集合と位相第一 中間試験 解答と解説

1. $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \le 10\}$ とし, X の部分集合 A, B, C, D を次のように定める.

$$A = \{ n \in X \mid n \le 5 \}, \quad B = \{ n \in X \mid n > 3 \},$$

$$C = \{ n \in X \mid n > 7 \}, \quad D = \{ n \in X \mid n^2 - 9n + 20 = 0 \}.$$

このとき, 次の式のうち成り立たないものをすべて挙げ, その理由を述べよ.

$$A \subset D$$
, $A \cap B \subset D$, $X \subset A \cup C$, $A \cap C \subset D$, $A \subset A - C$

解答例 X とその部分集合 A, B, C, D は内包的記法によって定義されている. これらを外延的記法で表すと次のようになる.

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

 $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad C = \{8, 9, 10\}, \quad D = \{4, 5\}$

従って, 次のことがわかる.

$$A \cap B = \{4, 5\}, \quad A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10\},$$

 $A \cap C = \emptyset, \quad A - C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

以上より、問題の包含関係のうち成り立たないものは次の2つである.

 $A \subset D$ (理由: $1, 2, 3 \in A$ であるが, $1, 2, 3 \notin D$ である.)

 $X \subset A \cup C$ (理由: $6,7 \in X$ であるが, $6,7 \notin A \cup C$ である.) \square

解説・講評 問題 1 は集合の記法と演算に関する問題です。10 点満点で採点しました。非常によくできていました。成り立たないものを 1 つ挙げるごとに 5 点を加え,成り立つものを誤って挙げた場合は 5 点を引きました。点数の合計が負になった場合は 0 点としました。数名の人が $A\cap C\subset D$ は成り立たないと答えていましたが,空集合はすべての集合の部分集合ですから,この包含関係は成り立ちます。

- 2. 次の命題 (1), (2) について, それぞれ真か偽かを答えよ. 偽である場合はそ の否定命題を述べ、それが真であることを証明せよ.
 - (1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$
 - (2) $\delta \delta x \in \mathbb{R}$ について $x^2 6x + 11 \le 0$ である.

解答例 (1) 偽である. 否定命題は

ある $x \in \mathbb{R}$ について「x < 1かつ $x^2 \ge 1$ 」である

となる. これが真であることは次のように証明される. -2 は実数であり, -2 < 1 かつ $(-2)^2 = 4 \ge 1$ である. つまり, x = -2 に対して「x < 1 かつ $x^2 \ge 1$ 」である.

(2) 偽である. 否定命題は

任意の $x \in \mathbb{R}$ について $x^2 - 6x + 11 > 0$ である

となる. これが真であることは次のように証明される. $x \in \mathbb{R}$ を任意にとる. このとき, $x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2 \ge 2 > 0$ となる. \square

解説・講評 問題 2 は命題とその否定についての問題です。10 点満点で採点しました。よくできていました。(1), (2) それぞれ,真偽を答えて 1 点,否定命題を正しく述べて 2 点,その証明を行って 2 点として採点しました。 「x < 1 ならば $x^2 < 1$ 」の否定を 「x < 1 ならば $x^2 \ge 1$ 」と書いている人が見受けられました。これは正しくありません。気をつけましょう。

3. №で添字づけられた集合系

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
 ただし、 $A_n=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq -n \text{ かつ }x<1/n\}$

の和集合と共通部分を求めよ.

解答例 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の和集合と共通部分はそれぞれ

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-\infty, 1), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [-1, 0]$$

となる. 以下, これらを証明する. $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A' := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく.

 $A=(-\infty,1)$ であること: $x\in A$ を任意にとる. A の定め方より, ある $n\in\mathbb{N}$ が存在して $x\in A_n=[-n,1/n)$ となる. $[-n,1/n)\subset (-\infty,1)$ であるから, $x\in (-\infty,1)$ である. よって, $A\subset (-\infty,1)$ となる. $x\in (-\infty,1)$ を任意にとる. もし $0\leq x<1$ ならば $x\in A_1=[-1,1)$ である. もし x<0 ならば, $x\in A_1=[-1,1]$ である. もし x<0 ならば, $x\in A_1=[-1,1]$ である. いずれにしても, $x\in A_1$ である. よって, $x\in A_1=[-n,1/n]$ となる. 以上より, $x\in A_1=[-\infty,1]$ となる.

