の関数 $\lambda(x)$ として与える．
  - (ii) においてノード i $(i \in \{1, 2, ..., J\})$ のサービス率をそのノード内にいる客数 x_i の関数 $\mu_i(x_i)$ として与える (これにより複数サーバーも表現できる)．

5.3.2 連続時間マルコフ連鎖としてのモデル化

$j \in \{1, 2, ..., J\}$ に対して $X_j(t)$ を時刻 t におけるノード j での系内客数とし，$\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), ..., X_J(t))$ とする．その定義からもわかるように，$\{\boldsymbol{X}(t)\}$ は状態空間を $S = \mathcal{Z}_+^J$ とする連続時間マルコフ連鎖となる．以下では，j 番目の要素が 1 でその他は全て 0 である J 次元ベクトル (J 次元単位ベクトル) を $\boldsymbol{e}_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ とする．$\{\boldsymbol{X}(t)\}$ の推移速度行列を形式的に $\boldsymbol{Q} = (q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S)$ とおくと，$\boldsymbol{Q}$ の各要素は次で与えられる ($\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, .., x_J)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, .., y_J)$ とし，$1_{\{x_i > 0\}}$ は $x_i > 0$ ならば 1，そうでなければ 0 の値を取る関数とする)．

$$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \lambda r_{0i}, & \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i,\ i = 1, 2, ..., J \quad (\text{外部到着}) \\ \mu_i r_{i0}, & x_i > 0,\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i,\ i = 1, 2, ..., J \quad (\text{外部退去}) \\ \mu_i r_{ij}, & x_i > 0,\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j,\ i, j = 1, 2, ..., J,\ j \neq i \quad (\text{移動}) \\ -\left(\lambda + \sum_{i=1}^{J} \mu_i (1 - r_{ii}) 1_{\{x_i > 0\}}\right), & \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \quad (\text{対角要素}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.66}$$

この $\boldsymbol{Q}$ は安定的かつ保存的である．$\{\boldsymbol{X}(t)\}$ の定常分布ベクトルを (存在すれば) 形式的に $\boldsymbol{\pi} = (\pi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in S)$ とおく (注：ノード i からノード i へ移動した場合，$\{\boldsymbol{X}(t)\}$ の状態は見かけ上，変化しない)．

5.3.3 開放型ジャクソンネットワークの定常分布

開放型ネットワークなので，外部から到着した客はネットワーク内のノードを巡り，いつかは外部へと退去する．そこで，外部から到着した一人の客が，外部へ退去するまでにノード j を訪れる平均回数 θ_j $(j \in \{1, 2, .., J\})$ を求めてみる．客がどういうルートで各ノードを訪問していくかは，ルーチング確率 r_{ij} にのみ依存し，待ち時間やサービス時間とは無関係である．よって，θ_j, $j = 1, 2, \ldots, J$, は次の**トラフィック方程式 (traffic equation)**

$$\theta_j \ = \ r_{0j} + \sum_{i=1}^{J} \theta_i r_{ij},\ j = 1, 2, ..., J \tag{5.67}$$

の解として与えれる．この式の右辺第一項は外部から直接ノード j に入る場合の平均回数，右辺第二項はノード i から移動してノード j に入る場合の平均回数である．この θ_j は，推移確率行列

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1J} & r_{10} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{J1} & \cdots & r_{JJ} & r_{J0} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{0}^\top & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{J1} & \cdots & r_{JJ} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_{10} \\ \vdots \\ r_{J0} \end{pmatrix} \tag{5.68}$$

と初期分布 $(r_{01}\ \cdots\ r_{0J}\ 0) = (\boldsymbol{\beta}\ 0)$ をもつ吸収的マルコフ連鎖において，吸収されるまでに状態 j を訪問する平均回数とみることもできる (このとき，外部が吸収状態となる)．すなわち，$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1\ \cdots\ \theta_J)$ として，

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U})^{-1}$$

で与えられる．これが方程式系 (5.67) (行列表現は $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{U}$) の解であることは明らかである．

定理 5.1 (開放型ジャクソンネットワークの定常分布)
$\alpha_j = \lambda\theta_j, \rho_j = \alpha_j/\mu_j, j = 1, 2, ..., J,$ とする．$\rho_j < 1, j = 1, 2, ..., J,$ であれば $\{\boldsymbol{X}(t)\}$ の定常分布 $\boldsymbol{\pi} = (\pi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in S)$ は次で与えられる．

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{J} (1-\rho_j)\rho_j^{x_j}, \boldsymbol{x} \in S \tag{5.69}$$

(証明は 5.4 に示す．)

