講義名　連続体力学　配付資料　OCW-i

第 7 回　材料力学におけるひずみ・フックの法則

無機材料工学科
准教授　安田公一

１．はじめに

今回は，ひずみに関する材料力学的な定義を解説する．また，等方線型弾性体における応力とひずみの関係を示すフックの法則についても説明する．

２．ひずみの定義

図 1 に示すように，長さℓ_0，断面積 S の棒に，軸荷重 F が負荷した場合を考える．この場合の円柱軸に垂直な断面に作用する垂直応力σは，次式で求められる．

$$\sigma = \frac{F}{S} \qquad (1)$$

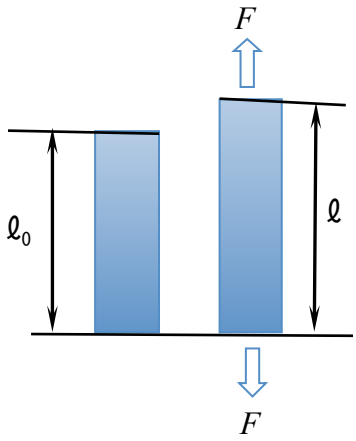

図１　棒の伸び

この時，棒の長さがℓとなったとすると，この棒には，

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \qquad (2)$$

で表される垂直ひずみεが生じている．棒が伸びた場合は，ひずみεは正の値を，縮んだ場合は負の値を持つ．このように荷重軸方向のひずみを縦ひずみと呼ぶ．

さらに，棒が引張られた場合，引張り軸に垂直な方向には，図 2 に示すように，引張り軸方向には伸びるが，それと垂直方向には縮むことがわかる．棒の直径を d_0 とし，荷重を負荷したときの直径を d とすると，この棒の横方向の垂直ひずみは，

$$\varepsilon' = \frac{d - d_0}{d_0} \qquad (3)$$

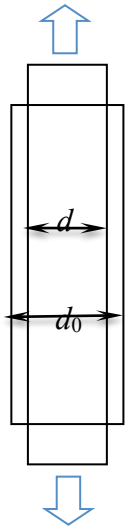

図 2　垂直方向の縮み

で表される．このとき，縦ひずみεに対する横ひずみε'の比に負号をつけたものをポアソン比νと呼ぶ．

$$\upsilon = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \qquad (4)$$

次に，立方体に剪断力 F が負荷された場合を考える．立方体の一つの面の面積を S とすると，剪断応力τは

$$\tau = \frac{F}{S} \qquad (5)$$

となる．この剪断応力によって，立方体が図３のように歪んだ場合，z 方向に a だけ離れた 2 点が x 方向に δ だけずれたとすると，剪断ひずみ γ は，

$$\gamma = \frac{\delta}{a} \qquad (6)$$

と表される．また，変形前は x 軸と z 軸とのなす角は 90°であるが，剪断変形により角度が ϕ になったとすると，微小変形であれば，

$$\gamma = \frac{\delta}{a} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \cong \frac{\pi}{2} - \phi \qquad (7)$$

となって，剪断ひずみは，90°からの角度のずれと考えても良い．剪断ひずみの正負は，横変位する面の外向き面法線が座標軸（図 3 では z 軸）の正の方向を向いている場合，横変位も座標軸（図 3 では x 軸）の正の方向であれば，その剪断ひずみを正とする．

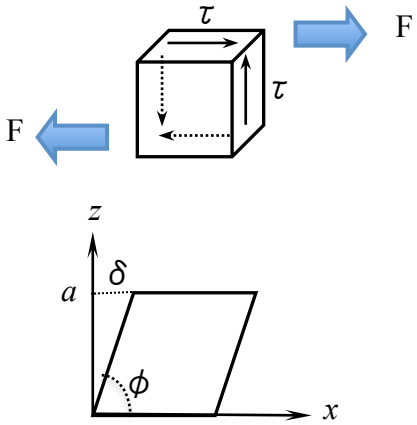

図３　剪断ひずみ

３．変位勾配を用いたひずみの定義

ここでは，等方線型弾性体の微小変形について考える．まず，図 4 のように，xyz 座標系を取り，対象とする物体内の任意の点 P に直方体状の微小体積要素を考える．それぞれの辺の長さを dx，dy，dz とする．この物体が変形して，点 P の変位が u，v，w であったとすると，x 軸上の点 A の x 方向の変位は，

