集合と位相第一　期末試験　(平成 25 年 8 月 1 日)

次の問題に答えよ．「証明せよ」「示せ」「理由を述べよ」とある問題は詳しく説明すること．「答えよ」「あげよ」とある問題は答えのみでよい．

1. $\mathbb{R}$ の部分集合

   $A := (0,1), \quad B := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad C := \mathbb{R} - \mathbb{N}, \quad D := \mathbb{Q}$ (有理数全体の集合)

   を考える．1 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}, d^{(1)})$ における A, B, C, D の内部, 外部, 境界をそれぞれ答えよ．

2. $\mathbb{R}^2$ の部分集合

   $$I := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqq x_i \leqq 1 \ (i = 1, 2)\}$$

   が, 2 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^2, d^{(2)})$ の閉集合であることを示せ．

3. 写像 $d, \tilde{d} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

   $$d(x, y) := |x^3 - y^3|, \quad \tilde{d}(x, y) := |x^4 - y^4| \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

   によって定める．$d, \tilde{d}$ がそれぞれ $\mathbb{R}$ 上の距離関数であるかどうかを答え, その理由を述べよ．

4. (X, d) を距離空間とし, A, B を X の部分集合とする．

   (1) $A^i \cup B^i \subset (A \cup B)^i$ が成り立つことを示せ．

   (2) $A^i \cup B^i = (A \cup B)^i$ が成り立たないような $(X, d), A, B$ の例をあげよ．

5. (X, d) を距離空間とする．A, B を X の空でない部分集合とし, $\delta(A) < \infty$ かつ $\delta(B) < \infty$ であるとする．このとき,

   $$\delta(A \cup B) \leqq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$$

   が成り立つことを示せ．ここで, $\delta(A)$ は A の直径, $d(A, B)$ は A と B の距離である．

6. (X, d) を距離空間とし, A を X の部分集合とする．$A = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ をみたす連続写像 $f : X \to \mathbb{R}$ が存在するための必要十分条件は, A が X の開集合となることである．これを証明せよ．