- この式は，$f_j(x_j) = (1-\rho_j)\rho_j^{x_j}$ と置くと，$\pi(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{J} f_j(x_j)$ という形をしている．このように，ネットワーク全体の定常確率 $\pi(\boldsymbol{x})$ が各ノードの系内客数のみに依存した項 $(f_j(x_j))$ の積で書けるとき，それを**積形式解** (product form solution) という．
- その定義より，α_j はノード j への総到着率である．よって，この開放型ジャクソンネットワークでは，各ノードがあたかも，到着率 α_j，サービス率 μ_j の互いに独立な M/M/1 待ち行列モデルあるかのような形で定常確率が与えられている．このことから，特定のひとつのノードの振る舞いを分析するときには，そのノードのみに注目して解析をすればよい．ただし，各ノードが独立であるといっても，これは定常状態における同時分布のことだけで，一般に，ノード内客数の変化などの時間的な振る舞いは互いに独立にはならない．

5.3.4 閉鎖型ジャクソンネットワークの定常分布

閉鎖型ネットワークなので，外部との客の出入りはなく，ネットワーク内には常に一定の数の客 (K 人とする) がいる．よって，$\{\boldsymbol{X}(t)\}$ が取り得る状態の集合は，S の部分空間

$$\tilde{S} = \{\boldsymbol{x} \in S : x_1 + x_2 + ... + x_J = K\}$$

となる．閉鎖型ジャクソンネットワークのトラフィック方程式は次で与える．

$$\theta_j = \sum_{i=1}^{J} \theta_i r_{ij},\ j = 1, 2, ..., J \tag{5.70}$$

これは $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1\ \cdots\ \theta_J)$, $\boldsymbol{P} = (r_{ij})$ とすると，$\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\theta}$ を表している．この方程式には定数倍の自由度があるので，例えば，$\theta_1 = 1$ として次のように解を求める．$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\theta_2\ \cdots\ \theta_J)$, $\tilde{\boldsymbol{r}} = (r_{12}\ \cdots\ r_{1J})$,

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} r_{22} & \cdots & r_{2J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{J2} & \cdots & r_{JJ} \end{pmatrix},$$

とすると，$\theta_1 = 1$ より $\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\theta}$ は $\tilde{\boldsymbol{r}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}\tilde{\boldsymbol{P}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}$ と変形され，$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{P}})^{-1}$ が得られる．ここで，$\theta_j\ (j \neq i)$ はノード 1 から出発してノード 1 に初めて戻るまでにノード j を訪れた平均訪問回数となる．

定理 5.2 (閉鎖型ジャクソンネットワークの積形式解)
正規化定数を G として，定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ は次で与えられる．

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{G}\prod_{j=1}^{J}\left(\frac{\theta_j}{\mu_j}\right)^{x_j}, \boldsymbol{x} \in \tilde{S}, \quad \text{ただし}, G = \sum_{\boldsymbol{x}\in\tilde{S}}\prod_{j=1}^{J}\left(\frac{\theta_j}{\mu_j}\right)^{x_j}. \tag{5.71}$$

- 閉鎖型ジャクソンネットワークは有限マルコフ連鎖となるので，常に定常分布が存在する．既約であればそれは一意である．

- 閉鎖型ネットワークの場合，$\pi(\boldsymbol{x}) > 0$ となるのは $\sum_{j=1}^{J} x_j = K$ のときだけなので，各ノードは確率的に互いに従属し，独立でなくなる．そのため正規化定数 G を求めること，さらには各ノードでの平均ノード内客数やスループット (そのノードを退去した単位時間当たりの平均客数) といったネットワークの特性量を求めることは一般に簡単ではない．そこで，**たたみこみ法** [7] (Convolution Method) (補足 A を参照) や次に示す**平均値解析法** [6](Mean Value Analysis) といった閉鎖型ネットワーク用の解析手法が提案されている．

平均値解析法

総客数が K 人である閉鎖型ジャクソンネットワークでは，ひとりの客がノード j に入る直前における，その客を除いたネットワーク内客数の定常確率は，ネットワーク内の総客数が $K-1$ 人である場合の定常確率に一致する．平均値解析法では，この性質とリトルの式を用いて，各ノードでのスループット (ノードへの到着率に相当) などを求める．

$\mathcal{J} = \{1, 2, ..., J\}$ とし，$\theta_1 = 1$ として求めたトラフィック方程式の解を θ_j, $j \in \mathcal{J}$, とする．$\lambda_j(k)$, $\bar{L}_j(k)$, $\bar{R}_j(k)$ をそれぞれ，ネットワーク内の総客数が k 人の時のノード j でのスループット，平均ノード内客数，平均ノード通過時間 (滞在時間) とする．それらの値は次のアルゴリズムにより得られる．

平均値解析法のアルゴリズム

Step 1: $k \leftarrow 0$, $\bar{L}_j(0) \leftarrow 0$, $j \in \mathcal{J}$

Step 2: if $k = K$ then *end* else $k \leftarrow k+1$

Step 3: $\bar{R}_j(k) \leftarrow \left(\bar{L}_j(k-1)+1\right)/\mu_j$, $j \in \mathcal{J}$