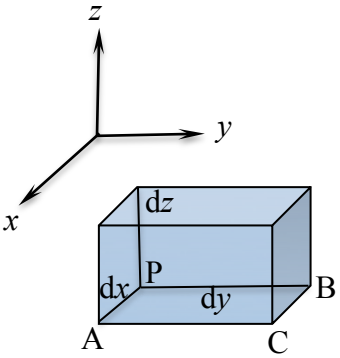

図 4　微小体積要素

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \qquad (8)$$

となるので，この変形に伴う線分 PA の長さの変化は，

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx \qquad (9)$$

となる．これより，点 P における x 軸方向の単位長さ当たりの長さの変化を，

$$\varepsilon_x \equiv \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (10)$$

垂直ひずみ ε_x と定義する．ここで，$\partial u / \partial x$ のことを変位勾配と呼ぶ．同様に，y 方向，z 方向の垂直ひずみ ε_y と ε_z も，次式で定義される．

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (12)$$

垂直ひずみは，微小線素が伸びる場合に正の値を，縮む場合に負の値を持つように定義される．

次に，微小体積の剪断変形については，図 5 に示すような xy 面内での剪断変形を考える．線分 PA と PB が点 P で直交しているとする．この微小体積が変形を受けて，点 P が点 P'に変位し，その変位ベクトルは（u,v）で表される．すると，点 A は点 A'に，点 B は点 B'に変位し，点 A の y 方向変位は $v+\frac{\partial v}{\partial x}dx$ となり，点 B の x 方向変位は $u+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ となる．微小変形なので，線分 P'A'と x 軸とのなす角は $\frac{\partial v}{\partial x}$ となり，線分 P'B'と y 軸とのなす角は $\frac{\partial u}{\partial y}$ となり，元々，直角であった角∠APB は，変形により $\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$ だけ減少する．すなわち，剪断ひずみ γ_{xy} は，

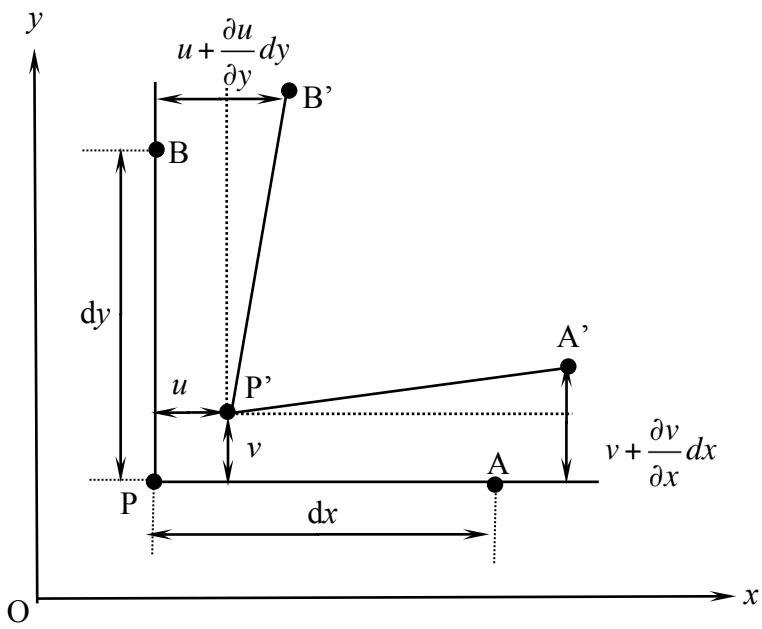

図 5　微小体積要素の剪断変形（xy 面内）

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (13)$$

となる．同様にして，

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad (14)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad (15)$$

