第9回 軸のねじり、梁の曲げ

無機材料工学科 准教授 安田公一

1. はじめに

今回は、軸のねじりと梁の曲げに関する材料力学の問題を具体的に解いて、理解を 深めることにする.

2. 軸のねじりの問題

直径 0.4m, 毎分回転数 60 の船舶用プロペラ軸のねじれ角を測ったところ, 長さ 10mのプロペラ軸に対して 1°であった.この軸に生じているねじり応力, 加わっているトルクおよび伝達馬力を求めよ.ただし, 剛性率は 80GPa とする.

3. 梁の曲げに関する基本事項の確認

梁の曲げには、剪断力と曲げモーメントという概念がでてくるが、これらがよく理解されないままに、剪断力図SFDや曲げモーメント図BMDの話になっていってしまっている感もあるので、この点を、再度、確認する、なお、以下、P、 σ 、 τ は正のスカラー量を表しているものとする

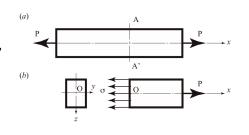


図1 棒の引張り

図 1(a)は、断面積 A の棒に引張り荷重 P が負荷

されている状況であるが、この棒を AA'断面で仮想的に切って、右側の物体の自由物体線図を書くと、図 1 (b) のようになる。この棒が釣り合っているためには、棒の右端に作用する引張り荷重 P と釣り合うように、内力としての垂直応力Gが仮想断面 AA'に生じ、その合応力が引張り荷重 P と釣り合わなければならない、すなわち、

$$P + \int_{A} (-\sigma) dA = 0$$

$$P - \int_{A} \sigma dA = 0$$

$$\therefore P = \int_{A} \sigma dA \qquad (1)$$

となる。ここで、垂直応力 σ が横断面 AA'に均一に分布すれば、AA'断面の中心 O を通るy 軸に関する力のモーメントの釣り合いも、引張り荷重 P と垂直応力 σ の合応力とで自動的に保たれるようになる。このような垂直応力 σ は、

講義名 連続体力学 配付資料 OCW-i

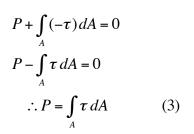
$$P - \sigma \int_{A} dA = 0$$

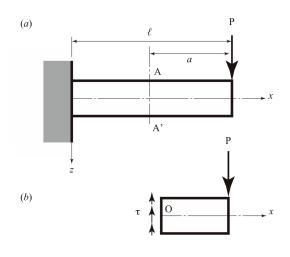
$$P - \sigma A = 0$$

$$\therefore \sigma = \frac{P}{A}$$
 (2)

と言う大きさを持つ.

次に、図 2(a)のような長さ ℓ の片持ち梁(一端を固定、もう一つの端には横荷重 P を負荷)の場合を考えてみる。同じように、仮想断面 AA'で切って、右側の部分の自由物体線図を書くと、図 2(b)および図 2(c)のようになる。まず、z 軸方向の力の釣り合いを考えると、図 2(b)のように、荷重 P と釣り合うように、内力としての剪断応力 τ が仮想断面 AA'に生じ、その合応力が荷重 P と釣り合わなければならない、z 軸下向きを正の方向とするので、





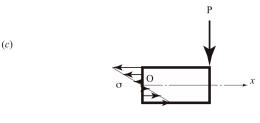


図2 片持ち梁

となる. しかし、この剪断応力だけでは、y軸に関する力のモーメントの釣り合いが保たれない. なぜならば、AA'断面の中心 O を通るy軸に関する荷重 P の力のモーメントは -Pa であり(反時計回りのモーメントを正とする)、剪断応力 τ によるモーメントの寄与はないからである. そこで、AA'断面には、図 2(c)のように垂直応力 σ も生じることになる. この場合の力のモーメントの釣り合いは

$$-Pa + \int_{A(z \ge 0)} (+z)(+\sigma) dA + \int_{A(z < 0)} (-z)(-\sigma) dA = 0$$
$$-Pa + \int_{A} z\sigma dA = 0$$
$$\therefore Pa = \int_{A} z\sigma dA \qquad (4)$$

とならなければならない(ここでの曲げ応力 σ の正負は引張り・圧縮の正負ではなく,x 軸に対する正負となることに注意する). ここで、図 2(c)のように、引張り応力と圧縮応力が 1 次関数的に分布すれば、そのx 軸方向の合応力はゼロとなり、x 軸方向

講義名 連続体力学 配付資料 OCW-i の力の釣り合いも自動的に満たされる. この垂直応力を曲げ応力という.