Step 4: $\begin{cases} \lambda_1(k) \leftarrow k/(\sum_{j=1}^{J} \theta_j \bar{R}_j(k)) \\ \lambda_j(k) \leftarrow \theta_j \lambda_1(k),\ j \in \{2, 3, ..., J\} \end{cases}$

Step 5: $\bar{L}_j(k) \leftarrow \lambda_j(k)\bar{R}_j(k)$, $j \in \mathcal{J}$

Step 6: *goto Step 2*

アルゴリズムの解説

- **Step 3 について**：ある客がノード j に入る直前におけるノード j の平均系内客数はネットワーク内の客数が一人少ない $(k-1)$ 人 のときの平均系内客数 $\bar{L}_j(k-1)$ である．よって，その客のノード j での平均滞在時間 $\bar{R}_j(k)$ は $\bar{L}_j(k-1) \cdot 1/\mu_j + 1/\mu_j$ となる．
- **Step 4 について**：ノード 1 の入口に関門を設けたとする．このとき，関門を通過する単位時当たりの平均客数は $\lambda_1(k)$ となり，関門の内部 (ネットワーク全体に対応) に滞在している客数は k，ひとりの客のそこでの平均滞在時間は $\sum_{j=1}^{J} \theta_j \bar{R}_j(k)$ となる．よって，関門の内部をひとつのシステムと見なしてリトルの式を適用すれば $k = \lambda_1(k) \sum_{j=1}^{J} \theta_j \bar{R}_j(k)$ が得られる．θ_j $(j \neq i)$ はノード 1 から出発してノード 1 に初めて戻るまでにノード j を訪れた平均訪問回数なので，$\lambda_j(k) = \theta_j \lambda_1(k)$ となる．
- **Step 5 について**：各ノードにリトルの式を適用する．

5.4 参考：定理 5.1 の証明

5.4.1 マルコフ連鎖の逆過程と定常分布であることの検査法

ここでは定理 5.1 の証明に用いる方法を説明する．逆過程とは時間の進行方向を逆にした確率過程のことである．

定義 5.2 (逆過程) 確率過程 $\{X(t)\}$ に対し，ある t_0 を用いて，$\tilde{X}(t) = X(t_0 - t)$ で与えられる過程 $\{\tilde{X}(t)\}$ を $\{X(t)\}$ の逆過程という．

定常な連続時間マルコフ連鎖の逆過程はやはりマルコフ連鎖であり，その推移速度行列は次のようにして与えられる．

補題 5.1 (連続時間マルコフ連鎖の逆過程)
推移速度行列 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$，定常分布 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)$ を持つ既約で定常な連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t)\}$ の逆過程は，

$$\tilde{\boldsymbol{Q}} = (\tilde{q}_{ij}), \quad \tilde{q}_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i} q_{ji}, \tag{5.72}$$

を推移速度行列，$\boldsymbol{\pi}$ を定常分布とする定常な連続時間マルコフ連鎖となる．

連続時間マルコフ連鎖では，平衡方程式 $\boldsymbol{xQ} = \boldsymbol{0}^\top$ を満たす分布ベクトル $\boldsymbol{x}$ が得られればそれが定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ となる．よって，ある分布ベクトル $\boldsymbol{x}$ が定常分布であるかどうかを調べるには，平衡方程式 $\boldsymbol{xQ} = \boldsymbol{0}^\top$ を満たすかどうかをチェックすればよい．このチェックを効率的に行うための方法を示したのが次の補題である．

補題 5.2 (定常分布であることの検査法)
$\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ を状態空間 S 上の推移速度行列，$\boldsymbol{x} = (x_i) > \boldsymbol{0}^\top$ を状態空間 S 上の確率ベクトルとする．このとき，$\boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{x}$ が次を満たせば，$\boldsymbol{x}$ は平衡方程式を満し，$\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ の定常分布となる．

(i) $\forall i, j \in S\,(j \neq i)$, $\tilde{q}_{ij} = \dfrac{x_j}{x_i} q_{ji}$ と定義すると，

(ii) $\forall i \in S$, $\displaystyle\sum_{j \in S,\, j \neq i} \tilde{q}_{ij} = \sum_{j \in S,\, j \neq i} q_{ij}$ を満たす．

(証明) $\sum_{j \in S,\, j \neq i} x_j q_{ji} = \sum_{j \in S,\, j \neq i} x_i \tilde{q}_{ij} = -x_i q_{ii}$ より，$\boldsymbol{xQ} = \boldsymbol{0}^\top$ を満たすことが分かる ($\sum_{j \in S,\, j \neq i} q_{ij} = -q_{ii}$ の関係を用いた). □

- この補題より，与えられた推移速度行列 $\boldsymbol{Q}$ の定常分布を (もし存在すれば) 以下のようにして発見的に求める方法が得られる．

  Step 1: 定常分布を予想し，それを $\boldsymbol{x} = (x_i)$ とする．

  Step 2: Step 1 の $\boldsymbol{x} = (x_i)$ を用いて逆過程の推移速度 (の候補) $\tilde{q}_{ij}$ を (i) より構成する．