となる．なお，ε_x，ε_y，ε_z，γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{zx} のことを工学ひずみといって，材料力学では，このひずみが使われるが，ε_x，ε_y，ε_z，γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{zx} はテンソル規則を満たさない．しかし，ε_x，ε_y，ε_z，$\gamma_{xy}/2$，$\gamma_{yz}/2$，$\gamma_{zx}/2$ の間ではテンソル規則を満たすので，前回の『材料力学における応力テンソル』の(3)式と(4)式の σ_x，σ_y，τ_{xy}

の替わりに，ε_x，ε_y，$\gamma_{xy}/2$ を代入すると，次式の関係が得られる．

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta \qquad (16)$$

$$\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\gamma_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + \left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\sin\theta\cos\theta \qquad (17)$$

ここで，θ は任意の線素が x 軸となす角度であり，この線素の垂直ひずみが ε，剪断ひずみが γ である．あるいは，ε と γ を，xy 座標系から角度 θ 回転した $x'y'$ 座標系での $\varepsilon_{x'}$，$\gamma_{x'y'}$ のことであると考えても良い．

４．モールのひずみ円とロゼットゲージ

(16)式と(17)式より，横軸に ε，縦軸に $\gamma/2$ を取ってモールのひずみ円を描くことができる．実際には，ロゼットゲージのデータを解析するのに使われるので，その使い方について述べる．

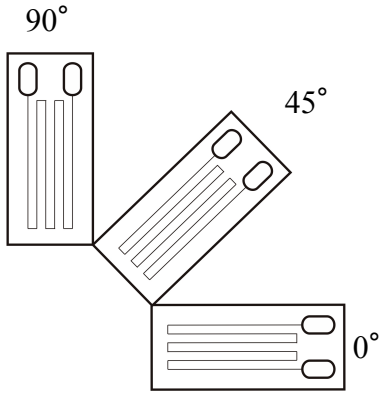

図 6 ロゼットゲージ

ロゼットゲージは，3 個の電気抵抗式ひずみゲージが一定の角度だけずれて組み合わされたもので，図 6 に，その 1 例として，直角 3 軸ロゼットゲージを示している．そして，この中にある電気抵抗式ひずみゲージには，細い金属線が台紙に貼られており，引張り歪みが生じると金属線の断面積が減り，長さが伸びて電気抵抗が変わることからひずみを検出するものである．このロゼットゲージを物体の表面に貼り付けて，荷重をかけた時のそれぞれのひずみゲージの電気抵抗の変化から，0°，45°，90°方向のひずみを測定することができる．

図 7(*a*)に示すように，最大主ひずみ ε_1 に対して，θ だけ半時計方向に回転した方向にロゼットゲージの 0°方向を合わせて，3 軸のひずみを測定したところ，ε_0，ε_{45}，ε_{90} というデータが得られたとする．これをモールのひずみ円にプロットすると，図 7（*b*）となる．

ε_0，ε_{45}，ε_{90} のみが分かっている場合のモールのひずみ円は次のようにして書くことができる．まず，横軸に ε を，縦軸に $\gamma/2$ を取って，測定で得られた ε_0，ε_{45}，ε_{90} の値のところに，ε 軸に垂線を立てる．次に，図 7（*c*）のように，ε_{45} の直線上に任意の点 P を取り，点 P から右肩下がりの 45°の直線（x 軸と -45°の角度をなす＼という直線）を引いて，ε_0 の垂線との交点を決めて，それを点 A とする．同様に，点 P から右肩上がりの 45°の直線（x 軸と +45°の角度をなす／という直線）を引いて，ε_{90} の垂線との交点を決めて，それを点 C とする．次に，図 7（d）のように，点 A と点 C を結ぶ線分の中点を中心とし，線分 AC の直径とする円を描くと，それがモールのひずみ円となる．次に，点 A から点 C に向かって半時計方向に回る円周

