平成 25 年度　理学系広域科目「集合と位相第一」

第２回レポート　解答と解説

1. 写像 $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ を次の式で定義する．このとき, f が全単射であることを示し, f の逆写像 f^{-1} を求めよ．

$$f(x) := \frac{3x-2}{x+1} \quad (x \in \mathbb{R} - \{-1\})$$

解答例　任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $x \neq -1$ であれば $x+1 \neq 0$ であるから, $f(x) = (3x-2)/(x+1)$ は実数である．また, $f(x) = 3$ となるような $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ が存在すると仮定すると, $(3x-2)/(x+1) = 3$, 従って $3x-2 = 3x+3$, $-2 = 3$ となり, 矛盾が生じる．よって, $f(x) \in \mathbb{R} - \{3\}$ である．すなわち, 写像 $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ は正しく定義されている．

❶ f が単射であること：任意に $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-1\}$ をとる．$f(x_1) = f(x_2)$ であるとする．写像 f の定めかたから,

$$\frac{3x_1-2}{x_1+1} = \frac{3x_2-2}{x_2+1}$$

となる．両辺に $(x_1+1)(x_2+1)$ をかけると, $(3x_1-2)(x_2+1) = (3x_2-2)(x_1+1)$ となる．これを展開すると, $3x_1x_2 + 3x_1 - 2x_2 - 2 = 3x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 - 2$ となる．よって, $x_1 = x_2$ となる．以上より, f は単射である．

❷ f が全射であること：任意に $y \in \mathbb{R} - \{3\}$ をとる．$y \neq 3$ より $-y+3 \neq 0$ であるから, 実数 x を

$$x = \frac{y+2}{-y+3}$$

と定める．$x = -1$ であると仮定すると, $-1 = (y+2)/(-y+3)$ であり, $y-3 = y+2$, $-3 = 2$ となって矛盾が生じる．よって, $x \neq -1$ であり, $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ である．また,

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\frac{y+2}{-y+3}\right) &= \frac{3(y+2)/(-y+3) - 2}{(y+2)/(-y+3) + 1} = \frac{3(y+2) - 2(-y+3)}{(y+2) + (-y+3)} \\ &= \frac{3y+6+2y-6}{y+2-y+3} = \frac{5y}{5} = y \end{aligned}$$

となる．以上より, f は全射である．

❸ f の逆写像：任意に $y \in \mathbb{R} - \{3\}$ をとる．❷より $(y+2)/(-y+3) \in \mathbb{R} - \{-1\}$ であり, $f((y+2)/(-y+3)) = y$ である．❶より f は単射であるから, f によって y に写るような $\mathbb{R} - \{-1\}$ の元は $(y+2)/(-y+3)$ のみである．従って,

$$f^{-1}(y) := \frac{y+2}{-y+3}$$

とおけば, これが f の逆写像 $f^{-1} : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$ を与える．□

解説・講評　問題 1 は与えられた写像が全単射であることを示す問題です．f の単射性を 2 点, 全射性を 2 点, 逆写像の導出を 3 点とし，7 点満点で採点しました．よくできていました．f が全射であることの証明の部分で, 任意の $y \in \mathbb{R} - \{3\}$ に対し $(y+2)/(-y+3) \neq -1$ であることをきちんと示していない答案が多く見受けられました．ここをさぼってしまうと, $(y+2)/(-y+3)$ が f の定義域 $\mathbb{R} - \{-1\}$ に含まれるかどうかが曖昧になってしまいます．

今回は, f の導関数を用いたり, f の分数関数としての性質を無条件に用いている答案には厳しい点をつけました．1 つの理由は, 単射や全射の定義をチェックするという書き方になっていなかったためです．もう 1 つの理由は, 解答例と同じレベルの厳密な証明をその方法で行うとすると中間値の定理や平均値の定理が使われるはずなのですが, それを明記した答案がなかったためです．

2. $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ の部分集合 G を次のように定める．

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \text{ある } a \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ が存在して } y = ax \text{ となる}\}$$

$x, y \in \mathbb{R}^2$ に対し, $(x, y) \in G$ であることを $x \rho y$ と書く．ρ が $\mathbb{R}^2$ 上の同値関係であることを示せ．

解答例　❶ ρ が反射律をみたすこと：任意に $x \in \mathbb{R}^2$ をとる．$1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ であり, $x = 1 \cdot x$ である．よって, $x \rho x$ である．

❷ ρ が対称律をみたすこと：任意に $x, y \in \mathbb{R}^2$ をとる．$x \rho y$ ならば, ある $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ が存在して $y = ax$ となる．このとき, $a^{-1} \in \mathbb{R} - \{0\}$ であり, $x = a^{-1}y$ である．よって, $y \rho x$ である．

❸ ρ が推移律をみたすこと：任意に $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ をとる．$x \rho y$ かつ $y \rho z$ であるとする．$x \rho y$ なので, ある $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ が存在して $y = ax$ となる．$y \rho z$ なので, ある $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ が存在して $z = by$ となる．よって, $z = by = b(ax) = (ab)x$ となる．ここで, $ab \in \mathbb{R} - \{0\}$ である．従って, $x \rho z$ である．

❶, ❷, ❸より, ρ は $\mathbb{R}^2$ 上の同値関係である．□

解説・講評　問題 2 は与えられた二項関係が同値関係であることを示す問題です．反射律, 対称律, 推移律の証明を各 1 点とし，3 点満点で採点しました．とてもよくできていました．ただ, 対称律, 推移律の証明では, 特殊な a の値を自分で決めて議論を進めたり, 示すべきことと異なることを示したりしている答案が散見されました．解答例などを参考にして復習することをお勧めします．

2013 年 6 月 13 日 (木)