  Step 3: Step 2 の推移速度が (ii) の条件を満しているかをチェックする．満たしていれば $\boldsymbol{x}$ は定常分布である．

5.4.2 定理 5.1 の証明

平衡方程式 $\boldsymbol{\pi Q} = \boldsymbol{0}^\top$ を満たすことを直接調べてもよいが，ここでは定常分布であることの検査法を用いる．

Step 1: 式 (5.69) で与えられる $\boldsymbol{\pi}$ は，非負であり，$\rho_j < 1$, $j = 1, 2, ..., J$, から $\sum_{\boldsymbol{x} \in S} \pi(\boldsymbol{x}) = 1$ を満たすので確率ベクトルである．

Step 2: $\tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\pi(\boldsymbol{y})}{\pi(\boldsymbol{x})} q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ を構成する．ここで，$q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ がゼロではないのは $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$) が外部到着，外部退去，移動の関係を満たす時のみである．

- $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i$ の時 (逆過程では外部到着，順過程では外部退去)
$$\tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i) = \frac{\pi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i)}{\pi(\boldsymbol{x})} q(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}) = \frac{f_i(x_i + 1)}{f_i(x_i)} \mu_i r_{i0} = \lambda \theta_i r_{i0}$$
- $x_i > 0$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i$ の時 (逆過程では外部退去，順過程では外部到着)
$$\tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i) = \frac{\pi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i)}{\pi(\boldsymbol{x})} q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}) = \frac{f_i(x_i - 1)}{f_i(x_i)} \lambda r_{0i} = \frac{\mu_i}{\theta_i} r_{0i}$$
- $x_i > 0$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j$, $j \neq i$ の時 (逆過程ではノード i から j への移動，順過程では j から i への移動)
$$\tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j) = \frac{\pi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j)}{\pi(\boldsymbol{x})} q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{x}) = \frac{f_i(x_i - 1) f_j(x_j + 1)}{f_i(x_i) f_j(x_j)} \mu_j r_{ji} = \frac{\mu_i}{\theta_i} \theta_j r_{ji}$$

Step 3: $\sum_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} \tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ をチェックする (2 番目の式では導出にトラフィック方程式を用いた)．
$$\sum_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{J} \left\{ \lambda r_{0i} + 1_{\{x_i > 0\}} \mu_i \left(r_{i0} + \sum_{j \neq i} r_{ij} \right) \right\} = \sum_{i=1}^{J} \left(\lambda r_{0i} + 1_{\{x_i > 0\}} (1 - r_{ii}) \mu_i \right)$$
$$\sum_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} \tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{J} \left\{ \lambda \theta_i r_{i0} + 1_{\{x_i > 0\}} \frac{\mu_i}{\theta_i} \left(r_{0i} + \sum_{j \neq i} \theta_j r_{ji} \right) \right\} = \sum_{i=1}^{J} \left(\lambda \theta_i r_{i0} + 1_{\{x_i > 0\}} (1 - r_{ii}) \mu_i \right)$$
ここで，やはりトラフィック方程式を用いることで
$$\sum_{i=1}^{J} \theta_i r_{i0} = \sum_{i=1}^{J} \theta_i \left(1 - \sum_{j=1}^{J} r_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{J} \theta_i - \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{J} \theta_i r_{ij} = \sum_{i=1}^{J} \theta_i - \sum_{j=1}^{J} (\theta_j - r_{0j}) = \sum_{j=1}^{J} r_{0j}$$
が得られ，$\sum_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} \tilde{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となり，$\boldsymbol{\pi}$ は定常分布であることが示される． □

6 シミュレーション

6.1 シミュレーションの原理

X を実数値確率変数，$g:\ \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ を可測関数とし，$\theta = E(g(X))$ を評価したい量とする．X と同じ分布に従う独立な確率変数列を $\{X_n\}$ とする．このとき，大数の強法則より，$E(g(X)) < \infty$ であれば確率 1 で次が成り立つ．

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(X_n) = E(g(X)) = \theta \tag{6.73}$$

よって，何らかの手段により確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^N$ が得られれば，それを用いて θ の近似値 (推定値) $\hat{\theta}$ を

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(X_n) \tag{6.74}$$

によって求めることができる．**モンテカルロシミュレーション**とは，コンピューターを用いて $\{X_n\}_{n=1}^N$ を発生させ，式 (6.74) によって期待値の近似値を求めるための方法である[7]．