上の 2 等分点（中心角で 90°のところ）に点 B を取る．最後に，ε軸に平行な直線を，ひずみ円上のεの最大点を通るように引き直すと，それがモールのひずみ円のε軸になり，その最大点が最大主ひずみε_1に相当する．また，最大主ひずみの方向は，ε_1から見た点 A のなす角が -2θ なので，ロゼットゲージの 0°方向は最大主ひずみの方向から $+\theta$ の方向となる．したがって，ロゼットゲージ 0°方向から $-\theta$ の方向が最大主ひずみの方向となる．

なお，点 P から 45°の角度の直線を引いて点 A を決めるということは．円周角∠APB が 45°となることを意味し，円周角と中心角との関係から，中心角∠AOB が 90°となるように，点 A が決められることによる．

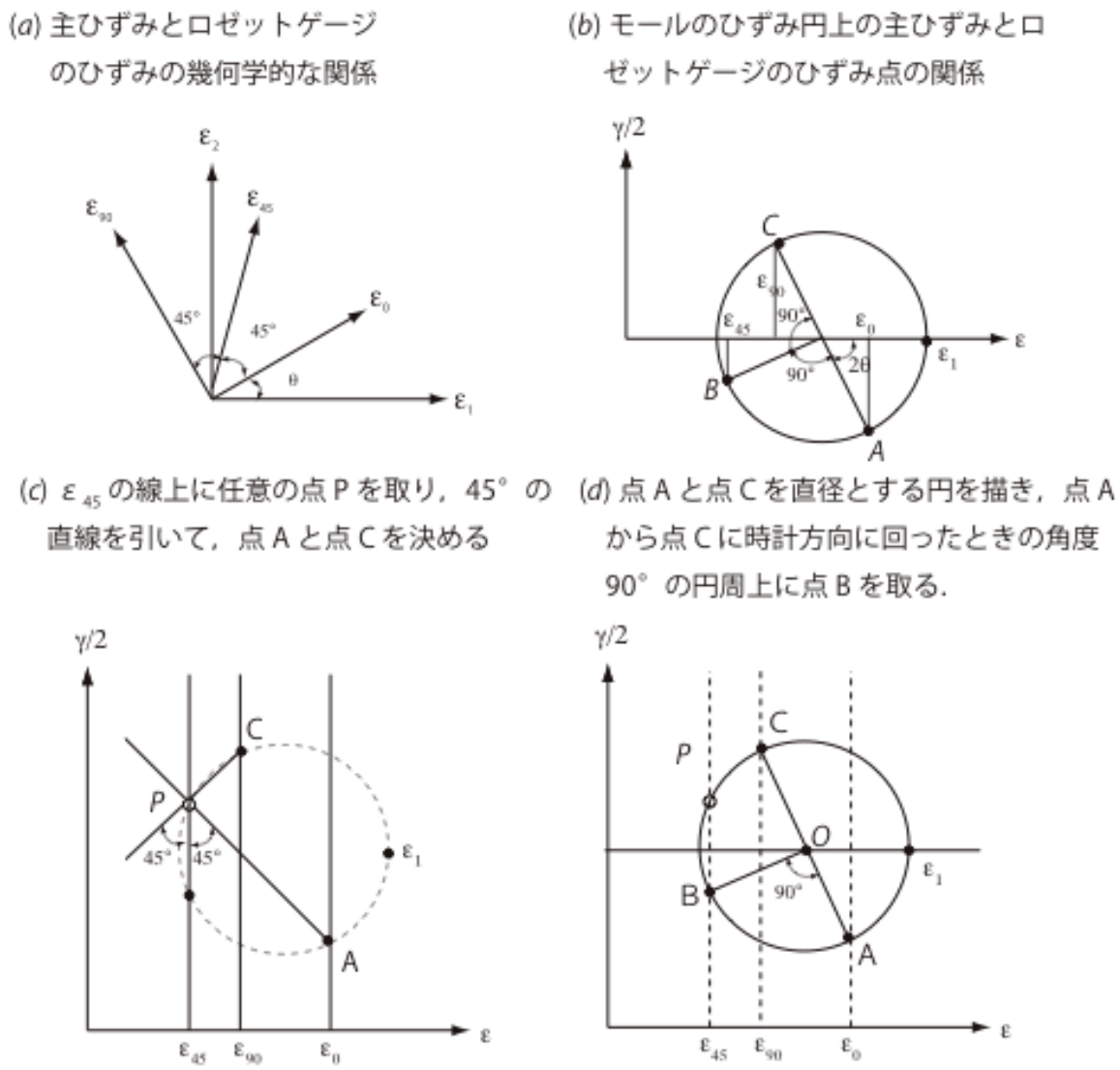

図７　3 つの垂直ひずみデータから主ひずみを求める方法

実際にいくつかの事例で試してみれば分かるが，例えば，ε_{45} と ε_{90} が同じひずみの値となった場合は．最初に，与える点 P が点 C となる．同様に，ε_{45} と ε_{0} が同じひずみの値となった場合は．最初に，与える点 P が点 A となる．また，ε_{0} と ε_{90} が同じひずみの値となった場合は．最初に，与える点 P が点 B となる．

演習１　直角 3 軸ロゼットゲージで，$\varepsilon_{0} = 75\times10^{-6}$，$\varepsilon_{45} = -11\times10^{-6}$，$\varepsilon_{90} = 21\times10^{-6}$ という値を得た．最大主ひずみの大きさとその方向を求めよ．

５．フックの法則

ひずみが応力に比例するというのがフックの法則である．x 軸方向の垂直応力 σ_x が負荷された場合，x 軸方向の垂直ひずみ ε_x は，

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad (16)$$

ここで，E はヤング率である．また，この σ_x により，横方向は縮み，y 方向，z 方向のひずみは，次式で与えられる．

$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \qquad (17)$$

$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \qquad (18)$$

ここで，ν はポアソン比である．σ_y および σ_z が負荷された場合も同様なので，これらを重ね合わせると，

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left\{\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right\} \qquad (19)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left\{\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right\} \qquad (20)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left\{\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right\} \qquad (21)$$

となる．剪断応力と剪断ひずみに対しては，

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad (22)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad (23)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \qquad (24)$$