A' = [-1,0] であること: $x \in A'$ を任意にとる. A' の定め方より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n = [-n,1/n)$ が成り立つ. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して x < 1/n であるから, $x \le \inf\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$ である. また, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \ge -n$ であるから, $x \ge \sup\{-n \mid n \in \mathbb{N}\} = -1$ である. つまり, $x \in [-1,0]$ である. よって, $A' \subset [-1,0]$ となる. 任意に $x \in [-1,0]$ をとる. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $[-1,0] \subset [-n,1/n) = A_n$ であるから, $x \in A'$ である. よって, $[-1,0] \subset A'$ となる. 以上より, A' = [-1,0] となる. \square

解説・講評 問題 3 は集合系の和集合と共通部分に関する問題です。 10 点満点で採点しました。 概ねよくできていました。 それぞれの集合を正しく答えていれば,理由は書いていなくとも 5 点をつけました。 共通部分を [-1,0) と答えている答案が多くありました。

4. A, B を集合とし, $f: A \to B$ を写像とする. f が単射であるとき, A の任意 の部分集合 A_1 に対し $f^{-1}(f(A_1)) = A_1$ であることを証明せよ.

解答例 A_1 を A の任意の部分集合とする.

 $a \in A_1$ を任意にとる.像の定義から $f(a) \in f(A_1)$ である.a の f による像が $f(A_1)$ に含まれるから, $a \in f^{-1}(f(A_1))$ である.よって, $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$ となる.

 $a \in f^{-1}(f(A_1))$ を任意にとる. 逆像の定義から $f(a) \in f(A_1)$ であるので、ある $a' \in A_1$ が存在して f(a') = f(a) となる. ここで、f が単射であるので、a' = a となる. よって、 $a \in A_1$ となる. 従って、 $f^{-1}(f(A_1)) \subset A_1$ となる.

以上より, $f^{-1}(f(A_1)) = A_1$ である. \square

解説・講評 問題 4 は写像の像と逆像に関する問題です.10 点満点で採点しました. 逆像と逆写像を混同していると思われる答案がかなりありました.記号が同じなので 間違いやすいのですが、全く別の概念であると認識しておく必要があります.

5. $x, y \in \mathbb{R}$ に対し, $(x+yi)^2 = ai$ となるような $a \in \mathbb{R}$ が存在するとき, $x \rho y$ と 定める. ρ が \mathbb{R} 上の同値関係であることを示せ. ただし, i は虚数単位である.

解答例 $x, y \in \mathbb{R}$ を任意にとる. このとき, $(x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ である. よって, $(x+yi)^2 = ai$ となるような $a \in \mathbb{R}$ が存在するための必要十分条件は, $x^2 - y^2 = 0$, つまり $x^2 = y^2$ が成り立つことである. 従って, $x\rho y$ であるための必要十分条件は, $x^2 = y^2$ が成り立つことである.

反射律: $x \in \mathbb{R}$ を任意にとる. このとき $x^2 = x^2$ であるから, $x \rho x$ である.

対称律: $x \rho y$ であるような $x, y \in \mathbb{R}$ をとる. このとき $x^2 = y^2$ であるから $y^2 = x^2$ である. よって, $y \rho x$ となる.

推移律: $x\rho y$ かつ $y\rho z$ であるような $x,y,z\in\mathbb{R}$ をとる. このとき $x^2=y^2$ かつ $y^2=z^2$ であるから, $x^2=z^2$ である. よって, $x\rho z$ となる.

以上より, ρ は \mathbb{R} 上の同値関係である. \square

解説・講評 問題 5 は同値関係に関する問題です. 10 点満点で採点しました. よくできていました. 反射律と対称律をそれぞれ 3 点, 推移律を 4 点としました. 上の解答例のように, この同値関係の本質を見抜くとあっさり解くことができます.

6. [-1,1] と ℝ が対等であること (濃度が等しいこと) を証明せよ.