例 6.1 (分布を求めるシミュレーション)
$g(x) = 1_{\{x \le x_0\}}$ とおけば関係式

$$E(g(X)) = E(1_{\{X \le x_0\}}) = P(X \le x_0)$$

が得られる．これをもとにシミュレーションで分布を求めることができる．

6.2 シミュレーション結果の精度

前節の説明から分かるように，シミュレーションで得られる結果はひとつの統計量と見なすことができ，その精度の評価は統計における区間推定の方法を用いて行われる．シミュレーションでは，得られた区間推定の結果を**信頼区間**という．信頼区間は，$\{X_n\}$ が独立で同一の分布に従うという仮定から，中心極限定理を適用して得られる．以下では，$\theta = E(g(X)) < \infty, \sigma^2 = Var(g(X)) < \infty$ と仮定し，

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(g(X_n) - \hat{\theta})^2}$$

とおく．

(1) σ が既知の場合
$\Phi(x)$ を標準正規分布の分布関数とし，$z(x)$ を $\Phi(z(x)) = 1 - x$ を満たす値とする．このとき，$1-\alpha$ を信頼度とする信頼区間は次で与えられる．

$$\hat{\theta} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} z(\alpha/2) \le \theta \le \hat{\theta} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} z(\alpha/2) \tag{6.75}$$

(2) σ が未知の場合
$F_n(x)$ を自由度 n の t 分布の分布関数とし，$t(n,x)$ を $F_n(t(n,x)) = 1 - x$ を満たす値とする．このとき，$g(X)$ が正規分布 $N(\theta, \sigma^2)$ に従うならば，$1-\alpha$ を信頼度とする信頼区間は次で与えられる．

$$\hat{\theta} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} t(N-1, \alpha/2) \le \theta \le \hat{\theta} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} t(N-1, \alpha/2) \tag{6.76}$$

ところで，この式では $g(X)$ が正規分布に従うことを仮定している．よって，そうでない場合には，各 $g(X_n)$ の代わりにそのサンプル平均を用い (中心極限定理からサンプル平均は正規分布に従うと見なしてよい)，そのサンプル平均に対して信頼区間を算出するなどの工夫が必要となる．

6.3 乱数について

コンピューターを用いて $\{X_n\}$ のサンプルを生成させるために乱数列を用いる．ただし，コンピューターによる計算は決定論的であるため，その意味ではコンピューターを用いて真の乱数列を生成することはできない．そこで，近似的に乱数列と見なせる数列を生成し，それを用いてシミュレーションを行う．一般に，そのような数列の発生は 2 段階で行われる．まず，$[0,1]$ 区間での一様分布に従い，互いに独立な確率変数の実現値と見なせる数の列を発生させる．この数を**擬似乱数**という．一般の分布に従う乱数は，擬似乱数を用いて得られる．

[7] 例えば，待ち行列モデルのシミュレーションでは，n 番目の客の待ち時間を X_n としてシミュレーション評価を行う場合がある．このとき，当然ながら $\{X_n\}$ は互いに独立とはならず，大数の法則は使えない．しかし，$\{X_n\}$ がエルゴード的な定常過程であれば，式 (6.73) が成り立ち，式 (6.74) によって期待値の近似値を求めることができる．ただし，このようなシミュレーションでは幾つかの注意が必要である．詳しくは，文献 [8] の 7.3 節「定常状態のシミュレーション」を参照．

6.3.1 擬似乱数の生成方法

代表的な方法として，合同法と M 系列を用いる方法がある．合同法とは，1 次の線形漸化式

$$X_n = aX_{n-1} + c \ (\text{modulus } M),\ n \geq 1, \tag{6.77}$$

$$U_n = X_n/M,\ n \geq 1 \tag{6.78}$$

を用いて $[0,1]$ 区間に値を取る数列 $\{U_n\}$ を生成する方法である．ここで，a, c, M, X_0 は定数であり，この定数の与え方により擬似乱数の良さが大きく左右される．擬似乱数の良さは，周期の長さや一様性，独立性に対する統計的検定結果などによって評価される．詳しくは文献 [9] を参照のこと．多くのアプリケーションでは，合同法を用いて擬似乱数を生成する関数が用意されている．ただし，合同法によって生成される擬似乱数は周期性の面を初めとしてあまりよい性質を持っていないと言われている[8]．

M 系列とは，一般の線形漸化式を用いる方法であり，パラメータをうまく設定すれば合同法よりも長周期で性質のよい擬似乱数を発生できる．詳しくは文献 [9] を参照のこと．M 系列を用いたものなど，性質のよい擬似乱数の発生プログラムはインターネット上でも公開されているので，信頼のおけるサイトからダウンロードしてもよい．

6.3.2 一般の分布に従う乱数の生成方法

代表的な方法として，逆関数法と棄却法を示す．以下では，発生させたい乱数 X の分布関数を $F(x)$，その確率密度関数 (存在すれば) を $f(x)$，U を擬似乱数 ($[0,1]$ 区間の一様分布に従う乱数) とする．

(1) 逆関数法

$F(x)$ の逆関数を $F^{-1}(y) = \inf\{x:\ F(x) \geq y\}$ で定義し，$X = F^{-1}(U)$ として X を生成する方法．