このようにして、梁に横荷重 P が作用すると、任意の断面には、剪断応力 τ と曲げ応力(垂直応力) σ という内力が生じる、そして、剪断応力 τ の合応力を剪断力と呼んで Q と表す、また、曲げ応力 σ による合モーメントを曲げモーメントと読んで M で表す。

ただし、剪断力と曲げモーメントの符号については、次のように定義する。仮想断面の外向き法線がx軸の正の方向を向いている場合、剪断力 Q がz 軸の正の方向を向いている場合を正の剪断力とする。また、z 軸の正の方向に梁が凸にたわむような曲げモーメント M を正の曲げモーメントとする。これらを図示すると、図 3 のようになる。

この符号の規則を図 2 の片持ち梁に適用すると、AA'断面は外向き法線がx 軸の負の方向を向いていて、剪断応力の合応力がz 軸の負の方向を向いているので、この場合の剪断力は正となる。また、曲げ応力の合モーメントは、この梁をz 軸の負の方向に凸にたわめるので、負の曲げモーメントとなる。その結果、

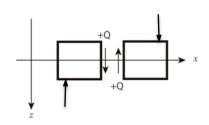
$$Q = P \tag{5}$$

$$M = -Pa \tag{6}$$

となる。さらに、通常は、曲げモーメントは、梁の左端をx 軸の原点とし、そこからの距離 x で断面の位置を表すので、

$$Q = P \tag{7}$$

$$M = -P(\ell - x) \tag{8}$$



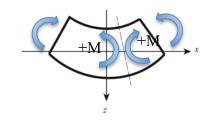


図3 剪断力と曲げモーメントの符号

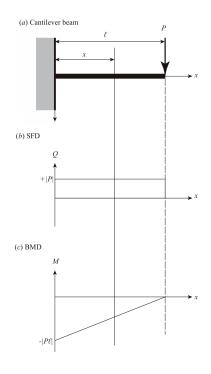


図4 SFD と BMD

となり、これらを図示すると、図 4 のようになる。この場合、剪断力 Q は断面の位置に関わらず、常に P であり、曲げモーメント M は荷重点で 0、固定端で -Plとなり、その間を線型的に変化している。このような剪断力と曲げ応力の分布を剪断力図 SFD、曲げモーメント図 BMD と呼ぶ。

なお、剪断力 F や曲げモーメント M は内部応力の合力・合モーメントとして定義したが、上記のように符号を定義すると、剪断応力 τ や曲げ応力 σ が生じていること

講義名 連続体力学 配付資料 OCW-i

を省略して、仮想断面に、直接、そのような剪断力 F と曲げモーメント M が外力の作用で発生したと見なすこともできる。

梁の基本式としては、以下のものがある.

$$\frac{dF(x)}{dx} = -q(x) \tag{9}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F(x) \tag{10}$$

$$\frac{d^2\delta(x)}{dx^2} = \frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{M(x)}{EI_y} \tag{11}$$

ここで, q(x)は分布荷重, $\delta(x)$ は梁のたわみ曲線の鉛直変位量のことでたわみと呼び, $\theta(x)$ はたわみ曲線の接線と負荷前の軸線とのなす角のことでたわみ角と呼ぶ. E はヤング率, I_y は y 軸に関する断面 2 次モーメントであり, 図 5

$$I_{y} = \int_{A} z^{2} dA \tag{12}$$

図 5 に示す長方形断面(幅 b, 厚さ h) の場合は,

$$I_{y} = \int_{A} z^{2} dA$$

$$= b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^{2} dz$$

$$= \frac{bh^{3}}{12}$$
(13)

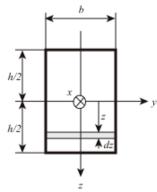
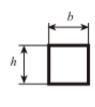


図 5 断面 2 次モーメ

ント となる. なお, x 軸の原点の位置(および、それに伴って、軸 の向き)によって、(9)、(10)、(11)式の右辺の符号が逆転した形式で整理された教 科書もあるので、注意すること.

4. 梁の問題1

図 6 に示す対称 3 点曲げについて、以下の問いに答えよ、ただし、梁は幅 b、厚さ h、長さ ℓ とし、 ℓ /2 の位置に荷重Pが負荷されているとする.



- (1)支点AおよびBの反力R_A,R_Bを求めよ.
- (2) SFD および BMD を示せ.

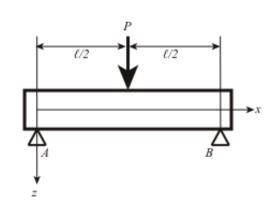


図6 対称3点曲げ

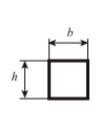
講義名 連続体力学 配付資料 OCW-i

- (3) 曲げ応力 $\sigma(x, z)$ の分布を求めよ.
- (4) 最大引張り応力σ_{max}を求めよ.
- (5) 剪断応力 $\tau(x, z)$ の分布を求めよ.
- (6) 最大剪断応力 T max を求めよ.

5. 梁の問題2

図7に示す非対称3点曲げについて、以下の問いに答えよ、ただし、梁は幅b、厚さh、長さ ℓ とし、左端からaの位置に荷重Pが負荷されているとする、

- (1)支点 A および B の反 カ R_A, R_Bを求めよ.
- (2) SFD および BMD を示 せ.



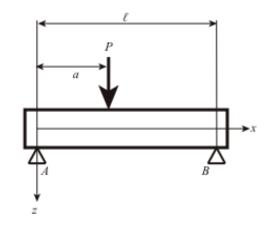


図7 非対称3点曲げ

- (3) たわみ角 $\theta(x)$ およびたわみ $\delta(x)$ を表す式を求めよ. ただし、ヤング率を E と せよ.
- (4)荷重点変位 δ ₽ を求めよ.
- (5) 最大変位 δ max を求めよ.
- (6) $a=\ell/2$ の時(すなわち,対称3点まげ)の荷重点変位 δ 。を求めよ、
- (7) 対称 3 点曲げの時の荷重点変位 δ 。からヤング率 E を求める式を導け.