となる．ここで，G は剛性率である．剛性率 G とヤング率 E，ポアソン比 ν との間には，次の関係がある．

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (25)$$

講義名　連続体力学　配付資料　OCW-i

演習２　次の設問に答えよ.

（１）（19）式，（20）式，（21）式を足し合わせると，次式となることを示せ.

$$e = \frac{1-2\nu}{E}\Theta \qquad (26)$$

ただし，e，Θは，次式で定義される.

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad (27)$$

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \qquad (28)$$

e は体積膨張を表し，Θは平均応力の 3 倍を表す.

（２）（19）式，（20）式，（21）式を連立して，σ_x，σ_y，σ_zについて解き，(27)式の e を用いて書き換えると，次式となることを示せ.

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}e + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_x \qquad (29)$$

$$\sigma_y = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}e + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_y \qquad (30)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}e + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_z \qquad (31)$$

(３)　(29）式，（30）式，（31）式を書き換えて，次式となることを示せ.

$$\sigma_x = \lambda e + 2\mu\varepsilon_x \qquad (32)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2\mu\varepsilon_y \qquad (33)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2\mu\varepsilon_z \qquad (34)$$

ここで，λとμはラメの定数と呼ばれ，次式で定義される.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \qquad (35)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (36)$$

(４)　(36）式のμを使って，（22）式，（23）式，（24）式を書き換えると，次式となることを示せ.

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} \qquad (37)$$

$$\tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} \qquad (38)$$

$$\tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} \qquad (39)$$

(５)　静水圧−P（<0）が負荷された場合，$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ = -P となり，（26）式が次式で表されることを示せ.

$$P = -Ke \qquad (40)$$

ただし，K は体積弾性率と呼ばれ，次式で定義される.

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad (41)$$