例 6.2 (平均 1 の指数乱数)

$$X = F^{-1}(U) = -\log(1-U) \tag{6.79}$$

(U が $[0,1]$ 区間一様分布に従うので，$X = -\log U$ としてもよい．平均が h の場合はこの X を h 倍する．)

(2) 棄却法

補題 6.1 (棄却法)

$g(x)$ を，ある $c > 1$ に対して $f(x)/g(x) \leq c$ を満たす確率密度関数とし，Y を $g(x)$ に従う乱数とする．このとき，

$$U \leq \frac{f(Y)}{c\,g(Y)}$$

であれば $X = Y$ とし，そうでなければ新たに U と Y を生成し同じことを繰り返す．このとき，X の確率密度関数は $f(x)$ となる．また，その試行回数はパラメータ $1/c$ の幾何分布に従い，平均試行回数は c 回となる．

(**証明**)

$$\begin{aligned} P\left(Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{c\,g(Y)}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{c\,g(Y)} \,\middle|\, Y = y\right) g(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} P\left(U \leq \frac{f(y)}{c\,g(y)}\right) g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(y)}{c\,g(y)} g(y)\,dy = \frac{F(x)}{c} \end{aligned}$$

これより，

$$P(X \leq x) = P\left(Y \leq x \,\middle|\, U \leq \frac{f(Y)}{c\,g(Y)}\right) = \frac{P\left(Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{c\,g(Y)}\right)}{P\left(U \leq \frac{f(Y)}{c\,g(Y)}\right)} = \frac{\frac{F(x)}{c}}{\frac{F(\infty)}{c}} = F(x).$$

□

例 6.3 (標準正規乱数)

まず，確率密度関数が $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$, $x \geq 0$, である非負値乱数 X を発生さる．この乱数は，$g(x) = \exp(-x)$, $c = \sqrt{2e/\pi} \approx 1.32$ とし ($g(x)$ は平均 1 の指数分布の確率密度関数)，棄却法を用いて求めることができる．すなわち，$h(y) = \frac{f(y)}{c\,g(y)} = \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{2}\right)$ とし，U を擬似乱数，V を平均 1 の指数乱数として

$$U \leq h(V) \ \Leftrightarrow -\log U \geq (V-1)^2/2$$

[8]例えば，合同法で生成される擬似乱数は多次元疎結晶構造を持つ．これは，擬似乱数が特定の超平面上に載ってしまう性質であり，擬似乱数を組にして用いる場合には注意が必要である．アプリケーションによっては，複数の擬似乱数系列を使えるものもあるので，系列の異なる擬似乱数を組にして用いるのもひとつの方法である．

が成り立つので，以下のアルゴリズムによって X のサンプルを生成する ($-\log U$ が平均 1 の指数乱数であることを用いた).

S1. 平均が 1 の指数乱数 V_1, V_2 を生成する (逆関数法を用いればよい).

S2. $V_2 < (V_1 - 1)^2/2$ なら S1 へ戻る.

S3. $X \leftarrow V_1$

このようにして求めた X を確率 $\frac{1}{2}$ で -1 倍，確率 $\frac{1}{2}$ でそのままとしたものを Z とすれば[9]，これが標準正規乱数となる．平均 μ，分散 σ^2 の正規乱数はこの Z を用いて，$\sigma Z + \mu$ で与えられる.

6.4 シミュレーションの構成

6.4.1 時間駆動型と事象駆動型

確率過程でモデル化されたシステムのシミュレーションでは，評価対象となるシステムの時間的挙動をコンピューター上で模擬する．一般に，その方法として**時間駆動型**と**事象駆動型**がある．時間駆動型とは，時間軸を十分小さな区間 h で区切り，h 毎にシステムの状態を追っていく方法である．事象駆動型とは，システムの状態が離散的な値を取るモデルに対して，事象の変化時点毎にシステムの状態を追っていく方法である．これらは評価したい対象のモデル化に応じて使い分けることになる．以下にそれぞれの例を示す.

例 6.4 (時間駆動型の例：株価の変動)

$S(t)$ を株式 A の時刻 t での株価とする．金融工学でよく用いられる $\{S(t)\}$ のモデルとして，幾何ブラウン運動がある．幾何ブラウン運動とは，$\{Z(t)\}$ をドリフト係数 μ，変動係数 (ボラティリティ) σ のブラウン運動とし，

$$S(t) = S(0)e^{Z(t)}$$

で与えられる確率過程である．ブラウン運動とは，次を満たす連続時間確率過程である.

定義 6.1 (ブラウン運動)

(i) $Z(0) = 0$

(ii) 定常な独立増分を持つ (独立増分とは，重なりのない時間区間での変化量が独立であるという性質).

(iii) $Z(t+y) - Z(y)$ は平均 μt, 分散 $\sigma^2 t$ の正規分布に従う.

