集合と位相第一　中間試験　(平成 25 年 7 月 4 日)

次の問題に答えよ. 「証明せよ」「示せ」とある問題は詳しく説明すること.

1.　$X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqq 10\}$ とし, X の部分集合 A, B, C, D を次のように定める.

$$A = \{n \in X \mid n \leqq 5\}, \quad B = \{n \in X \mid n > 3\},$$
$$C = \{n \in X \mid n > 7\}, \quad D = \{n \in X \mid n^2 - 9n + 20 = 0\}.$$

このとき, 次の式のうち成り立たないものをすべて挙げ, その理由を述べよ.

$$A \subset D, \quad A \cap B \subset D, \quad X \subset A \cup C, \quad A \cap C \subset D, \quad A \subset A - C$$

2.　次の命題 (1), (2) について, それぞれ真か偽かを答えよ. 偽である場合はその否定命題を述べ, それが真であることを証明せよ.

(1) すべての $x \in \mathbb{R}$ について「$x < 1$ ならば $x^2 < 1$」である.

(2) ある $x \in \mathbb{R}$ について $x^2 - 6x + 11 \leqq 0$ である.

3.　$\mathbb{N}$ で添字づけられた集合系

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{ただし, } A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq -n \text{ かつ } x < 1/n\}$$

の和集合と共通部分を求めよ.

4.　A, B を集合とし, $f : A \to B$ を写像とする. f が単射であるとき, A の任意の部分集合 A_1 に対し $f^{-1}(f(A_1)) = A_1$ であることを証明せよ.

5.　$x, y \in \mathbb{R}$ に対し, $(x + yi)^2 = ai$ となるような $a \in \mathbb{R}$ が存在するとき, $x \rho y$ と定める. ρ が $\mathbb{R}$ 上の同値関係であることを示せ. ただし, i は虚数単位である.

6.　$[-1, 1]$ と $\mathbb{R}$ が対等であること (濃度が等しいこと) を証明せよ.

7.　$a, b \in \mathbb{N}$ に対し, b が a の倍数であるとき, $a \leqq b$ と定める.

(1)　$\leqq$ が $\mathbb{N}$ 上の順序であることを示せ.

(2)　$(\mathbb{N}, \leqq)$ は全順序集合であるかを答えよ.

(3)　$A := \mathbb{N} - \{1\}$ の最大元, 最小元, 上限, 下限, 極大元, 極小元のうち, 存在するものをすべて挙げよ.

8.　選択公理を正確に述べよ.