解答例 $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ を包含写像とし、写像 $g: \mathbb{R} \to [-1,1]$ を

$$g(x) := \frac{x}{1 + |x|} \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定める. f は包含写像であるから単射である. $x,y \in \mathbb{R}$ に対し, g(x) = g(y) であるとする. このとき,

$$\frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|} \qquad \cdots \qquad (*)$$

である. x>0 ならば, (*) より y>0 となる. よって (*) より x(1+y)=y(1+x) となるので, x=y となる. x=0 ならば, (*) より y=0 である. x<0 ならば, (*) より y<0 となる. よって (*) より x(1-y)=y(1-x) となるので, x=y となる. 以上より, g は単射である. ゆえに, ベルンシュタインの定理より, [-1,1] と $\mathbb R$ は対等である. \square

解説・講評 問題 6 は集合の濃度に関する問題です. 10 点満点で採点しました. 双方向に単射を構成してベルンシュタインの定理を用いるか, あるいは具体的に全単射を構成するかのどちらかを行う必要があります. 閉区間と開区間の対等性を示す部分が重要ですので, その部分に多く配点しました.

- 7. $a, b \in \mathbb{N}$ に対し, b が a の倍数であるとき, $a \leq b$ と定める.
 - (1) ≤が N上の順序であることを示せ.
 - (2) (N,≤) は全順序集合であるかを答えよ.
 - (3) $A := \mathbb{N} \{1\}$ の最大元, 最小元, 上限, 下限, 極大元, 極小元のうち, 存在するものをすべて挙げよ.

解答例 (1) $a,b \in \mathbb{N}$ に対し, b が a の倍数であるとは, b = ka をみたす $k \in \mathbb{N}$ が存在することであった.

反射律: $a \in \mathbb{N}$ を任意にとる. $a = 1 \cdot a$ であり、 $1 \in \mathbb{N}$ であるから、 $a \le a$ である. 反対称律: $a, b \in \mathbb{N}$ に対し、 $a \le b$ かつ $b \le a$ であるとする. このとき、ある $k, \ell \in \mathbb{N}$ が存在して、b = ka かつ $a = \ell b$ となる. よって、 $a = k\ell a$ となるので、 $k\ell = 1$ となり、 $k = \ell = 1$ となる. 従って、a = b となる.

推移律: $a,b,c \in \mathbb{N}$ に対し、 $a \leq b$ かつ $b \leq c$ であるとする. このとき、ある $k,\ell \in \mathbb{N}$ が存在して、b = ka かつ $c = \ell b$ となる. よって、 $c = k\ell a$ となり、 $k\ell \in \mathbb{N}$ であるので、 $a \leq c$ となる.

以上より、≦はN上の順序である.

- (3) A の下限と A の極小元が存在する (A の最大元, 最小元, 上限, 極大元は存在しない). 以下にその理由を述べる.

Aの下限: 1 は $\mathbb N$ の元である. また, 任意の $a \in A$ に対して, $a = a \cdot 1$ であるから $1 \le a$ である. すなわち, 1 は A の下界である. $b \in \mathbb N$ が A の下界であるとすると, 任意の $a \in A$ に対し $b \le a$ となる. 特に, $a \ge 2$ となるから, ka = 2 をみたす $k \in \mathbb N$ が存在する. よって, a = 1 または a = 2 である. しかし, (2) の解答例より $2 \le 3$ は成り立たないから, $a \ne 2$ である. 従って, a = 1 となる. ゆえに, A の下界の集合は $\{1\}$ であり, その最大元は 1 である. 以上より, A の下限は 1 である.

Aの極小元: pを素数とする. $p \in \mathbb{N}$ である. $a \leq p$ をみたす $a \in \mathbb{N}$ は p の約数 であるから, a = 1 または a = p である. よって, a < pをみたす $a \in \mathbb{N}$ は a = 1 のみである. $1 \notin A$ であるから, a < pをみたす $a \in A$ は存在しない. ゆえに, p は A の極小元である. \square

解説・講評 問題 7 は順序に関する問題です. 15 点満点で採点しました. (1), (2) はよくできていましたが, (3) に苦戦した人が多かったようです. (1), (3) にそれぞれ 6 点, (2) に 3 点をつけました. (2), (3) は理由を書いてなくともよいことにしました.

8. 選択公理を正確に述べよ.

解答例 Λ を任意の集合とし、 $(A_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ を Λ によって添字づけられた任意の集合系とする. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_{\lambda} \neq \emptyset$ ならば、 $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda} \neq \emptyset$ である. \square

解説・講評 問題8は選択公理に関する問題です.5点満点で採点しました.覚えているかどうかを問うだけの問題です.