これより，適当に設定した単位時間毎の株価の時系列 $\{S_n\}_{n=0}^N$ は，その単位時間で測ったドリフト係数を μ，ボラティリティを σ とし，初期値を $S(0)$ として，次のように生成すればよい ($S(i+1) = S(0)\exp(Z(i+1)) = S(i)\exp(Z(i+1) - Z(i))$ となり，$(Z(i+1) - Z(i))) \sim N(\mu, \sigma^2)$ であることを用いた).

S1. $S_0 \leftarrow S(0)$,
$i \leftarrow 0$.

S2. $i = N$ ならば終了.

S3. $i \leftarrow i + 1$,
平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布に従う乱数 Z を生成,
$S_i \leftarrow S_{i-1}e^Z$,
S2 へ戻る.

このようにして生成した $\{S_n\}$ の関数として評価量 $g(S_1, ..., S_N)$ を定めれば，その期待値 $\theta = E(g(S_1, ..., S_N))$ の近似値をシミュレーションの原理に従って得ることができ，その信頼区間を評価することができる.

株式 A を原証券とするヨーロピアンタイプのコールオプションとは，満期日 N に行使価格 K (ここでは一株を想定) で株式 A を買う権利であり，その無裁定価格 C_0 は次の式で与えられる (1 日を単位時間とした).

$$C_0 = e^{-rN}E(\max\{0, S(N) - K\})$$

ここで，r は市場利子率，E はリスク中立確率に関する期待値である．リスク中立確率の下では，株価 $S(t)$ はボラティリティを σ として，ドリフト係数 $\mu = r - \sigma^2/2$ の幾何ブラウン運動に従う．よって，$g(S_1, ..., S_N) = e^{-rN}\max\{0, S_N - K\}$ と置くことで，C_0 をシミュレーションによって求めることができる (この場合は，Black-Scholes の式を用いて直接 C_0 を計算できるので，シミュレーションする必要はないが).

[9]例えば，U を擬似乱数として $U \leq \frac{1}{2}$ なら -1 倍すればよい.

例 6.5 (事象駆動型の例：M/M/1 モデル)

到着率を λ，サービス率を μ とし，$Q(t)$ を時点 t での系内客数とする．4.6 の (2) で示したように，$Q(t)$ が変化するのは，客の到着時点かサービス終了時点のどちらかである．よって，$\{Q(t)\}$ のサンプルパスは，次のアルゴリズムにより得られる．(t を現在時点，Q を現在時点での系内客数，t_{end} をシミュレーション終了時点，R_A を次に客が到着するまでの時間，R_S を次にサービスが終了するまでの時間，k を現時点までに系内客数が変化した回数とした．)

1. $t \leftarrow 0$, $Q \leftarrow 0$, $k \leftarrow 0$, (系内客数の初期値は 0 とした)
   平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う乱数 V を生成, $R_A \leftarrow V$.
2. $t > t_{end}$ ならば $K \leftarrow k$ として終了.
3. If $Q = 0$ Then (系内客数がゼロなので次に起こる事象は客の到着)
   $t \leftarrow t + R_A$, $Q \leftarrow 1$,
   平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う乱数 V を生成, $R_A \leftarrow V$,
   平均 $1/\mu$ の指数分布に従う乱数 V を生成, $R_S \leftarrow V$
   Else If $R_A < R_S$ Then (次に起こる事象は客の到着)
   $t \leftarrow t + R_A$, $Q \leftarrow Q + 1$,
   $R_S \leftarrow R_S - R_A$,
   平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う乱数 V を生成, $R_A \leftarrow V$
   Else If $R_A > R_S$ Then (次に起こる事象はサービスの終了)
   $t \leftarrow t + R_S$, $Q \leftarrow Q - 1$,
   $R_A \leftarrow R_A - R_S$,
   平均 $1/\mu$ の指数分布に従う乱数 V を生成, $R_S \leftarrow V$
   If $R_A = R_S$ Then (理論的には確率 1 で $R_A \neq R_S$ だが，コンピューター上では $R_A = R_S$ となる可能性あり)
   $t \leftarrow t + R_A$,
   平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う乱数 V を生成, $R_A \leftarrow V$,
   平均 $1/\mu$ の指数分布に従う乱数 V を生成, $R_S \leftarrow V$
   End If,
   $k \leftarrow k + 1$,
   $(t_k, Q_k) \leftarrow (t, Q)$, ($k$ 番目の系内客数変化時点とその時点での系内客数の組)
   2 へ戻る.

このアルゴリズムによって得られた $\{(t_k, Q_k)\}_{k=1}^{K}$ から $\{Q(t)\}_{t=0}^{t_{end}}$ のひとつのサンプルパスが構成される．そのサンプルパスを用いて評価量 $g(\{Q(t)\}_{t=0}^{t_{end}})$ を定めれば，その期待値 $\theta = E(g(\{Q(t)\}_{t=0}^{t_{end}}))$ の近似値をシミュレーションの原理に従って得ることができる．また，

$$\theta = \lim_{t_{end}\to\infty} g(\{Q(t)\}_{t=0}^{t_{end}})$$

であるような評価量に対しては，十分大きな t_{end} をとることで，1 回のシミュレーションで θ の近似値を求めることができる (ただし，信頼区間を求めるには，複数のシミュレーションを実行する必要がある).

6.4.2 シミュレーション言語

汎用言語を用いて大規模なシステムのシミュレーションプログラムを作ることはかなり大変である．そのため，実際のシステム評価では，シミュレーションのための専用言語を用いるのが普通である．例えば，文献 [8] を参照.

参考文献

[1] 森雅夫, 松井知己, 「オペレーションズ・リサーチ」, 朝倉書店 (2004).

[2] 宮沢政清, 「確率と確率過程」, 近代科学社 (1993).

[3] P. Brémaud, *Markov Chains – Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*, Springer (1999).

[4] E. Gelenbe and I. Mitrani, *Analysis and Synthesis of Computer Systems*, Academic Press (1980).

[5] 森村英典, 高橋幸雄, 「マルコフ解析」, 日科技連 (1979).

[6] 高橋幸雄, 森村英典,「 混雑と待ち」, 朝倉書店 (2001).

[7] 紀一誠,「待ち行列ネットワーク」, 朝倉書店 (2002).
[8] 森戸晋, 逆瀬川浩孝,「システムシミュレーション」, 朝倉書店 (2000).
[9] 伏見正則,「乱数」, 東京大学出版会 (1989).

文献 [1] には，マルコフモデル，待ち行列モデル，シミュレーションについての基本事項がまとめられている．マルコフ連鎖の理論をしっかり学ぶには [3] がよい．

A 閉鎖型ジャクソンネットワークの積形式解における正規化定数について

定理 5.2 の式 (5.71) における正規化定数 G の計算法とそれを用いた評価尺度の算出について説明する．J をノード数，K をネットワーク内の客数とする．$j=1,2,...,J$ に対して，μ_j をノード j でのサービスのサービス率，θ_j を式 (5.70) の解とし，$\rho_j=\theta_j/\mu_j$ とする．このとき，G は次の漸化式で与えられる．

定理 A.1 *(Convolution Method [4])* $G_j(k)$, $j=1,2,...,J$, $k=0,1,...,K$ を次で与える．

$$G_j(0)=1,\ j=1,2,...,J,\quad G_1(k)=\rho_1^k,\ k=1,...,K, \tag{1.80}$$

$$G_j(k)=G_{j-1}(k)+\rho_j\,G_j(k-1),\ j=2,3,...,J,\ k=1,2,...,K. \tag{1.81}$$

このとき，$G=G_J(K)$ となる．

Proof. 形式的に $g_j(z)=\sum_{x_j=0}^{\infty}\rho_j^{x_j}z^{x_j}$ として，母関数 $g(z)=\prod_{j=1}^{J}g_j(z)$ を考える (以下，$g(z)$ が収束する範囲内に z の値はあると考える)．この $g(z)$ のベキ級数展開における z^K の係数が G となる．$\gamma_j(z)$ を

$$\gamma_1(z)=g_1(z),\quad \gamma_j(z)=\gamma_{j-1}(z)\,g_j(z),\ j=2,3,...,J, \tag{1.82}$$

で定義し，$\gamma_j(z)$ のベキ級数展開における z^k の係数を $G_j(k)$ とする．このとき，$g_j(z)=1/(1-\rho_j z)$ と式 (1.82) より，

$$\gamma_j(z)=\gamma_{j-1}(z)+\rho_j z\,\gamma_j(z) \tag{1.83}$$

が得られ，これより，式 (1.81) が得られる． □

$g(z)$ の定義式において，$g_j(z)$ の代わりに $g_j(z)-1$ を代入した式のベキ級数展開における z^K の係数は，

$$\sum_{x_j\ge 1,\ x_1+x_2+\cdots+x_J=K}\ \prod_{l=1}^{J}\rho_l^{x_l}$$

に対応し，これを $G=G_J(K)$ で割ったものは $P(X_j\ge 1)$ に対応する (ノード j の系内客数が 1 以上の確率)．ところで，

$$g(z)\frac{g_j(z)-1}{g_j(z)}=\rho_j z\,g(z)$$

であることより，$P(X_j\ge 1)=\rho_j\,G_J(K-1)/G_J(K)$ となる．よって，ノード j に客がいない確率は

$$P(X_j=0)=1-\frac{\rho_j\,G_J(K-1)}{G_J(K)} \tag{1.84}$$

で与えられる (この式から，ρ_j の値が最も小さいノードは，ノード内に客がいない確率が最も大きくなることが分かる)．スループットは「参考資料」p.21 にある平均値解析法でも求められるが，次の式でも計算できる．λ_j をノード j のスループットとして，

$$\lambda_j=P(X_j\ge 1)\,\mu_j=\frac{\theta_j\,G_J(K-1)}{G_J(K)}. \tag{1.85}$$